ECUACIONES CUADRÁTICAS

Lilia Susana Castañeda Castañeda

1. Antes de empezar

Ejercicios:

- (-3) (-3) =
- (-3) (-3) (-3) =
- (-3) (-3) (-3) (-3) =
- ¿Qué signo tendrá el resultado de elevar a la quinta potencia el –3?
- Si el exponente es par, ¿cómo será la potencia de –3?
- Si el exponente es impar, ¿cómo será la potencia de 3?
- Pensé un número y lo elevé al cuadrado. Al resultado lo multipliqué por 4 y al final obtuve 100. Si no pensé en el 5, ¿de qué número se trata?

Problema

En las obras de un matemático árabe del siglo XI hallamos el siguiente problema: A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

2. Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es diferente de 0. Para resolver este tipo de ecuaciones veremos tres métodos**:**

- **Factorización**
- **Completar cuadrados**
- **Fórmula General.**

Antes de empezar con cada uno de los métodos mencionados estudiemos las ecuaciones cuadráticas más sencillas, es decir las de la forma $ax^2 + c = 0$, donde a es diferente 0. Para este tipo de ecuaciones solamente necesitamos despejar x^2 y luego sacar la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$ax^2 + c = 0$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

.

Ejemplos: Resuelve la siguientes ecuaciones cuadráticas.

- $4x^2 - 9 = 0 \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$
- $\frac{x^2}{5} + \frac{5}{49} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{25}{49}} = \pm\frac{5}{7}i$, donde i representa $\sqrt{-1}$ y se llama unidad imaginaria.

3. Factorización

El método de factorización se basa del siguiente hecho: si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ o \ b = 0$. Así pues si tenemos una expresión de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \ o \ cx + d = 0$, por lo cual obtendríamos las soluciones de la ecuación simplemente resolviendo las ecuaciones lineales $ax + b = 0$ y $cx + d = 0$.

La factorización es el proceso inverso a la multiplicación.
La multiplicación de dos binomios $(x + b)(x + d)$ se realiza multiplicando cada uno de los términos de cada binomio, por el otro.

$$x * x \ + x * d + b * x + b * d$$

Aquí podemos ver que $dx + bx$ se suman, y $b * d$ se multiplican.
Quedando

$$x^2 \ + \ x(d + b) \ + bd$$

Por lo tanto, para factorizar, tenemos que buscar dos números que al sumarse nos dé el total de x y al multiplicarse nos de el término numérico.
Ejemplo

$$(x + 3)(x - 8)$$
$$x * x - 8x + 3x - 24$$
$$x^2 \ - 5x \ - 24$$

Para factorizar $x2 \ - 5x \ - 24$, tenemos que buscar dos números que sumados nos den -5 y multiplicados sean -24. Hay que encontrar los múltiplos de 24:

24 y 1
12 y 2
8 y 3
6 y 4

De los anteriores 4 pares de números, el único que cumple con la condición es -8 y 3, que eran los números que estaban en el binomio original.

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

- $x^2 - 2x - 35 = 0$
  $x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 5) = 0 \Rightarrow x - 7 = 0 \ o \ x + 5 = 0 \Rightarrow x = 7 \ o \ x = -5.$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x = 7$ y $x = -5$.

- $18x^2 + 41x + 21 = 0$
  $18x^2 + 41x + 21 = 0 \Rightarrow (2x + 3)(9x + 7) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0\ o\ 9x + 7 = 0 \Rightarrow$
  $x = -\frac{3}{2}\ o\ x = -\frac{7}{9}$.
  Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{7}{9}$.

- $x^2 - 36 = 0$
  $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 6) = 0 \Rightarrow x - 6 = 0\ o\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6\ o\ x = -6$.
  Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x = 6$ y $x = -6$.

- $4x^2 - 28x + 49 = 0$
  $4x^2 - 28x + 49 = 0 \Rightarrow (2x - 7)^2 = (2x - 7)(2x - 7) = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow$
  $x = \frac{7}{2}$.
  Por lo tanto la solución de la ecuación es $x = \frac{7}{2}$.
  Es claro que es redundante expresar dos veces la misma solución.
  Un método un poco más rápido para resolver este tipo de ecuaciones es notando que el 0 es el único número que elevado al cuadrado es cero, es decir: $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

- $(x - 1)(x + 5)(x - 4) = 0$
  Esta ecuación no es cuadrática, pero notemos que es un producto que está igualado a 0, por lo tanto uno de sus factores debe ser 0, de aquí que:
  $x - 1 = 0\ o\ x + 5 = 0\ o\ x - 4 = 0$, por lo tanto las soluciones de esta ecuación son $x = 1\ o\ x = -5\ o\ x = 4$.

