Material extra: Excentros

05-11 de Marzo de 2016

Por: Clemente

Resumen

Bien, si estás leyendo esto significa que has terminado la lista completa de angulitos! Como eres muy diestro en el arte de la geometría ahí te van problemas de excentros. Nota: el salto de dificultad es muuuu amplio.

1. Definición: excentro

La bisectriz interior de A, y las bisectrices exteriores de B, C se cortan en un punto I_A. Este punto se llama excentro opuesto a A. De manera análoga se definen los excentros opuestos a B y a C.

2. A darle!

1. Demuestra que existe un círculo con centro en I_A que es tangente a BC, AB, AC. A este círculo se le conoce como excírculo opuesto a A.

2. Sea P el punto de tangencia del incírculo de ABC en BC. Sea P_A el punto donde el excírculo opuesto a A toca a BC. Demuestra que PA es la reflexión de P respecto al punto medio de BC. Concluye que
$$AB + BP_A = P_AC + CA$$
lo que significa que P_A parte a la línea quebrada AB, BC, CA a la mitad.

3. Demuestra que el excírculo opuesto a A toca a los rayos AB, AC en puntos cuya distancia desde A es el semiperímetro de ABC.

4. Sea P' el punto en el incírculo de ABC tal que PP' es un diámetro del incírculo. Demuestra que A, P', P_A son colineales.

5. Demuestra que I_A, C, I_B son colineales. De la misma manera, que I_B, A, I_C son colineales, y I_C, B, I_A son colineales.

6. Demuestra que I_AP_A, I_BP_B , I_CP_C concurren en un mismo punto. Demuestra que este punto de concurrencia es el circuncentro del triángulo $I_AI_BI_C$.

7. Demuestra que I es el ortocentro de $I_AI_BI_C$.

8. Sea J' el punto donde la bisectriz exterior de A corta a la línea BC. Demuestra que
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BJ'}{J'C}$$
¿A qué fórmula se parece? ¿Puedes encontrar una interpretación a esta ecuación si la bisectriz externa es paralela a BC?

9. Sean r, r_A, s el inradio, el exradio del excírculo opuesto a A y el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que
$$\frac{r}{r_A} = \frac{s-a}{s}$$

10. El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demuestra que $AM = NC$.

11. Demuestra que
$$|\triangle ABC| = (s-a)r_A = (s-b)r_B = (s-c)r_C$$

12. Demuestra que
$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}$$

13. Demuestra que
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

14. Demuestra que
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{r}{r_C}$$

15. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles, con AB paralelo a CD. La circunferencia inscrita del triángulo $\triangle BCD$ intersecta CD en E. Sea F el punto sobre la bisectriz interna del ángulo $\angle DAC$, tal que $EF \perp CD$. El circuncírculo del triángulo $\triangle ACF$ intersecta la línea CD en C y G. Demuestra que el triángulo $\triangle AFG$ es isósceles.

16. En un paralelogramo $ABCD$ se trazan las circunferencias de centros O y O' y radios R y R' exinscritas a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$, relativas a los lados AD y CD, respectivamente.

    a) Demuestra que las circunferencias son tangentes a BD en un mismo punto F.
    b) Demuestra que D es el ortocentro del triángulo $\triangle OBO'$.
    c) Demuestra que $FB \cdot FD = R \cdot R'$.

17. En un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interna del ángulo $\angle A$ intersecta la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ en A_1. Los puntos B_1 y C_1 son definidos de manera semejante. Sea A' el punto de intersección de la línea AA_1 con las bisectrices externas de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$. Los puntos B' y C' se definen de manera semejante. Demuestra que

    a) $|A_0B_0C_0| = 2|AC_1BA_1CB_1|$
    b) $|A_0B_0C_0| \geq 4|ABC|$

18. Dado un $\triangle ABC$, por su vértice C pasan $n-1$ rectas $CM_1, CM_2, \ldots, CM_{n-1}$ que lo dividen en n triángulos menores $\triangle ACM_1, \triangle M_1CM_2, \ldots, \triangle M_{n-1}CB$ (los puntos $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ están sobre el lado AB). Supóngase que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ y $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ denotan, respectivamente, los radios de los círculos inscritos de esos triángulos y los círculos exinscritos que se encuentran dentro del ángulo $\angle C$ de cada triángulo. Sean r y ρ los radios de los círculos inscrito y exinscrito del propio triángulo $\triangle ABC$. Probar que
$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$