Ecuaciones funcionales y no tan funcionales

Entrenamiento #7 Rumbo al Nacional
29 de Octubre al 1 de Noviembre
Por: Fernando y Argel

Resumen

Una vez visto lo que son las funciones y algunas de las principales ideas relacionadas a ellas, procedemos a las ecuaciones funcionales, un tema muy importante relacionado al álgebra y un poco diferente a otros temas que se han tratado, sin embargo les presentaremos una serie de ejemplos y estrategias que les ayudarán a familiarizarse un poco más al tema y saber que hacer al enfrentarse a una ecuación funcional. Sin más que decir ¡Let it rip!.

1. ¿Ecuaciones que funcionan?

No, no son ecuaciones que funcionan, pero tampoco están descompuestas. Vimos lo que son las funciones y sus propiedades, las cuales serán de gran utilidad en este entrenamiento. Algunos de los problemas que aparecen en las olimpiadas de matemáticas, que hacen referencia a funciones, piden encontrar todas las funciones que cumplen alguna propiedad dada o algún valor específico de alguna función. Por ejemplo:

Encuentra todas las funciones continuas f reales que cumplan

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para toda x,y.

Hay muchas soluciones para esta ecuación, de hecho, una infinidad. En particular, $f(x) = cx$ para cualquier número real c, siendo c una constante, es una solución de la ecuación anterior. Pueden comprobarlo si gustan, sustituyendo para diferentes valores de x y y. Entonces estaremos buscando funciones que cumplan la ecuaciones, pudiendo en ocasiones obtenerse una función constante, por ejemplo, $f(x) = -3$ para toda x.Primero trabajaremos con las ecuaciones funcionales de una variable y luego con las de dos variables.

2. Ecuaciones funcionales de una variable

En esta sección daremos varios ejemplos para ver la forma de resolver este tipo de problemas y señalaremos los detalles que nos pueden ayudar a encontrar información en una función.

2.1. Ejemplo 1

Si $f(x+7) = x^3 + 5x + 2$, encuentra $f(x)$.

Solución: Muchas veces en este tipo de ecuaciones funcionales simplemente ocuparemos hacer un cambio de variable. Sabemos bien que para obtener $f(k)$ simplemente debemos usar $x = k - 7$ y sustituir en la ecuación. No sería más conveniente tener la función definida para el valor que se le ingresará? Para ello, usaremos la identidad anterior. Si tomamos $n = x + 7$, obtenemos que $x = n - 7$. Sustituyendo ambos valores obtenemos que:

$$f(n) = (n-7)^2 + 5(n-7) + 2 = n^2 - 9n + 16$$

Sí, sabemos que queríamos encontrar $f(x)$, pero recordemos que tanto x como n son números cualesquiera, no son constantes, sino sirven para representar algún número, por lo que usar variables distintas no es un problema en las ecuaciones funcionales, de hecho, es una estrategia muy utilizada en otras áreas de matemáticas y las ciencias. En fin, se llega a que $f(x) = n^2 - 9x + 16$

2.2. Ejemplo 2

Si $f(\ln x) = x^2 + x + 1$, donde $x > 0$, encuentra $f(x)$:

Solución: Sea $t = lnx$, entonces $x = e^t$. Sustituyendo nos queda $f(t) = (e^t)^2 + e^t + 1$. Por lo que $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$.

Nota: En general, si tenemos $f(g(x)) = h(x)$ y $g(x)$ tiene una función inversa, entonces podemos reemplazar x por $g^{-1}(x)$ y tenemos que $f(x) = h(g^{-1}(x))$

2.3. Ejemplo 3

Encuentre las funciones que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{x}f(-x) + f(\frac{1}{x}) = x$$

para $x \neq 0$.

Solución: Cambiemos las x por $-\frac{1}{x}$. Obtenemos

$$-xf(\frac{1}{x}) + f(-x) = -\frac{1}{x}$$

Esto nos da un sistema de ecuaciones. Resolviendo por cualquier método conocido se obtiene que $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + x)$. Aplicando de nuevo la técnica de la sustitución como en ejemplos anteriores, se usa $y = \frac{1}{x}$ y se obtiene $f(y) = \frac{1}{2}(y^2 + \frac{1}{y})$.