Ejercicios:

1. Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos
2. En un rectángulo, la base mide el triple que la altura. Si disminuimos en 1 cm. cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm. Calcular las dimensiones y el área del rectángulo inicial.
3. Hallar tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.
4. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

4. Completar cuadrados

El método de factorización es muy rápido, pero su desventaja es que en muchas ocasiones es complicado encontrar la factorización de la ecuación. Por lo tanto es necesario conocer más métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.
La idea básica de este método es llevar una expresión del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ a otra del tipo $(Ax + B)^2 - C = 0$. En caso de que logremos lo anterior podríamos encontrar el valor de x haciendo lo siguiente:

1. Factorizamos $(Ax + B)^2 - C = 0$ como diferencia de cuadrados.
2. $\left(Ax + B - \sqrt{C}\right)\left(Ax + B + \sqrt{C}\right) = 0$. Resolvemos para x al igual que en la sección anterior.
3. $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{C}-B}{A} \\ x_2 = \frac{-\sqrt{C}-B}{A} \end{cases}$

Para lograr lo anterior contestaremos la siguiente pregunta: Si $x^2 + bx + p$ es un trinomio cuadrado perfecto, ¿cuál es el valor de p?
Si $x^2 + bx + p$ es un trinomio cuadrado perfecto, entonces $x^2 + bx + p = (x + q)^2 = x^2 + 2qx + q^2$. Los coeficientes de los dos polinomios deben ser iguales, por lo cual basta encontrar una solución para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} b = 2q \\ p = q^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $q = \frac{b}{2}$, por lo cual $p = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.
En resumen: a $x^2 + bx$ se le debe agregar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Ejemplos:

- Resolver $x^2 + 6x - 7 = 0$
  El coeficiente de x es 6. Entonces la constante que le debemos agregar a $x^2 + 6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto es l mitad de 6 al cuadrado, es decir $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$.
  Completamos el cuadrado $(x^2 + 6x + 9) - 9 - 7 = 0$
  Factorizamos el trinomio $(x + 3)^2 - 16 = 0$
  Factorizamos la expresión $(x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$
  Obtenemos dos ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases}$
  Resolvemos las ecuaciones lineales $\begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases}$

- Resuelve $x^2 + 2x + 2 = 0$. (En este ejemplo se necesitan conceptos básicos de números complejos).
  Completamos el cuadrado $x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 + 2 = 0$
  Factorizamos el trinomio $(x + 1)^2 + 1 = 0$

En este caso para factorizar como diferencia de cuadrados, expresaremos a 1 como $-i^2$: $(x+1)^2 - i^2 = 0$

Factorizamos la expresión $(x+1-i)(x+1+i) = 0$

Obtenemos dos ecuaciones lineales $\begin{cases} x+1-i=0 \\ x+1+i=0 \end{cases}$

Resolvemos las ecuaciones lineales $\begin{cases} x=-1+i \\ x=-1-i \end{cases}$

- $x^2 - 5x - 7 = 0$

  El coeficiente de x es 5. Entonces la constante que le debemos agregar a $x^2 - 5x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto es la mitad de 5 al cuadrado, es decir $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

  Completamos el cuadrado $\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 7 = 0$

  Factorizamos el trinomio $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{53}{4} = 0$

  Se Factoriza la diferencia de cuadrados $\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2}\right) = 0$

  Obtenemos dos ecuaciones lineales $\begin{cases} x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2} = 0 \\ x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2} = 0 \end{cases}$

  Resolvemos las ecuaciones lineales $\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2} \\ x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2} \end{cases}$

- Resuelve $3x^2 - 10x + 6 = 0$

  Cuando el coeficiente de x^2 no es 1, se sugiere que se divida la expresión por el coeficiente de x^2 y se proceda como en los ejemplos anteriores:

  Dividiendo entre 3 obtenemos $x^2 - \frac{10}{3} + 2 = 0$

  Completamos el cuadrado $x^2 - \frac{10}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2 = 0$

