Teoría de Números

Factorización en Primos

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

Nota para el entrenador: A lo largo del entrenamiento estaremos trabajando únicamente con enteros positivos, de manera que omitiremos el *positivos* para no ser tan repetitivos, pero no omitiremos el *enteros* ya que el hecho de que sean enteros es de suma importancia y vale la pena recalcarlo.

Definición: En una división, el número que se va a dividir es llamado *dividendo*, el número por el que se va a dividir es el *divisor*, el resultado entero de la división es el *cociente* y las unidades que sobran, que son menores al número original es el *residuo*.

La primera definición importante en este tema es la siguiente:

Definición: Un número d, es *divisor* de un segundo número n, si el residuo al hacer la división de n por d es cero, es decir, si podemos encontrar un número k tal que $d = nk$. También se dice que n es divisible por d.

La notación que utilizaremos para decir que un número a divide a un número b será la siguiente: $a|b$. Muy ligada a esta definición tenemos la de *múltiplo*.

Definición: Un número es *múltiplo* n, si es el resultado de una multiplicación de n por algún número entero.

A partir de esta definición es claro que 1 divide a cualquier entero b pues podemos escribir $b = 1 \times b$. De la misma manera, es claro que cualquier entero a se divide a sí mismo pues podemos verlo como $a = a \times 1$.

Existen unas técnicas para determinar rápidamente cuando un número se puede dividir por otro, sin necesidad de realizar la operación, a éstas técnicas se les llama Criterios de Divisibilidad.

(Criterio del 2) Un número es múltiplo de 2 si su última cifra es par.

(Criterio del 3) Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

(Criterio del 4) Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifas es múltiplo de 4.

(Criterio del 5) Un número es múltiplo de 5 si termina en 0 o 5.

(Criterio del 6) Un número es múltiplo de 6 si lo es de 2 y 3.

(Criterio del 7) Un número es múltiplo de 7 si la diferencia entre el número formado por sus cifras excluyendo las unidas y el doble de la cifra de las unidades es múltiplo de 7.

(Criterio del 8) Un número es múltiplo de 8 si el número formado por sus tres últimas cifras es múltiplo de 8.

(Criterio del 9) Un número es múltiplo de 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.

(Criterio del 10) Un número es múltiplo de 10 si termina en 0.

(Criterio del 11) Un número es múltiplo de 11 si la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es un múltiplo de 11.

Ejemplo: Determinar si 37422 es múltiplo de 7 y de 11.

Para el 11: Las cifras en posición impar son 2, 4 y 3, así, la suma de las cifras impares, que llamaremos S_I es $S_I = 2 + 4 + 3 = 9$ y como las cifras en posición par son 7 y 2, $S_P = 7 + 2 = 9$. Así $S_I - S_P = 0$, y como el 0 es múltiplo de 11, entonces 37422 también lo es.

Para el 7: Tomemos el número formado por las cifras excluyendo la de las unidades, es decir 3742, y el doble de la cifra de las unidades es 4, así $D_1 = 3742 - 4 = 3738$, el cual, no sabemos si es múltiplo de 7, por lo que volvemos a aplicar el proceso, entonces $D_2 = 373 - 16 = 357$, y todavía no sabemos, apliquemos una vez más la operación. $D_3 = 35 - 14 = 21$, y como 21 es múltiplo de 7, entonces 37422 también lo es.

Definición: Un entero p se llama *primo* cuando sólo es divisible entre uno y sí mismo. El 1 **no** es considerado primo.

Ejemplo: Algunos primos con los que ya estamos familiarizados son 2, 3, 5, 7 y 11.

Definición: Un entero que no es el 1 y no es primo se llama *compuesto*.

Teorema: Para cualquier entero n diferente del 1, existe una (única) manera de expresarlo como producto de primos (y potencias de primos): $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$. A dicha expresión se le llama la factorización en primos de n.

Ejemplos:

$$\begin{array}{cccc} 70 = 2 \times 5 \times 7 & 117 = 3^2 \times 13 & 96 = 2^5 \times 3 & 225 = 3^2 \times 5^2 \\ 187 = 11 \times 17 & 777 = 3 \times 7 \times 37 & 1001 = 7 \times 11 \times 13 & 2052 = 2^2 \times 3^3 \times 19 \end{array}$$

Nota para el entrenador: Es convieniente realizar las factorizaciones anteriores paso a paso. Es decir, aplicando el método aprendido en la primaria de ir buscando un primo que divida, dividir por él y aplicar lo mismo con el resultado hasta terminar de factorizar el número original. Los ejemplos están elegidos para que esto no sea difícil y sirva para practicar los criterios de divisibilidad.

