Estrategias numéricas

Material introductorio - OMM
Febrero de 2017
Por: A. Favela

1. Introducción

La teoría de números es el área que se encarga de estudiar las propiedades de números enteros. Incluye temas como: el teorema fundamental de la aritmética, números primos y compuestos, divisibilidad, residuos y módulos. A menudo encontrarás problemas que requieren que hagas cuentas, aunque normalmente hay maneras de hacerlas mucho más sencillas y facilitarte la vida. Y nuestra chamba es enseñarte todos estos ~~caminos oscuros~~ atajos para que seas rápido y efectivo a la hora de resolver problemas. Lo único que necesitas saber son sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y un poco de exponentes, además de mucha creatividad y pensamiento matemático. ¿Estás listo? Entonces, ¡empecemos!

2. Forzando operaciones

Seguido te encontrarás con problemas donde va a ser necesario encontrar un número tal que al multiplicarlo o sumarlo con otro te de alguna condición especial. Aquí es muy útil que hagas las operaciones en vertical como te lo han enseñado en la escuela y que veas qué números necesitas para obtener un resultado específico.

1. Un número se dice *capicúa* si se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo: 1221, 838. Encuentra el menor entero que le tienes que sumar a 25973 para que el resultado sea un número *capicúa*.

2. Encuentra el menor número que al multiplicar por 7, el resultado es un número que termina en 216. (Es decir, que sus últimos tres dígitos sean 2, 1, 6, en ese orden.)

3. Encuentra un número que termine en 6 y tal que si le quitas ese último dígito (el 6) y lo colocas en el principio (por ejemplo el 126 pasaría a ser 612), el nuevo número es 4 veces el número original.

4. El número de cinco dígitos distintos $2abcd$ cumple que $2abcd \times 4 = dcba2$. (Los dígitos son $2,a,b,c,d$) Además, sabemos que $2abcd$ es múltiplo de 72. Encuentra el número.

5. Se forman tres números enteros de tres cifras abc,def,ghi, donde cada letra representa un dígito del 1 al 9 sin que se repitan. Si la suma de los tres números termina en 65 ¿cuál es el valor de dicha suma?

3. Sumatoria de Gauss

La sumatoria de Gauss es muy útil por lo que significa y por la versatilidad de su demostración. La suma de Gauss nos permite encontrar la suma de los primeros n números. Antes de que empieces, te invito a que encuentres una manera fácil de obtener la suma de todos los números del 1 al 100 sin tener que calcular todas las sumas.

1. En una fiesta, el anfitrión recibe a 100 invitados que van llegando de uno por uno. Si cada invitado saluda al anfitrión y a todos los otros invitados que llegaron antes que él, cuántos saludos hubo? (Ninguna pareja de personas se saludó más de una vez)

2. Calcula la suma $3 + 6 + 9 + ... + 300$.

3. Alfredo leyó un libro. El primer día leyó 5 páginas, y cada día siguiente leyó 2 páginas más que el anterior. Si la lectura le llevó un total de 20 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

4. Encuentra la suma de todos los números de cinco cifras en los que los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 aparecen exactamente una vez.

5. Sea P la suma de todos los números pares positivos menores que 1999 y sea I la suma de todos los números impares positivos menores o iguales que 1999 ¿Cuál es el valor de $I - P$?

4. Series y ciclos

Algunas veces te pedirán encontrar algún término de una serie. Para lo cual es muy importante que identifiques qué relación numérica está expresada en la serie.
En otras ocasiones se les pide a los alumnos encontrar el último dígito de alguna expresión o de una operación muy grande. Generalmente esas expresiones tienen algún ciclo y es muy sencillo encontrar lo que se pide.
Finalmente, hay ocasiones en que se te pide encontrar algún término en una serie, que se cicla cada ciertos términos. Para esto es bueno que siempre intentes encontrar algunos términos iniciales.

1. Encuentra el último dígito de 44^{4444}

2. Encuentra los últimos dos dígitos de 3^{1234}.

3. Fátima escribe los números pares en una fila: 2468101214... ¿Qué dígito está en la posición 2016? ¿A qué número corresponde? Por ejemplo, en la posición 8 hay un dígito 2 que corresponde al número 12.