3. Introducción a las ecuaciones funcionales de dos variables

Vimos arriba que encontrar las funciones que cumplen una ecuación implica buscar una que cumpla para todo valor del dominio. Aquí será igual, sólo que en las ecuaciones tendrás dos variables, y en casos extremos, tres o más. No es de asustarse, de hecho, el tener dos variables puede hacerte la tarea más sencilla, porque puedes lograr combinaciones interesantes y cancelar cosas. No piensen que la clásica y representa una función. Si bien, en en otras áreas podría, aquí tanto x como y son variables independientes, mientras que $f(n)$ es la variable dependiente. Se usarán varias de las propiedades de la lista anterior, sin embargo, comenzaremos de forma más amena.

3.1. Ejemplo 4

Encontremos todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(y + x) - f(y - x) = 4yx$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$

Solución: La últimas palabras en la redacción dan una idea de cómo proceder con la solución: sustituir. Las funciones que resuelven la ecuación DEBEN CUMPLIRSE PARA CUALQUIER VALOR. Por tanto, es correcto sustituir para llegar a nuestras soluciones, pues no estamos considerando casos específicos, únicamente estamos acotando la inmensa cantidad de funciones que podrían resolver la ecuación en algunos valores para obtener un pequeño grupo de funciones que cumplan para todo valor del dominio. Bueno, comencemos a resolver el problema. Si hacemos $y = x$ tenemos que

$$f(2y) - f(0) = 4y^2$$

Tenemos un valor específico en esta última relación, un f(0). A veces será necesario que lleguen al valor de esas $f(i)$ para continuar con su resolución del problema, en otras pueden dejarlo ahí como está, tal vez cambiándolo por una constante c. Si tomamos $c = f(0)$ obtenemos $f(2y) = 4y^2 + c$. ¡Miren! Obtuvimos nuestra f despejada, con una sola variable dentro y del lado derecho ninguna otra f, pero eso es una $f2y$... ¿Recuerdan que se usó en la sección anterior la técnica de cambio de variable? Apliquemos eso mismo ahora. Tomando $2y = n$, obtenemos $f(n) = n^2 + c$. Se sustituye en la ecuación original para verificar que se cumpla para todo valor de x, y. Si c tuviera que ser un valor específico, la misma sustitución en la ecuación podría servirnos para determinar la constante. Si la ecuación se cumple para cualquier valor de c, simplemente se deja como parte de la función solución.

3.2. Ejemplo 5

Encontremos todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tales que

$$f(xy) = f(\frac{x}{y})$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

En este caso si hacemos $y = x$ tenemos que $f(x^2) = f(1)$, esto tiene sentido pues la función está definida para en los reales positivos. Por otro lado, si hacemos $y = x^2$, tenemos que $f(y) = f(1)$ para todo $yin\mathbb{R}^+$. ¿Qué les da a entender esto? Piensen en la definición de función. Se supone que $f(1) = c$, con c una constante real, es decir, tiene un solo valor del rango de f, por eso es que se puede concluir que $f(y)$ es constante. Si se sustituye esta función encontrada $f(y) = c$ en la ecuación del problema, se podrá ver que se cumple. Ojo, A pesar que tenemos la definición de f usand4o y, no se debe malinterpretar el uso de esa variable, sino pensar que y es cualquier valor, es decir, también podemos escribir $f(x) = c$, $f(r) = c$, teniendo siempre expresiones equivalentes.

