

Estrategias en combinatoria

Material introductorio - OMM

Febrero de 2017

Por: A. Favela

1. Introducción

La combinatoria es el área que se encarga de estudiar las maneras de contar algo o las diferentes combinaciones que existen en algunos conjuntos. Incluye temas como: el principio básico de conteo, combinaciones, permutaciones, separadores, coloración, teorema de casillas, entre otros temas. A menudo encontrarás problemas que requieren que hagas cuentas, aunque normalmente hay maneras de hacerlas mucho más sencillas y facilitarte la vida. Y nuestra chamba es enseñarte todos estos ~~caminos oscuros~~ atajos para que seas rápido y efectivo a la hora de resolver problemas, como lo son el colorear un tablero con dos colores o el acomodar las cuentas de cierta manera. Lo único que necesitas saber son sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y cómo contar, además de mucha creatividad y pensamiento matemático. ¿Estás listo? Entonces, ¡empecemos!

2. Principios Multiplicativo y Aditivo

Lo más importante es que aprendas a contar. Y para poder contar distintos casos que te pudiéramos pedir, es necesario que distingas entre dos situaciones.

Hay ocasiones en que se te pide que tus casos cumplan cierta sucesión de cosas. Por ejemplo, que cuentes todos los posibles resultados de tirar un dado y una moneda. Claramente para la moneda hay 2 opciones (Cara y águila) y para el dado hay 6 opciones (1,2,3,4,5,6). En este caso es importante que observes que para cada caso de la moneda, puedo tener 6 posibilidades del dado que lo acompañen. Y esto denota una multiplicación, tal que todos los casos son $(6)(2) = 12$. Si no me crees, haz un diagrama de árbol y compruébalo. A esto se le llama principio multiplicativo

También hay veces en que te va a ser útil separar en ciertos casos, y para poder calcularlos todos, tienes que sumar el total de maneras de cada caso. Esto tiene sentido, ¿no? Por ejemplo: Cuando quiero contar los números de dos cifras que son iguales o que el primero es impar y el segundo par. Para esto, podemos separar los dos casos que nos menciona el problema y calcular cada total de maneras por separado. A esto se le llama principio aditivo. Es importante que notes que el principio aditivo se encarga de sumar diferentes casos que van a formar parte de la misma cuenta, mientras que el principio multiplicativo se encarga de hacer una cuenta en sucesión. Hagamos unos cuantos problemas para practicar.

1. ¿De cuántos modos se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra comida?
2. Se quiere hacer un collar con 5 perlas negras, 4 perlas blancas y un diamante. ¿Cuántos collares distintos pueden hacerse?
3. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas numeradas del 1 al 5?
4. De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite un museo de una lista de 3 museos. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?
5. ¿De cuántas formas se puede elegir un grupo de 3 personas entre un grupo total de 6? ¿Y de un grupo total de 10?

3. Dividir en grupos o casos

A veces los grupos de casos en los que hay que separar una cuenta para poder contarlos no están mencionados en el problema, o no son muy intuitivos, o muy necesarios, pero te permiten asegurar que la cuenta está bien hecha. De esta manera separas en casos y puedes contar de manera un poco más ordenada para terminar sumando los totales de cada caso.

Pero, ¿cómo contar en orden? Tienes que tener un cierto orden para poder asegurar que estás cubriendo todos los casos y no contar cosas de más tampoco. Esto será más claro con los problemas en los ejercicios. Aquí te recomiendo que busques contar con ese orden.

1. Dos sociedades deportivas tienen 20 esgrimistas cada una. Si hay que elegir a 3 de entre las dos sociedades, ¿de cuántas maneras pueden elegirse esos 3 esgrimistas?
2. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 números, entre el 1 y el 100, tal que la suma sea par?
3. En una reunión deben intervenir 5 personas: A , B , C , D y E .
 - a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores, con la condición de que B no debe intervenir antes que A ?
 - b) Lo mismo, pero con la condición de que A debe intervenir inmediatamente antes que B .

En ocasiones es más fácil contar lo que no quiero a contar lo que sí quiero. Y para esto sólo hay que calcular el total de casos y restarle lo que no quiero. Veamos los siguientes problemas donde puedes aplicar esto.