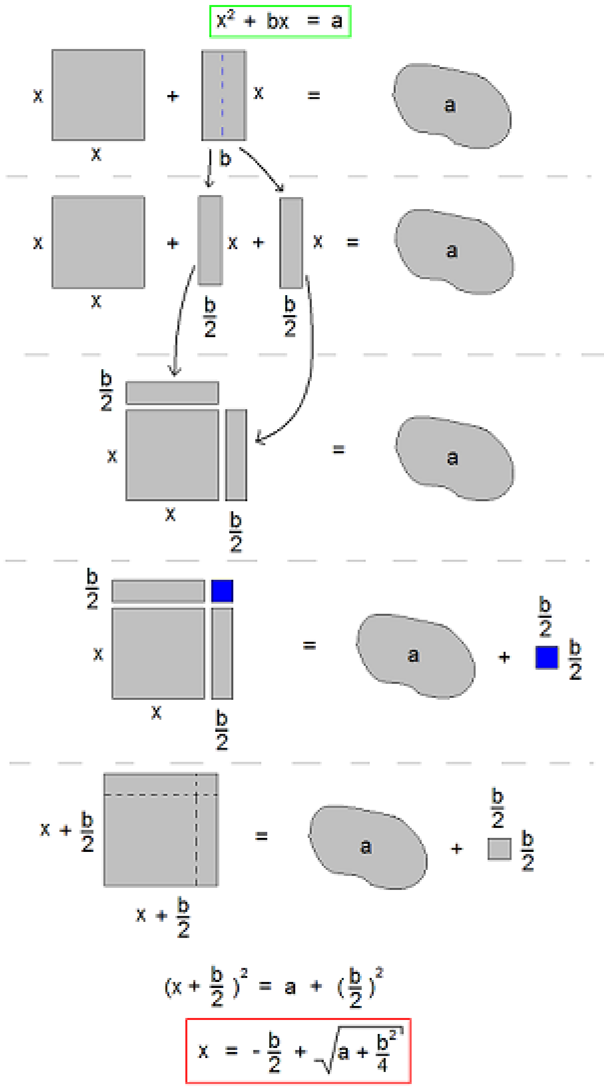
  Factorizamos el trinomio $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{7}{9} = 0$

  Factorizamos la expresión $\left(x - \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 0$

  Obtenemos dos ecuaciones lineales $\begin{cases} x - \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} = 0 \\ x - \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} = 0 \end{cases}$

  Resolvemos las ecuaciones lineales $\begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases}$

En la siguiente imagen vemos de manera geométrica como completar el cuadrado



El término x^2, está representado por un cuadrado de lado x. bx es un rectángulo con un lado b y otro x

Si dividimos el rectángulo bx en dos, podemos acomodar cada lado x en el cuadrado x^2. Cada mitad de rectángulo es $\frac{bx}{2}$

Para completar un cuadrado de lado $x + \left(\frac{b}{2}\right)$
Nos hace falta un pequeño cuadrado de lado $\left(\frac{b}{2}\right)$

Para conservar la igualdad, agregamos el cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, a cada lado de la ecuación

5. Fórmula General

Ahora deduciremos una fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado. Se llama Fórmula General para Ecuaciones de Segundo Grado o Fórmula General de Segundo Grado o simplemente Fórmula Cuadrática. La ventaja de esta fórmula es que es aplicable a todas las ecuaciones cuadráticas y es relativamente rápida de aplicar aunque en ocasiones los métodos anteriores pueden ser más fáciles y rápidos.
Los historiadores dicen que Sridhar Acharya (India, 750 d.c.) fue el primer matemático en dar la fórmula general, la deducción aquí es parecida a la que él escribió y es un método alternativo al método que se dio en la sección para completar cuadrados.

Resolveremos la ecuación	$ax^2 + bx + c = 0$
Multipliquemos ambos lados por $4a$	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
Restemos a ambos miembros $4ac$	$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
Sumemos b^2 a ambos miembros	$4a^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
Saquemos la raíz a ambos miembros	$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
Restemos b a ambos miembros	$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Dividamos entre $2a$ ambos miembros	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Así pues la fórmula para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos

- $x^2 + 5x - 24 = 0$

  $a = 1, b = 5, c = -24 \Rightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(1)(-24)}}{2(1)} = \frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{121}}{2} = \frac{-5\pm 11}{2}$

  Las soluciones son: $x = \frac{-5+11}{2} = 3, x = \frac{-5-11}{2} = -8$.
- $3x^2 - x - 4 = 0$

  $a = 3, b = -1, c = -4 \Rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(3)(-4)}}{2(3)} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6} = \frac{1\pm 7}{6}$

  Las soluciones son: $x = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}, x = \frac{1-7}{6} = -1$
- $4x^2 - 9 = 0$