3.3. Ejemplo 6

(India,2010) Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen,

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Al hacer $x = y = 0$ en la ecuación se tiene que $f(0) = f(0)^2$, por lo que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, al hacer $y = 0$ en la ecuación se tiene que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero la función $f(0) = 0$ no cumple la ecuación cuando $xy \neq 0$

Entonces $f(0) = 1$. Al tomar $x = 1$ y $y = -1$, se tiene que $f(1)f(-1) = f(1-1)+(1)(-1) = f(0)-1 = 0$, luego $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$. Si $f(-1) = 0$, al tomar $y = -1$ se obtiene que $f(x-1)-x = 0$, por lo tanto, $f(x-1) = x$. De aquí es fácil continuar, simplemente se hace el cambio de variable $y = x - 1$, lo que da $f(y) = y + 1$. Si $f(1) = 0$, al tomar $y = 1$ se obtiene que $f(x+1)+x = f(x)f(1) = 0$ y entonces $f(x+1) = -x$. Ahora, al hacer $y = x+1$, se tiene $f(y) = 1 - y$. Así, las únicas soluciones son $f(x) = x + 1$ y $f(x) = 1 - x$. Es fácil comprobar que estas funciones satisfacen la ecuación funcional, de igual manera es indispensable que ustedes hagan este paso al redactar un problema, ya que puede que haya soluciones çoladas.º no verdaderas de la ecuación funcional.

3.4. Ecuaciones de Cauchy

En esta sección, introduciremos algunas ecuaciones funcionales famosas. Lo importante de esto es que podemos citarlas directamente en competencias

3.4.1. 1. Primera ecuación

Una ecuación funcional famosa es

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Tratemos de sacarle la mayor información posible. Si hacemos $y = 0$ nos lleva a que $f(x) = f(x) + f(0)$, esto es

$$f(0) = 0$$

Aprovechemos este valor que conocemos de f. Para $y = -x$, nos queda que $f(0) = f(x) + f(-x)$, es decir, $f(x) = f(-x)$, por lo que f es una función impar. Ahora, podemos enfocarnos en las $x, y \in \mathbb{R}^+$. Usando $x = y$ obtenemos que $f(2x) = 2f(x)$. Aquí hay posibilidad de encontrar un patrón y usar inducción... probemos $y = 2x$. Realizando dicha sustitución, empleando $f(2x) = 2f(x)$ y realizando un poco de simplificación, llegaremos a que $f(3x) = 3f(x)$. Podemos conjeturar que $f(nx) = nf(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Un sencillo inductivo nos permite probar lo anterior, y usando el hecho de que $f(0) = 0$ y que f es par, podemos decir que

$$f(nx) = nf(x)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos demostrado esta ecuación para los enteros, pero falta demostrarlo para los racionales. Para ello tomamos $X = \frac{m}{n}$ De esta relación es claro que $n \cdot x = m \cdot 1$, por lo tanto, $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$. Usando la relación que ya demostramos $f(nx) = nf(x)$ en ambos lados de esa igualdad, obtenemos que $nf(x) = mf(1)$, por lo tanto,

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1)$$

Ahora bien, si hacemos $c = f(1)$, por la relación anterior podemos concluir que

$$f(x) = cx$$

. Si bien, se puede demostrar que se cumple esta ecuación para los reales, por ahora se asumirá que es cierto al tener verdadera la relación para los racionales. Se puede emplear continuidad, monotonocidad o acotamiento para demostrarlo, pero se cubrirán más adelante dichos aspectos.

3.4.2. Segunda ecuación de Cauchy

Otro ejemplo clásico es la ecuación

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Si hay una a de manera que $f(a) = 0$, entonces $f(x+a) = f(x)f(a) = 0$ para todas las x, esto es, f es la función cero. Para cualquier otra solución tenemos que $f(x) \neq 0$ en todas partes; realizamos esta suposición para analizar de mejor manera esta ecuación, la cual en un principio se vio muy sencilla. Para $x = y = \frac{t}{2}$, tenemos

$$f(t) = f^2(\frac{t}{2}) > 0$$

Las soluciones que andamos buscando son positivas en todas partes. Para $y = 0$, tenemos que $f(x) = f(x)f(0)$, por lo que $f(0) = 1$ (porque ya supusimos que $f(x) \neq 0$). Entonces si hacemos $x = y$ tenemos $f(2x) = f^2(x)$, y por inducción se puede llegar a que

$$f(nx) = f^n(x)$$

Ahora pasemos con los racionales. Igual que en el ejemplo anterior, tomamos $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$. Aplicacndo la relación demostrada con inducción, tenemos de ambos lados de la ecuación ya sustituida:

$$f(nx) = f(m \cdot 1)$$

$$f^n(x) = f^m(1)$$
$$f(x) = f^{\frac{m}{n}}(1)$$
Si hacemos $f(1) = a$, entonces $f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}}$, entonces $f(x) = a^x$ para x en los racionales.