4. ¿Cuántos números de 6 cifras existen, tal que al menos una de sus cifras sea par?
5. ¿Cuántos números de 10 cifras existen tal que al menos una de sus cifras se repite?

4. Juegos

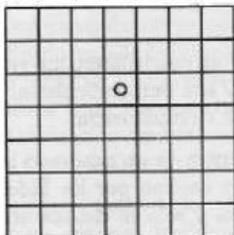
Una de las ramas de la combinatoria en las matemáticas es la Teoría de Juegos. En esta se te presenta un juego o una situación entre dos jugadores que normalmente juegan por turnos buscando ganar o hacer perder al otro. La idea de los problemas es que encuentres una serie de movimientos o de jugadas que le permitan a alguno de los jugadores asegurar su victoria. En ocasiones el juego está diseñado para que sin importar la situación o lo que pase, por las condiciones del problema, siempre gana el mismo jugador (El primero en empezar o el segundo). Y hay otras ocasiones en donde alguno de los dos jugadores puede obtener el control del juego y que sin importar lo que el otro haga, puede hacer un contra-movimiento que le regrese el control. Para esta situación es muy útil pensar al revés y considerar todas las posiciones ganadoras y cómo llegar a ellas.

1. Hay dos pilas con piedras. Una tiene 30 piedras y la otra 20. Dos jugadores por turnos quitan tantas piedras como quieran de alguna de las pilas. Gana el jugador que quita la última piedra. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
2. En un tablero de ajedrez, un rey se encuentra en la casilla inferior izquierda. Dos jugadores se turnan moviendo al rey una casilla, ya sea hacia la derecha, hacia arriba o diagonalmente (derecha y arriba). El jugador que logre colocar al rey en la casilla superior derecha del tablero gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
3. Dos jugadores por turnos ponen monedas del mismo tamaño en una mesa redonda sin poner alguna moneda sobre otra. El que no pueda hacer esto pierde. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
4. En una mesa hay 21 papitas. Dos jugadores por turnos se comen 1, 2 ó 3 papitas de la mesa. El jugador que se coma la última papita gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
5. Se inicia con el número 0. En cada turno, un jugador puede sumar al número actual cualquier entero desde el 1 hasta el 9. El jugador que llegue a 100 gana. Determina quién ganará.

5. Colorear tableros

Hay algunos problemas que mencionan tableros ya sea para un juego o para poner alguna condición, fichas, números, o alguna cosa así. Y en ocasiones una de las maneras de atacar esos problemas es colorear el tablero de alguna manera en específico. Normalmente es muy útil colorear de ajedrez, es decir, alternando dos colores entre las casillas. Y ya con esto, puedes observar qué pasa con las fichas o números de acuerdo a los colores en los que están colocados. Definitivamente son casos donde tienes que observar cosas y es por eso que necesitarás toda tu atención para resolver los siguientes problemas.

1. A un tablero de 8×8 se le han quitado dos esquinas contrarias. Se puede cubrir ese tablero con fichas de 2×1 ?
2. Se tiene un círculo dividido en 6 sectores iguales y se escriben los números 1, 0, 1, 0, 0, 0 uno en cada sección de manera ordenada. Si un movimiento consiste en sumar o restar 1 a dos secciones adyacentes ¿se puede llegar, después de una cantidad finita de movimientos, a tener todas las secciones del círculo con un mismo número?
3. En un salón de clase están sentados los alumnos formando un arreglo rectangular de 5×7 . La maestra que quiere hacer una dinámica, les pide a todos los alumnos que intercambien de lugar con un compañero vecino, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o atrás de su lugar, Pepito que sabe de matemáticas, le dice a la maestra que esto es imposible ¿Por qué tiene razón Pepito?
4. La figura muestra un laberinto cuadrado de ratón con 49 cuartos. Dos cuartos vecinos (que comparten una pared) están conectados con una puerta. Los cuartos están diseñados de tal manera que cuando el ratón sale de uno de ellos las puertas se cierra automáticamente sin permitir que el ratón pueda entrar de nuevo. Podría el ratón recorrer todos los cuartos si empieza en el cuarto marcado?



5. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera. Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito, el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (no en diagonal). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esa manera?