Es debido a este teorema (conocido formalmente como el Teorema Fundamental de la Aritmética) que a los enteros no primos se les llama "compuestos"pues estan conformados por varios factores primos. (Notemos que un número primo, por definición, no puede ser factorizado; es decir, su "factorización en primos"es él mismo a la potencia 1.)

Una primera forma en que utilizaremos la factorización en primos es el hecho de que nos permite decidir fácilmente cuando un entero a divide a otro entero b: Si tenemos a a y a b factorizados, $a \mid b$ cuando todos los factores primos que aparecen en a aperecen también en b y a una potencia mayor o igual a la que aparecen en a. De lo contrario, a no divide a b.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 5 \mid 2^2 \times 3 \times 5 & 3^2 \times 7^2 \mid 3^2 \times 7^4 & 5^2 \times 7 \nmid 5^3 \times 13 \\ 2 \times 3^3 \times 11 \mid 2^2 \times 3^7 \times 7^3 \times 11^4 & 2^3 \times 13 \nmid 2^2 \times 13^2 & 3^2 \times 5^6 \times 17^2 \nmid 3^3 \times 5^5 \times 17^8 \end{array}$$

Es fácil ver porqué esto es cierto. Para que a divida a b debemos poder expresar a b como a por otro entero c. Cuando todos los factores de a aparecen como parte de una multiplicación que da por resultado a b podemos agruparlos para formar a y lo que sobre sería el entero c. Por ejemplo, en el primer caso, $2 \times 5 \mid 2^2 \times 3 \times 5$ pues $b = 2^2 \times 3 \times 5 = \underbrace{2 \times 5}_{a} \times \underbrace{2 \times 3}_{c}$. Por otro lado, si un factor primo que aparece en a no aparece en b es imposible "eliminarlo"realizando una multiplicación por un entero c así que nunca podremos obtener b.

Usando una idea similar, podemos utilizar la factorización en primos para obtener *todos* los divisores de cualquier entero. Por ejemplo, supongamos que queremos escribir todos los divisores de 60. Primeramente, factorizamos en primos para obtener: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Ahora, ¿como debe ser un divisor de 60? No debe tener otros factores primos además de 2, 3 y 5. Además estos deben aparecer el 2 con potencia a lo mucho dos, el 3 con potencia a lo más uno y el 5 con potencia a lo más uno también. Con esta información ya podemos enlistar todos los divisores de 60, a saber:

$$\begin{array}{lll} 2^0 \times 3^0 \times 5^0 & 2^1 \times 3^0 \times 5^0 & 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \\ 2^0 \times 3^1 \times 5^0 & 2^1 \times 3^1 \times 5^0 & 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \\ 2^0 \times 3^0 \times 5^1 & 2^1 \times 3^0 \times 5^1 & 2^2 \times 3^0 \times 5^1 \\ 2^0 \times 3^1 \times 5^1 & 2^1 \times 3^1 \times 5^1 & 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \end{array}$$

Es decir, escribiéndolos numéricamente y ordenándolos, los divisores de 60 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60.

Algo que podemos observar fácilmente es que, si vamos agrupando los divisores en parejas el menor con el mayor, el segundo menor con el segundo mayor y así consecutivamente, al multiplicar cada pareja obtenemos siempre el número original. En nuestro caso:

$$\begin{array}{lll} 1 \times 60 = 60 & 2 \times 30 = 60 & 3 \times 20 = 60 \\ 4 \times 15 = 60 & 5 \times 12 = 60 & 6 \times 10 = 60 \end{array}$$

Esto sucede para cualquier número puesto que, si tomamos cualquier divisor de él, debe haber otro divisor que lo "complemente"para obtener como resultado el número original. Y si ponemos todos los divisores en orden, al ir agrupando por parejas como hemos hecho debemos estar juntando justamente esos divisores complementarios.

Nota para el entrenador: Es recomendable realizar algunos ejemplos más de lo anterior. Sugerimos usar los números 54 y 105.

