Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 23 de octubre del 2022

Ejes radicales

Alfredo Hernández Estrada

Como vimos, la potencia de un punto nos sirve para encontrar cuadrilateros ciclicos y encontrar relaciones de segmentos de manera mas facíl, pero ninguna de estas cosas es propia de la potencia de un punto por lo que puede parecer no muy util. En este capitulo nos concentraremos una de las utilidades puramenente derivadas de la potencia de un punto. Empezaremos definiendo que es el eje radical.

Definición 0.1 *Dadas dos circunferencias consideraremos el conjunto de puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas. A este conjunto se le denomina* ***eje radical****.*

La simple definición puede no ayudarnos a entender la utilidad de esta construcción geométrica, para lo que necesitaremos los siguientes resultados. Antes de el primer resultado, demostraremos un lema de perpendicularidad, que por lo general es muy utíl cuando queremos probar la perpendicularidad de dos objetos.

Lema*(De Perpendicularidad). Dado un segmento AB, y dos puntos distintos C y D fuera de este, entonces CD es perpendicular a AB si y solo sí*

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2.$$

Demostración:

00 ($\Rightarrow$)Sea H el punto de intersección de AB y CD, si suponemos primero que efectivamente se cumple la perpendicularidad, el resultado se sigue de aplicar el Teorema de Pitágoras en los triángulos ACH, CHB, ADH y DHB.

($\Leftarrow$)Ahora, supongamos primero que se cumple la igualdad, y sea H_1 el pie de la perpendicular desde C a a AB y H_2 el pie de la perpendicular de D a AB.

De nuevo por pitagoras podemos llegar a que

$$CA^2 - CB^2 = AH_1^2 - H_1B^2$$
$$DA^2 - DB^2 = AH_2^2 - H_2B^2,$$

con lo que tenemos entonces que

$$AH_1^2 - H_1B^2 = AH_2^2 - H_2B^2,$$

lo cual solo es posible si $H_1 = H_2$.

■

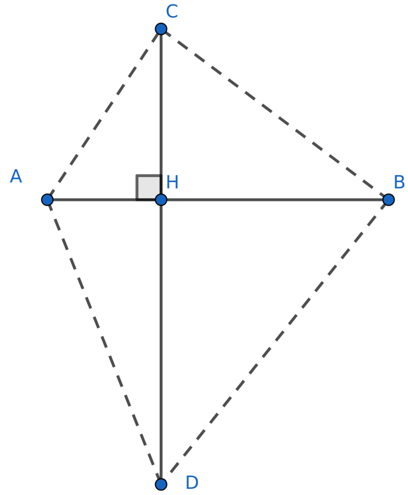
Ahora, nuestro primer resultado sobre los ejes radicales es el siguiente.

Teorema 0.1 *El eje radical de dos circunferencias no con-cíclicas, siempre es una recta perpendicular a la unión de los centros de las circunferencias.*

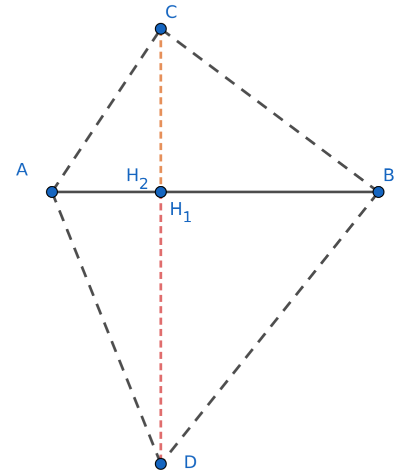
Demostración:

Para esto, supongamos que P es un punto sobre el eje radical, entonces este es tal que

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$$



(a) Figura $\Rightarrow$



(b) Figura $\Leftarrow$

con lo que

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

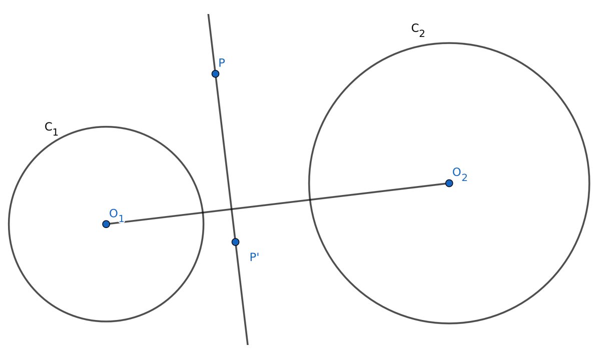
esto para todo P sobre el eje radical, por lo que en especial, para cualquier otro punto P' sobre el eje radical, se va a cumplir que

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = P'O_1^2 - P'O_2^2,$$

y dado que

$$PO_1^2 - PO_2^2 = P'O_1^2 - P'O_2^2,$$

entonces PP' es perpendicular a O_1O_2, por lo que todos los P' en el eje radical, pertenecen a la perpendículos a O_1O_2 desde P, la cual sabemos es una recta. ■



Ahora, si bien excluimos el caso en el que ambos círculos comparten su centro, el siguiente resultado nos ayudara a entender el motivo de esto.