  $a = 4, b = 0, c = -9 \Rightarrow x = \frac{-0\pm\sqrt{0^2-4(4)(-9)}}{2(4)} = \frac{\pm 12}{8} = \frac{\pm 3}{2}$

  Las soluciones son: $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{2}$
- $8x^2 + 3x = 0$

  $a = 8, b = 3, c = 0 \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(8)(0)}}{2(8)} = \frac{-3\pm\sqrt{9}}{16} = \frac{-3\pm 3}{16}$

  Las soluciones son: $x = \frac{-3+3}{16} = 0, x = \frac{-3-3}{16} = -\frac{3}{8}$
- $16x^2 + 72x + 81$

  $a = 16, b = 72, c = 81 \Rightarrow x = \frac{-72\pm\sqrt{72^2-4(16)(81)}}{2(16)} = \frac{-72\pm\sqrt{72^2-72^2}}{32} = \frac{-72}{32} = -\frac{9}{4}$

  Tiene una única solución $x = -\frac{9}{4}$
- $x^2 - 6x + 34 = 0$

  $a = 1, b = -6, c = 34 \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(34)}}{2(1)} = \frac{6\pm\sqrt{36-136}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{-100}}{2} = \frac{6\pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$

  Las soluciones son: $x = 3 + 5i, x = 3 - 5i$

Ejercicio:

Luz pensó un número, lo elevó al cuadrado y multiplicó el resultado por 10.
A lo obtenido le sumó tres veces el número que pensó y, al final, para su sorpresa, obtuvo 1. Se sabe que Luz realizó correctamente todas las operaciones. ¿Qué número pensó?

6. Discriminante

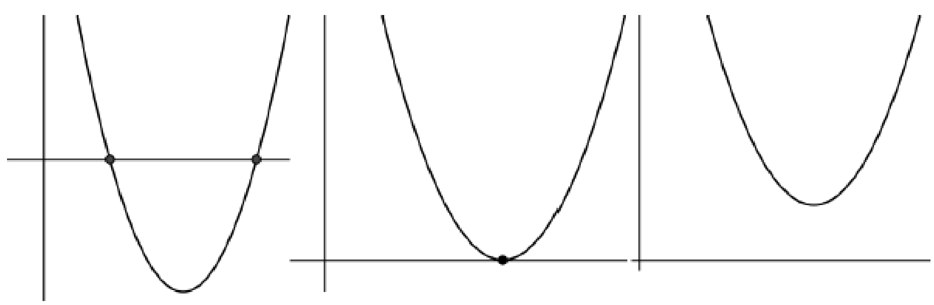
En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, a la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama **discriminante** y juega un papel importante en la solución de ecuaciones cuadráticas, como se vio en los ejemplos anteriores. Se cumple:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tendrá sólo una solución real, llamada raíz de multiplicidad 2.
- Si$b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación tendrá dos soluciones complejas y una será el conjugado de la otra.

La gráfica de una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, es una parábola. Entonces las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ representan los valores en los que la parábola interseca al eje de las abscisas (X). En este caso el discriminante se interpretaría como:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la parábola interseca en dos puntos al eje X.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la parábola interseca en un solo punto al eje X.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la parábola no interseca al eje X.

Los tres caso se grafican en la siguiente figura, suponiendo que $a > 0$. En caso de que $a < 0$ las parábolas abrirían hacia abajo.
De izquierda a derecha: $b^2 - 4ac > 0, b^2 - 4ac = 0$ y $b^2 - 4ac < 0$



7. Datos de vital importancia

1. El origen del símbolo ∞ es incierto. Se sabe que John Wallis fue el primero en usarlo, en 1655, y que se corresponde con la curva lemniscata. Sin embargo, se cree posible que venga de ciertos símbolos alquímicos o religiosos, como representaciones de la serpiente uróboros (que muerde su cola) y se ha utilizado como símbolo de santidad en ciertos contextos. https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99
2. Desde los 19 años hasta su muerte a los 67 años, Gauss escribió un diario de 19 hojas y 146 entradas crípticas sumamente cortas, considerado uno de los documentos más importantes de la historia de la matemática. https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

8. Relaciones de Cardano Vieta

Estas relaciones nos permiten conocer el polinomio, dadas las dos raíces. Es lo inverso a todo lo anterior.