4. (1) $(2,3)$ $(4,5,6)$ $(7,8,9,10)$ $(11,12,13,14,15)$... ¿Cuántos números tiene el paréntesis que contiene al número 2017?

5. El abuelo repartirá 2007 monedas entre sus nueve nietos (podemos llamarlos A, B, C, D, E, F, G, H e I) de la siguiente manera: los sienta alrededor de una mesa en el orden de sus nombres y va entregando en ese mismo orden una moneda a cada uno, empieza con A; al completar la vuelta, la siguiente vuelta comienza con el último; es decir, le entrega una más a I y continúa con A, entregando moneda por moneda; termina la siguiente vuelta con H, le entrega su moneda y con él mismo inicia la siguiente vuelta. Procede de esta manera hasta haber repartido todas las monedas. ¿Cuántas monedas le quedan a cada nieto? ¿A qué nieto le entregó la última moneda?

5. Divisibilidad

Comúnmente te encontrarás con problemas que te preguntan si un número divide a otro, o que una de las condiciones del problema es que un número sea divisible entre otros cuantos. El revisar la divisibilidad de los números te permitirá hacer estos. Te servirá mucho conocer los criterios de divisibilidad de diferentes números, que te presentamos aquí:

- **Criterio de divisibilidad de 2**: Que su último dígito sea divisible entre 2 (es decir, que sea par).
  Ejemplo: 3574 es divisible entre 2 porque 4 es divisible entre 2.

- **Criterio de divisibilidad de 3**: Que la suma de sus dígitos sea divisible entre 3.
  Ejemplo: 2451 es divisible entre 3 porque $2 + 4 + 5 + 1 = 12$ es divisible entre 3.

- **Criterio de divisibilidad de 4**: Que el número formado por sus últimos dos dígitos sea divisible entre 4.
  Ejemplo: 5712 es divisible entre 4 porque 12 es divisible entre 4.

- **Criterio de divisibilidad de 5**: Que su último dígito sea 5 o 0.
  Ejemplo: 1345 es divisible entre 5 porque termina en 5.

- **Criterio de divisibilidad de 6**: Que su último dígito sea par y que la suma de sus dígitos sea divisible entre 3. (Que cumpla el criterio del 2 y el criterio del 3).
  Ejemplo: 4152 es divisible entre 6 porque termina en 2 y porque $4 + 1 + 5 + 2 = 12$ es divisible entre 3.
- **Criterio de divisibilidad de 8**: Que el número formado por sus últimos tres dígitos sea divisible entre 8.
  Ejemplo: 5312 es divisible entre 8 porque 312 es divisible entre 8.
- **Criterio de divisibilidad de 9**: Que la suma de sus dígitos sea divisible entre 9.
  Ejemplo: 6453 es divisible entre 9 porque $6 + 4 + 5 + 3 = 18$ es divisible entre 9.
- **Criterio de divisibilidad de 11**: Que la suma de los dígitos en las posiciones pares menos la suma de los dígitos en las posiciones impares sea 0 o múltiplo de 11.
  Ejemplo: 2739 es divisible entre 11 porque $(2 + 3) - (7 + 9) = -11$

Ahora te presentamos los problemas. Intenta utilizar los criterios de divisibilidad al resolverlos.

1. ¿Es cierto que si un número natural es divisible por 4 y por 3, entonces es divisible por $4 \times 3 = 12$?
2. ¿Es cierto que si un número natural es divisible por 4 y por 6, entonces es divisible por $4 \times 6 = 24$?
3. Para que un número de 7 cifras: $6a74b14$ sea múltiplo de 9 y de 11, ¿cómo deben ser a y b?
4. De los números del 1 al 9, el único que no divide a 2016 es el 5. Si reordenas los dígitos del 2016 puedes obtener un nímero que, de los números del 1 al 9, únicamente no es divisible entre 7. ¿Cuál es ese número?
5. Encuentra el menor número a que cumple que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ es un número con todas sus cifras iguales