Vamos a logaritmear la función(no la sucesión) (Diana Barrios, 2015) Esta ecuación se puede resolver fácilmente para los reales aplicando logaritmo natural de ambos lados de la ecuación.

3.4.3. Tercera ecuación de Cauchy

Otra ecuación famosa es
$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$
Encontraremos las soluciones continuas de esta ecuación funcional. Si $y = 0$ pertenece al dominio de f, entonces $f(x) = 0$. Suongamos ahora que la función está definida para $x \neq 0$ para toda x. Si tomamos $x = y = 1$ en la ecuación tenemos que $f(1) = 0$. También, al considerar $x = y = -1$, se llega a que $f(-1) = 0$. Ahora al hacer $y = -1$, obtenemos $f(-x) = f(x)$ esto es la función deberá ser par y quedará determinada por su comportamiento cuando x es positivo. Pero si x, y son positivos, existen $u, v \in \mathbb{R}$ de manera que $x = e^u$, $y = e^v$, por lo que la ecuación se puede expresar como
$$f(e^u \cdot e^v) = f(e^u) + f(e^v)$$
. Si hacemos $g(u) = f(e^u)$, tenemos que $g(u + v) = g(u) + g(v)$, que es la primera ecuación de Cauchy que sabemos que se resuelve con $g(u) = cu$, con $c = g(1) = f(e)$, luego $f(x) = g(u) = f(e)logx$, para $x > 0$ y $f(x) = f(e)log|x|$ para $x \neq 0$.

3.4.4. Cuarta ecuación de Cauchy

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
Igual que en la anterior ecuación si para alguna $y \neq 0$, $f(y) = 0$, entonces f es constante. Esto se sigue de que, $f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y})f(y) = 0$. Si f nunca se anula entonces para x positivo $f(x)$ es positivo ya que $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 > 0$. Para $x = 1$, se tiene que $f(1) = (f(1))^2$, por lo que $f(1) = 1$. Como $f(x^2) = (f(x))^2$, $f(-1) = \pm 1$ y entonces al hacer $y = -1$ en la ecuación original se tiene que $f(-x) = \pm f(x)$ y entonces bastará analizar que pasa con $x > 0$, después tendremos dos opciones para extender a los reales negativos ya sea haciendo la función par o impar. Como para $x > 0$ la función f es positiva, podemos aplicar logaritmo en ambos lados de la igualdad y obtener,
$$logf(x \cdot y) = logf(x) + logf(y),$$
por lo que si consideramos a $g(x) = logf(x)$, tenemos que g satisface la segunda ecuación de Cauchy y entonces $g(x) = g(e)logx$, por lo que $f(x) = x^{g(e)} = x^{logf(e)}$. Las soluciones continuas son entonces $f(x) = 0$, $f(x) = \pm x^{logf(e)}$. Observemos que el punto $x = 0$ queda un poco fuera del análisis(cuando tomamos logaritmo), pero al final lo podemos incluir y necesariamente tiene que suceder para tener continuidad ahí que $f(0) = 0$, salvo en el caso en que $f(e) = 1$ donde tendremos la solución continua $f(x) = 1$ y la solución $f(x) = signo(x)$ que deja de ser continua en $x = 0$.

3.5. Ecuación funcional de Jensen

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Hacemos $f(0) = a$ y $y = 0$ para obtener $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)+a}{2}$. Entonces

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x+y)+a}{2}$$

entonces

$$f(x+y) = f(x)+f(y)-a.$$

Haciendo $g(x) = f(x) - a$, entonces $g(x+y) = g(x) + g(y)$, por lo que $g(x) = cx$, entonces

$$f(x) = cx + a$$

4. La inversión de las ecuaciones funcionales: La técnica de los puntos fijos

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisface
1. $f(xf(y)) = yf(x)$ para toda $x, y \in \mathbb{R}^+$
2. $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$,
encuentra $f(x)$.