Teorema 0.2 *Sean C_1, C_2 y C_3 tres círculos, se cumple entonces que los tres ejes radicales por parejas concurren.*

Demostración:

Sea O el punto de intersección del eje radical de C_1 y C_2 con el eje radical de C_2 y C_3, por definición, el primer eje sabemos que la potencia desde a C_1 y a C_2 es igual, pero el segundo eje nos dice que la potencia desde O a C_2 y C_3 también es igual, con lo que

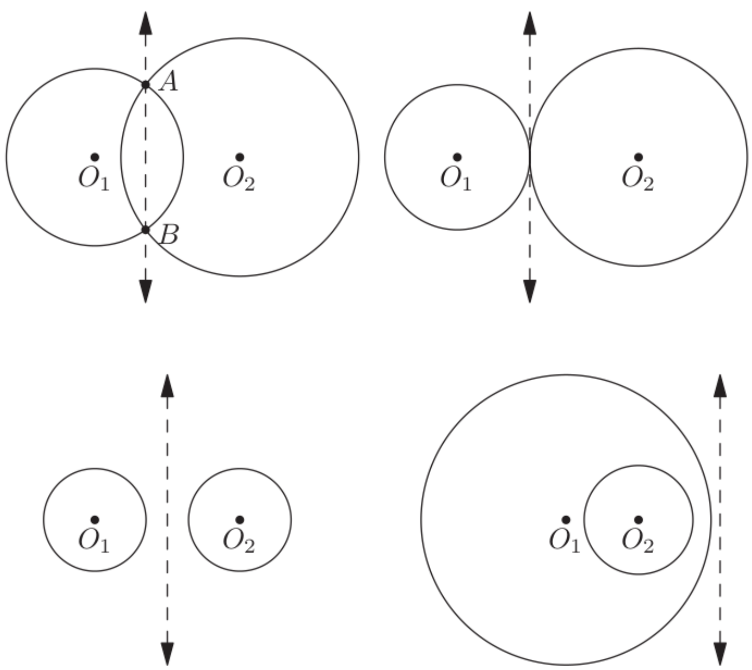
$$Pow_{C_1}(P) = Pow_{C_2}(P) = Pow_{C_3}(P)$$

y por lo tanto $Pow_{C_1}(P) = Pow_{C_3}(P)$, con lo que P esta también en el eje radical de C_1 y C_3. ■

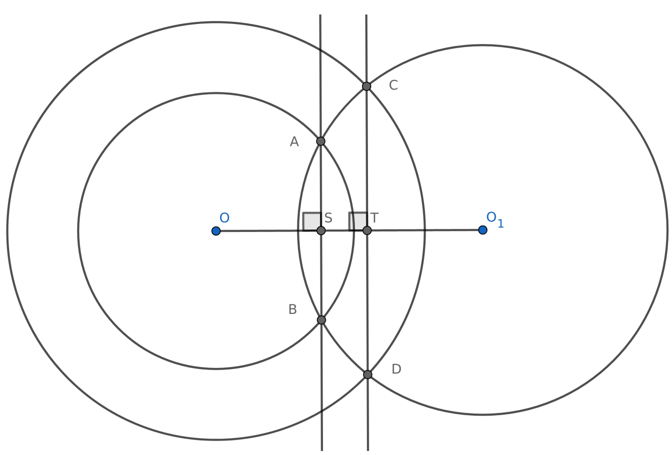
Gracias a este resultado, que puede parecer un tanto simple, en muchas ocasiones se nos permitirá encontrar fácilmente concurrencias de rectas y aplicar potencia a diferentes circunferencias de las que conocemos el eje radical. En general para referirnos a este punto de intersección utilizamos la siguiente definición.

Definición 0.2 *El punto de intersección de los tres ejes radicales por parejas de tres circunferencias lo llamaremos* ***centro radical*** *de las circunferencias.*

Si bien en ningún punto hemos discutido como se ve en realidad el eje radical, pues solo demostramos que es perpendicular a la unión de los centros, la siguiente imagen muestra los diferentes casos, y la posición del eje radical respecto a las circunferencias.



En el caso de las circunferencias concentricas, consideremos entonces la siguiente figura



En este caso la, los ejes radicales sabemos deben concurrir, pero los ejes radicales con la circunferencia auxiliar son ambos paralelos, ya que ambos deben ser perpendiculares a OO_1, por lo que no se intersectan, y por lo tanto no tiene sentido hablar del eje radical de las circunferencias concéntricas.

1. Problemas

1. *Dos circulos* P *y* Q *se intersecan en* X *y* Y*. El punto* A *localizado en la recta* XY *es tal que* $AP = 10y$ $AQ = 12$*. Si el radio de* Q *es* 7*, encuentra el radio de* P*.*

2. *Sea* $\triangle ABC$ *un triangulo acutángulo. Los puntos* M *y* N *son tomados sobre los lados* AB *y* AC*, respectivamente. Los círculos con diámetros* BN *y* CN *se intersecan en los puntos* P *y* Q*, demuestra que* P*,, * Q *y el ortocentro* H *son colineales.*

3. *Demuestra que las altruras de un triangulo son concurrentes.*

4. *En un triangulo* ABC *con lados de medidas* $AB = 187$ *y* $BC = 199$*, sea* ω_A *el circulo con centro en* A *que pasa por* B*,* ω_B *el circulo con centro en* B *que pasa por* C *y* ω_C *el circulo con centro* C *y que pasa por* A*. Suponga que* ω_A *y* ω_B *se intersecan en* D *y* E*,* ω_A *y* ω_C *se intersecan en* F *y* G*. Si* DE *y* FG *se intersecan en* K*, ¿Cual es el valor de* $KB^2 - KA^2$*?*

5. *Sean* A*,* B *y* C *puntos sobre una circunferencia, y sea* D *el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia en* A *y* B*. Si* DC *interseca de nuevo a la circunferencia en* E *y* $AB = BC$*, demuestra que* AE *biseca a* BD*.*