Entrenamiento de doble conteo

Alfredo Arturo Elías Miranda

29 de agosto de 2020

Lo que viene a continuación ya se ha mensionado en enternamientos pasados, pero en este entrenamiento se va a tratar de formalizar y de hacer todas las purebas más a detalle. Las definiciones que se escriben a continuación se van a explicar en el entrenamiento. También se dará un poco de lo que se conoce de inducción matemática, pero no es algo en lo que se queire centrar el entrenamiento. Esto estará para que los chicos más avanzados repacen y hagan pruebas por inducción matemática.

Se recomuenda tratar de resolver con la mayor cantidad de soluciones posibles los problemas de la última sección. Lo ideal es que se tengan al menos tres soluciones diferentes por problema, pero entre más soluciones mejor, porque se logrará tener un mejor entendimiento de los temas.

1. Recordatorio

Definición 1.1 (Combinaciones y permutaciones)**.** *Datos dos numeros naturales m, n, con $m \leq n$ tenemos que las combinaciones y las permutaciones se definen como:*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Teorema 1.2 (Binomio de Newton)**.** *El binomio de Newton es el siguiente, para $a, b \neq 0$*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \binom{n-2}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Proposición 1.3. *Si tenemos una cuadríacula de $n \times m$, entonces tenemos $\binom{m+n}{n}$ maneras de ir del vertice inferior izquierdo al vértice superior derecho.*

2. Inducción

Las inducción matemática es una herramienta muy útil para hacer pruebas de problemas. La estructura de una prueba de inducción es la siguiente:

- Caso base: Vemos que lo que queremos probar se cumple para un caso.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que lo que queremos probar es cierto hasta un cierto n
- Paso de inducción: Probamos que la hipótesis también es verdadera para $n+1$.

Para ejemplificar una prueba por inducción, resolvamos el siguiente problema:

Ejemplo 2.1. *Demostrar que* $2^n < n!$ *para* $n \geq 4$.

Demostración. Veamos que el caso $n = 4$ es verdadero, pues $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Por lo que ya tenemos nuestro caso base de inducción. Ahora hagamos la hipótesis de inducción siguiente: existe un natural $k \geq 4$ tal que $2^k < k!$. De esto, procedamos demostrar que la hipótesis de inducción también es vñalida para $k + 1$. Esto lo hacemos de la sigueinte manera:

$$\begin{aligned} &2^k < k! \text{ (hipótesis de inducción)} \\ \Leftrightarrow &2^{k+1} < 2 * (k!) \\ \Leftrightarrow &2^{k+1} < 2 * (k!) < (k+1)! \text{ Porque } k + 1 > 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto ya tenemos el paso de inducción. Así que con esto queda demostrado por inducción para cuanquier natiral $k \geq 4$, se cumple que $2^k < k!$. □

Problema 2.2. *Probar por inducción que la suma de los números del* 1 *al* n *es,*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Problema 2.3. *Probar por inducción la asiguiente fórmula:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Problemas

Todos los problemas a continuación tienen al menos 3 soluciones diferentes. el objetivo del entrenamiento es ver más de 21 soluciones de los siguientes problemas. Recuerden que pueden usar todo lo que saben.

Problema 3.1. *Probar la fórmula de Pascal:*

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

donde $n, r \in \mathbb{N}$ *(números naturales) y* $r \leq n$.

Problema 3.2. *Probar el binomio de Newton.*

Problema 3.3. *Probar que para* n *natural se cumple que,*

$$\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}$$

Problema 3.4. *Probar que:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Problema 3.5. *Probar que:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots$$

No olvidar que n puede ser par o impar.

Problema 3.6. *Probar que para cualquier natural n se cumple que:*

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}=\binom{2n}{n}$$

Problema 3.7. *Probar que para cualesquiera enteros $0 \leq k \leq n$ se cumple que,*

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

Problema 3.8. *Probar que para cuales quiera números naturales m, n, r tales que $0 \leq r \leq m, n$, entonces se cumple que:*

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

4. Otros problemas

Si terminan las sección anterior con al menos tres soluciones por problema, pueden empezar a resolver esta lista de problemas que tienen una mayor dificultad.

Problema 4.1. *¿Cuántos números menores a 1 millón tienen en su expresión decimal dos 1's seguidos (al menos)?*

Problema 4.2. *¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que el producto de sus cifras es un cuadrado perfecto?*

Problema 4.3. *¿Cuántos triángulos no dejenerados se pueden formar con los vértices de una cuadrícula de 8×8?*

Problema 4.4. *Probar que dados 6 números irracionales, se pueden encontrar 3 de tal manera que la suma de cuales quiera 2 es irracional.*

Problema 4.5. *Demostrar que si 5 puntos están dentro de un triángulo equilátero de lado 2, entonces dos de esos 5 puntos tienen distancia a lo más 1.*

Problema 4.6. *La sucesión de Fibonacci está definiad por* $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ *y para* $n \geq 2$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

a) *¿Cuánto vale* $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+1}$*?*

b) *Demuestra que* $5f_n^2 + 4(-1)^n$ *es cuadrado perfecto.*

Problema 4.7. *Sea* M *un conjunto de 10 enteros entre 1 y 100. Probar que dentro de* M *se pueden encontrar dos subconjuntos ajenos de tal manera que la suma de los elementos de estos conjuntos sea la misma.*