Solución: Sea $y = \frac{x}{f(x)}$, esto para cancelar el $f(x)$ que tenemos del lado derecho y demostrar que la función es suprayectiva. Entonces $f(xf(\frac{x}{f(x)})) = \frac{x}{f(x)}f(x) = x$. Por lo tanto $f(x)$ es sobre, es decir, para todas las $y \in \mathbb{R}^+$ existe un $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = y$; basta con hacer $x = y(\frac{y}{f(y)})$.
Ahora, sea y tal que $f(y) = 1$. Lo podemos hacer pues f es sobre. Si hacemos $x = 1$,

$$f(1) = f(1f(y)) = yf(1)$$

de manera que $y = 1$ y $f(1) = 1$. Por otro lado, haciendo x = y, tenemos que f (xf (x)) = xf (x). Entonces xf (x) es un punto jo de la función. Vamos a demostrar dos cosas de puntos jos en esta función:
1. Si a, b son puntos fijos de f, entonces $f(ab) = f(af(b)) = bf(a) = ab$. Entonces ab también es un punto fijo.
2. Si a es un punto fijo de f, entonces $1 = f(1) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a}f(a)) = a(f(\frac{1}{a}$. Por lo que $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$, y así $\frac{1}{a}$ también es punto fijo.

Ahora, si $xf(x) > 1$, entonces $f((xf(x))^n) = (xf(x))^n$, por inducción y la propiedad 1. Pero cuando $n \to \infty$, $(xf(x))^n \to \infty$ mientras que $f((xf(x))^n) = (xf(x))^n$. Esto contradice la segunda condición del problema. Si $xf(x) < 1$, entonces por la propiedad 2. tenemos que $\frac{1}{xf(x)}$ es un punto fijo más grande que 1. Esto a su vez, contradice la segunda condición del problema. Por lo tanto, tenemos que $xf(x) = 1$. Esto signica que $f(x) = \frac{1}{x}$.
Nota: No es tan común la técnica de puntos fijos, pero suele ser útil. Como mencioné en el título, es una herramienta tipo inversión, o sea, de gran calibre, sin embargo, el entenderla y practicarla les dará una manera más de atacar ecuaciones funcionales que sean de gran complejidad. Como puede verse, se ocupa también de un poco de la realización de conjeturas para llegar a la función que cumple y poder demostrarla.

5. Recomendaciones

Algunas ideas que pueden resultar ser útiles al momento de tratar con ecuaciones funcionales se mencionan a continuación, si bien es cierto pueden ser sencillas, en los problemas es posible que se encuentren de manera disfrazada, por lo que no siempre es sencillo reconocer cuáles emplear en un momento dado.

- Substituir algunos valores especiales. Es buena idea, como primer paso el sustituir valores como $(0, 1, -1,$ etc.). Posteriormente (siempre y cuando el problema se preste a ello) es posible intentar sustituir una expresión de manera que parte de la ecuación funcional se vuelva constante. Un ejemplo es cuando aparece $x + y$ en la ecuación, es recomendable intentar $y = -x$ ya que esto puede llevar a una expresión para $f(0)$.

- Conjeturar una solución. Si se encuentra una solución y ésta es válida al sustituirla en la ecuación, uno debe hacerse la pregunta ¿qué características cumple esta función?. Muchas veces al tratar de responder esta pregunta, se puede topar con alguna propiedad de la ecuación a resolver que no se había visto antes y con ello emergen más soluciones.

- Inducción matemática. Este método consiste en usar el valor de $f(1)$ para encontrar todas las $f(n)$ cuando n es un entero. Esto se puede extender a encontrar $f(\frac{1}{n})$ y después a $f(q)$ para un racional q. Si el dominio de la función está definido en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{Q}$, este método es particularmente útil. Sin embargo, aunque la función esté definida para todos los reales, es conveniente intentar esto en algún momento.