Si las raíces de una ecuación de segundo grado, $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Entonces

a) Su suma es $\boldsymbol{s=x_1+x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$

b) Su producto es $\boldsymbol{p=x_1\cdot x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\boldsymbol{\frac{c}{a}}$

A estas relaciones**, p** y **s,** se les llama relaciones de **Cardano-Vieta**

c) Las relaciones de Cardano-Vieta permiten encontrar la ecuación de segundo grado conocidas sus raíces, x_1 y x_2 :

Dada $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, si dividimos los dos miembros por $\boldsymbol{a}$, nos queda:

$$\boldsymbol{x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0}$$

O lo que es lo mismo $\boldsymbol{x^2-s\cdot x+p=0}$

d) Por lo tanto, toda ecuación $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ se puede factorizar de la forma $\boldsymbol{a\cdot(x-x1)\cdot(x-x2)=0}$

Ahora, si a, b y c son las raíces del polinomio $x^3 + px^2 + qx + r$, entonces

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc$$

Por lo tanto,

$$p = -(a + b + c), \quad q = ab + bc + ac, \quad r = -abc.$$

9. Factorización de una ecuación cuadrática

Las soluciones de la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x + 3 = 0$ son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{5-1}{4} = 1, x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

A partir de estas soluciones, y como hemos estudiado, podemos factorizar el polinomio de la ecuación anterior:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Esta igualdad se puede comprobar si se opera y se simplifica.

Si se nos pide hallar dos números a y b, conocida su suma s y su producto p, podemos eliminar por ejemplo b:

$$b = s - a$$
$$p = ab = sa - a^2$$
$$a^2 - sa + p = 0.$$

Tenemos entonces que a es una de las raíces de la ecuación $x^2 - sx + p = 0$. Pero, ¿cuál? Y además, ¿qué pasa con la otra raíz?
Si procedemos de la misma forma, pero eliminando a en vez de b, obtenemos que

$$b^2 - sb + p = 0$$

Entonces, en la ecuación $x^2 - sx + p = 0$, una de las soluciones es a, y la otra es b.
La conclusión de esta manipulación es que, conocidos la suma s y el producto p de dos números, sabemos que estos dos números son las dos raíces de la ecuación $x^2 - sx + p = 0$. Si esta ecuación tiene discriminante negativo, entonces los números son complejos, o nos han intentado engañar y los valores que nos han dado de s y de p no pueden ser la suma y el producto de dos números reales.

10. Problemas

1. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?
2. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
   b. $5(x^2 + 4) = 4(x^2 + 9)$
   c. $3x^2 = 8x + 3$
   d. $16x^2 + 16x + 3 = 0$
   e. $x^2 + (a - x)^2 = (a - 2x)^2$
   f. $2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} = 2$
   g. $3^{2x} - 10(3^x) + 9 = 0$
   h. $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$. Sugerencia: Haz la sustitución $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$
3. Regocijándose los monos divididos en dos bandos: su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza; con alegres gritos, doce atronando el campo están.
4. ¿Sabes cuántos monos hay en la manada, en total?
5. Si la ecuación $3x^2 - 4x + \frac{h}{3} = 0$ tiene raíces iguales, calcula el valor de h.
6. La ecuación $3x^2 - ax + (a + 3) = 0$ tiene raíces iguales. Calcula el valor de a sabiendo que es positiva.
7. Si a, b y c son enteros, $ax^2 + bx + c = 0$, ¿puede tener discriminante 23?
8. Demuestra que si x, y son enteros diferentes de cero, $x^2 + xy - y^2 = 0$ no tiene solución.
9. (AMC 12 2005) Hay dos valores a para los cuales la ecuación $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene una sola solución para x. ¿Cuál es la suma de dichos valores de a?
10. (URSS, 1986) Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1 = 0$ son número naturales. Muestre que $a^2 + b^2$ no es un primo.
11. (Alemania, 1970) Sean p, q números reales cualesquiera, con $p \neq 0$, y a, b, c las raíces del polinomio $px^3 - px^2 + qx + q$. Muestre que $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$.
12. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$.
13. Encuentre todos los números reales a, tales que la suma de los cuadrados de los ceros de $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ es mínima.
14. Si p, q y r son las soluciones de la ecuación $x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$, encuentre el valor de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.
15. Encuentre los valores reales positivos de m, tal que $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)x + \frac{m^2-3}{2} = 0$.

11. Vídeos

Factorización
https://youtu.be/qBEigKQhmXI
https://youtu.be/oXm9s1iFSpw
https://youtu.be/KMPjSE0fPd0

Fórmula general
https://youtu.be/Wj4cHg8oHzI

Discriminante
https://youtu.be/HZ9pHowTkDE
https://youtu.be/7xPfPAOX6QE
https://youtu.be/JscoTgvFTic