TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL

Sábado 20 de mayo y jueves 25 de mayo

Elaborado por: E. Efrén González González

Suma Aritmética

1.-Encuentra la suma de los números de 1 a 20.

2.-Encuentra la suma de los números de 1 a 100.

Solución:

Para poder encontrar la suma de los primeros n números se puede pensar de la siguiente forma:
Imaginemos que tenemos dos listas, la primera con los números anotados de 1 a n y la segunda con los números de n a 1, entonces si sumamos los elementos de las listas respectivamente podemos ver en cada columna la suma es la misma (n+1), de esta forma obtenemos n sumas iguales, pero debido a que generamos una lista extra debemos dividir el resultado entre 2.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ of them}} \end{aligned}$$

Ahora podemos generar una formular para obtener la suma de los primeros n números:

$$\text{Formula de Gauss: } \frac{n(n+1)}{2}$$

4.-Encuentra la suma de los números de 100 a 200.

5.-Encuentra la suma de los primeros 100 múltiplos de 5.

6.-Encuentra la suma de los primeros n impares.

Podemos definir una progresión aritmética de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= x = x + 0d \\ a_2 &= a_1 + d = x + 1d \\ a_3 &= a_2 + d = x + 2d \\ a_i &= a_{i-1} + d = x + (i-1)d \end{aligned}$$

Podemos decir que una progresión aritmética es una progresión tal que la diferencia entre dos números consecutivos siempre es la misma.

8.- El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Calcula los otros dos, sabiendo que los lados del triángulo forman una progresión aritmética.

9.- Calcula tres números en progresión aritmética, que suman 27 y siendo la suma de sus cuadrados es 511/2.

10.-Dada la siguiente progresión aritmética: $a_1 = 2,\ a_n = a_1 + 3(n-1)$
Encuentra la suma de sus primeros 100 términos.

Solución:

$$\begin{aligned}
1S &= 2 + 5 + \cdots + \big(2+3(n-2)\big) + \big(2+3(n-1)\big)\\
1S &= \big(2+3(n-1)\big) + \big(2+3(n-2)\big) + \cdots + 5 + 2\\
2S &= \big(4+3(n-1)\big) + \big(4+3(n-1)\big) + \cdots + \big(4+3(n-1)\big) + \big(4+3(n-1)\big)
\end{aligned}$$

Podemos acomodar factorizar lo anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
1S &= \big(2+3(0)\big) + \big(2+3(1)\big) + \cdots + \big(2+3(n-2)\big) + \big(2+3(n-1)\big)\\
1S &= \big(2+3(n-1)\big) + \big(2+3(n-2)\big) + \cdots + \big(2+3(1)\big) + \big(2+3(0)\big)\\
2S &= \big(4+3(n-1)\big) + \big(4+3(n-1)\big) + \cdots + \big(4+3(n-1)\big) + \big(4+3(n-1)\big)
\end{aligned}$$

De esta forma podemos llegar a concluir lo siguiente:

$$\text{Suma de n términos de una progresión aritmética:} \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

10.- Encuentra la suma de los primeros cien números que acaban en 5.

11.- Dada la siguiente sucesión: $\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}$
Encuentra el enésimo término y la suma de sus términos.

Tarea

1.- ¿Cuántos números impares consecutivos a partir del 1 es preciso tomar para que su suma sea igual 7744?

2.-Encuentra una fórmula para la suma de los primeros n impares.

3.- En una progresión aritmética el primer término y el último término son 47 y 207, respectivamente. Si la suma de sus términos es 2667, encuentra la progresión y la cantidad de términos.

4.-La suma de los cinco términos racionales de una progresión aritmética creciente es 40 y el producto de ellos es 12320. Encuentra el 5° término.

5.- Hallar la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los cuadrados de los términos segundo y séptimo es 477, y que la diferencia entre los términos octavos y segundo es 18.

6.- Muestra que si a^2, b^2, c^2 están en un progresión aritmética entonces $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ también lo están.

Progresión Geométrica

Podemos definir una progresión geométrica de la siguiente forma:

$$a_1 = x = x * r^0$$
$$a_2 = a_1 * r = x * r^1$$
$$a_3 = a_2 * r = x * r^2$$
$$a_i = a_{i-1} * r = x * r^{i-1}$$

1.-Demuestra que la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica es: $a_1 * \frac{r^n - 1}{r-1}$

2.- En una progresión geométrica de tres términos, la suma de ellos es 117, y su producto, 19683. Escribir la progresión.

3.- Un pueblo que tenía 10.000 almas, no tiene hoy más que 6.561. La disminución anual ha sido la décima parte de los habitantes. ¿Cuántos años hace que tenía 10.000 almas dicho pueblo?

4.- ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica sabiendo que el primer término es 5, el último es 1215 y la suma de ellos es 1820 ?

Sumas Telescópicas

En matemáticas, una serie telescópica es aquella serie cuyas sumas parciales poseen un número fijo de términos tras su cancelación:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1$$

1-4 Demuestra las siguientes propiedades:

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL

Sábado 20 de mayo y jueves 25 de mayo

Elaborado por: E. Efrén González González

$$\sum_{i=m}^{n}\left[f(i) - f(i-1)\right] = f(n) - f(m-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i) - f(i-1)\right] = f(n) - f(0)$$

$$\sum_{i=m}^{n}\left[f(i+1) - f(i-1)\right] = f(n+1) + f(n) - f(m) - f(m-1)$$

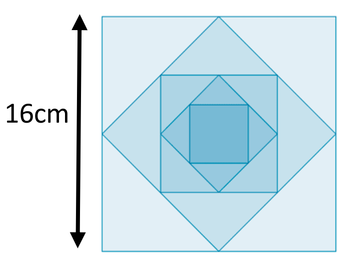
$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i+1) - f(i-1)\right] = f(n+1) + f(n) - f(1) - f(0)$$

Tarea

1.-Hallar la suma de: $1 + i^3 + i^6 + i^9 + \cdots + i^{27}$

2.-Encuentra el producto de: los primeros 20 términos de 3, 9, 27, 81…

3.-Observa los diferentes cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos:



a) Halla las áreas de los cinco primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

4.-Prueba que es una suma telescópica: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

5.-Encuentra el valor de m en la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} = 4$

6.-Dada la siguiente suma:

Si S es un número entero, encuentra el valor de n respecto a S.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = S$$