- Usar la paridad de una función para extender las soluciones hacia las x negativas (o positivas si es el caso). Generalmente si se planea usar inducción, es una buena idea usar estas propiedades, ya que la inducción sólo es válida para enteros positivos. Si se te pide encontrar las funciones que cumplan para valores tanto positivos como negativos, la inducción por si sola no será el fundamento suficiente para demostrar que las soluciones que encontraste cumplen las condiciones del problema, aunque sepas que sí las cumplen.

- Sustituciones. Anteriomente se había discutido la utilidad de sustituciones por valores específicos, sin embargo, en otras ocasiones interesan sustituciones más generales,ejemplos son $\frac{1}{x}, x+1, x+y, x-y$

- Simetría en las variables. Si la ecuación se encuentra en dos o más variables , por ejemplo x, y , se trata de sustituir la y por la x (y viceversa), buscando siempre la simetría en las variables.

- Propiedades de funciones. Mostrar que las funciones deben satisfacer alguna propiedad: monotonicidad, paridad, conmutatividad, ver si son aditivas o mutiplicativas, etc. Alguna de estas propiedades puede ser clave para determinar la solución general de la ecuación.

- Ecuaciones de Cauchy. Reducir el problema a las ecuaciones de Cauchy, esto es útil ya que de éstas ya conocemos las soluciones.

- Puntos fijos. Buscar puntos fijos(puntos donde $f(x)=x$) o ceros de la función. La cantidad de problemas que usan este método es considerablemente menor a lo que requieren alguna de las otras estrategias. Este método se puede encontrar en problemas más difíciles.

- Suponer que la función en algún punto es mayor o menor que el valor de la función que queremos probar que es la solución. Usualmente es una continuación del método de inducción matemática y puede llegar a usarse en problemas en los que el rango está acotado por ambos lados.

- Usar relaciones de recurrencia. Este método se usa en ecuaciones en las cuales el rango está acotado y en el caso en el que podamos encontrar relacionaes entre $f(f(n))$, $f(n)$ y n.

- Bases. En ecuaciones funcionales donde los números naturales estén presentes, puede ayudar el trabajar con sistemas de numeración en otras bases diferentes de 10, como lo son el sistema binario o el sistema de numeración en base 3 son de los más frecuentes.

- Analizar el conjunto de valores para los cuales, la función es igual a la solución que suponemos.

- Nunca está de más, una vez encontradas las soluciones al problema verificar que estas cumplan las condiciones dadas.

6. Agregados culturales

1. El tema de las ecuaciones funcionales es relativamente nuevo en los entrenamientos de la OMMBC, y es mi favorito.

2. Como se pueden dar cuenta a veces es buena idea logaritmear funciones (al parecer sucesiones también)

3. Spooky scary skeletons
4. Argel, al no saber que nombre ponerle a los personajes de una obra que tenía que escribir de tarea, nombró a todos personajes en relación a algún matemático, Gauss y Muirhead como ejemplos notables, sorprendentemente no hubo ningún Ptolomeo.
5. La Feria Internacional del Libro en Guadalajara en su edición 2015 ocurrirá entre el 28 de Noviembre y el 6 de Diciembre.
6. En el nacional pasado, OMM 2014 Toluca, se mencionaron a dos personas de la delegación Baja California en Regla y Compás. Una de esas personas fue Lupita Galindo, entrenadora de Mexicali, acusada de haberle estropeado los trucos al mago que se presentó en ese nacional.

7. Ejercicios

1. Resuelva la ecuación funcional $f(x+2) = x^2 + 4x + 6$
2. Si $3f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 4x$, encuentra $f(x)$.
3. Si $af(x-1) + bf(1-x) = cx$ donde a, b, c son constantes, encuentra $f(x)$.
4. Resuelva la ecuación funcional $xf(x) + 2xf(-x) = -1$.
5. Encuentre todas las funciones continuas para $x > 0$ tales que
$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$
6. Encuentre todas las funciones continuas f tales que
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

8. Problemas parte 1

Estos son los problemas más comunes, que no ocupan usar las ecuaciones de Cauchy, puntos fijos, inyectividad, suprayectividad o biyectividad, aunque el usarlos les puede hacer más fácil la resolución de los problemas. La sección 2 aborda problemas más difíciles en los que podrían usar lo mencionado anteriormente. ¡Éxito!

1. Encuentre todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy^2 + x^3$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Encuentra todas las funciones f que están definidas para todos los $x, y \in \mathbb{R}$ para cualesquiera x, y satisface que
$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$
3. Encuentra todas las soluciones reales, no la función cero, con la propiedad
$$f(x)f(y) = f(x-y)$$
para todas x, y.

4. Encuentre todas las soluciones f que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = x$$

para toda $x \neq 0, 1$.

5. Encuentre las funciones f definidas en todos los números reales y tomando valores reales de tal manera que

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x)$$

, para todos los números reales x, y

6. Si $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ encuentra $f(x)$.

7. La función f es periódica, si, para un número fijo a y cualquier x,

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

8. Encuentre todos los polinomios que satisfacen $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$

9. Encuentre todas las funciones f con la propiedad $f(x) = f(\frac{x}{2})$. para toda $x \in \mathbb{R}$

10. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+t) + f(t+x) + f(x+z) + f(y+t) \geq f(x - 3y + 5z + 7t)$$

para todas las $x, y, z, t \in Q$.

11. Encuentra todas las funciones reales, no la función cero, con la propiedad $f(x)f(y) = f(x-y)$ para todas x, y.

12. Encuentra una función f definida para $x > 0$, de manera que $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

13. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ tales que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + 2f(y)]$$

14. Encuentre todas las soluciones domadas de $f^2(x) = f(x+y)f(x-y)$ Note la semejanza con el problema anterior.

15. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$

16. Encuentra todas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(x+y) - f(x-y) = 2f(x)$

17. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfagan

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

18. Encuentra todas las funciones continuas en 0 que satisfacen la relación

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

19. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfagan

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

20. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfagan

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$$

9. Problemas parte 2

1. Sea $f(n)$ una función en el conjunto de todos los enteros positivos y con su imagen en el mismo conjunto. Pruebe que si $f(n+1) > f(f(n))$ para cada entero positivo n, entonces $f(n) = n$ para toda n.
2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$
3. (India, 2015) Encuentre todas las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$$
4. Sea k un entero. Determine todas las funciones $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$ y
$$f(x^k y^k) = xyf(x)f(y)$$
para $x, y \neq 0$
5. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función que satisface $f(0) \neq 0$, $f(1) = 0$ y
   a) $f(xy) + f(x)f(y) = f(x) + f(y)$
   b) $(f(x-y) - f(0))f(x)f(y) = 0$

   para todas las $x, y \in \mathbb{Z}$, simultáneamente.
   a) Encuentre el conjunto de todos los posibles valores de la función f
   b) Si $f(10) \neq 0$ and $f(2) = 0$, encuentre el conjunto de todos los enteros n tales que $f(n) \neq 0$
6. (Lechona,2013) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$.
7. (APMO,2011) Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas superiormente que satisfacen que
$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$$
8. (IMO,1982) La función $f(n)$ está definida para todos los enteros positivos n y toma valores enteros no negativos. También, para todas m, n
$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ } o \text{ } 1$$
$$f(2) = 0, \quad f(3) > 0, \quad f(9999) = 3333$$
Determina $f(1982)$
9. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(1) = 2$ y $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$
10. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $x + f(x) = f(f(x))$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $f(f(x)) = 0$.
11. (Bielorrusia,1997) Encuentra todas las funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales arbitrarios x, y :
$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$
12. Encuentre todas las funciones $f : N \to N$ para las cuales $f(1) = 1$, $f(2n) < 6f(n)$ y
$$3f(n)f(2n+1) = f(2n)(3f(n)+1)$$

13. Determine todas las funciones reales $f(x)$ continuas definidas en el intervalo $(1, -1)$ y que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

para $x+y, x, y \in (-1, 1)$

14. (EGMO, 2014) Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la condición

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

15. (IMO 2000, lista corta) Encuentra todos los pares de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera dos números reales x, y la siguiente relación se cumple:

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$