La observación anterior nos permite obtener un método más corto para responder a la pregunta: ¿como podemos determinar si un número n es primo? En principio, para responder a la pregunta tendríamos que intentar dividir a n por todos los primos menores que él y si ninguno nos da una división exacta podemos entonces afirmar que n es también primo. Sin embargo, por lo hecho anteriormente, podemos recortar el procedimiento y considerar únicamente los primos menores o iguales a $\sqrt{n}$. Esto es porque, si hemos visto que ningún primo menor que $\sqrt{n}$ divide a n no puede ser que un primo mayor a $\sqrt{n}$, digamos p, sí lo divida. Si esto sucediera, tendríamos $n = p \times q$ y como q también divide a n, tendría también que ser mayor a $\sqrt{n}$. Pero entonces $p \times q > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$ lo cual es una contradicción al hecho de que $p \times q = n$.

Ejemplos: Primeramente, utilicemos esto para expandir nuestra lista de primos. Hasta ahora tenemos 2, 3, 5, 7, y 11. ¿Cuál es nuestro siguiente candidato? Podemos descartar todos los números pares pues el único primo par es el 2. Chequemos entonces si el 13 es primo: $3 \nmid 13$, $5 \nmid 13$ y como $5 > \sqrt{13}$ (o en otras palabras $5^2 = 25 > 13$) ya podemos asegurar que 13 es primo. Luego, 15 no es primo pues termina en 5 pero $3 \nmid 17$, $5 \nmid 17$ y esto nos basta para asegurar que 17 es primo. Luego $3 \nmid 19$, $5 \nmid 19$ nos basta para obtener que 19 es primo. 21 no puede ser primo pues es divisible por 3, pero 23 no es divisible ni por 3 ni por 5 y con esto podemos ver que también es primo. 25 es divisible entre 5 y 27 es divisible por 3. Ahora bien, 29 no es divisible por 3 ni por 5 pero esto no nos basta pues 5 no es mayor que $/sqrt29$. Pero al ver que $7 \nmid 29$ y $7^2 = 49 > 29$ ahora sí obtenemos que 29 es primo. Aplicando este mismo proceso, podemos ver que los primos menores que 50 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 y 47.

¿Es 667 primo? Vemos que $2 \nmid 667$, $3 \nmid 667$, $5 \nmid 667$, $7 \nmid 667$, $11 \nmid 667$, $13 \nmid 667$, $17 \nmid 667$, $19 \nmid 667$ pero $23 \mid 667$. Así que 667 no es primo.

¿Es 2003 primo? Vemos que $2 \nmid 2003$, $3 \nmid 2003$, $5 \nmid 2003$, $7 \nmid 2003$, $11 \nmid 2003$, $13 \nmid 2003$, $17 \nmid 2003$, $19 \nmid 2003$, $23 \nmid 2003$, $29 \nmid 2003$, $31 \nmid 2003$, $37 \nmid 2003$, $41 \nmid 2003$, $47 \nmid 2003$ y como $47 > \sqrt{2003}$ ya podemos afirmar que 2003 es primo.

Nota para el entrenador: Es importante recalcar que no es necesario calcular la raíz cuadrada del número que se está investigando. El proceso se detiene cuando al realizar la división de casita el número que sale arriba es estrictamente menor que el número de afuera pues eso implica que el de afuera es mayor que la raíz del de adentro.

Regresemos al ejemplo en que teníamos al 60 factorizado como $2^2 \times 3 \times 5$. En vez de preguntarnos cuáles son sus divisores supongamos que queremos saber directamente *cuántos* son. Recordemos que para obtener un divisor de 60 no podemos poner otros factores primos además de 2, 3 y 5. Luego el 2 lo podemos poner a potencias 0, 1 o 2; el 3 a potencias 0 o 1 y el 5 a potencias 0 o 1. Es decir, para “armar”un divisor de 60 tenemos tres opciones para la potencia de 2, y dos opciones para las potencias de 3 y de 5. Por lo tanto, debe haber $3 \times 2 \times 2 = 12$ divisores de 60. Podemos comprobar que en efecto obtuvimos 12 divisores al escribirlos todos. Por supuesto, este proceso se puede generalizar para cualquier número:

Fórmula: Si el entero n se factoriza en primos como $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$, entonces n tiene $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ divisores.

Ejemplo: ¿Cuántos divisores tiene 2052?

Solución: Sabemos que, al factorizar 2052 nos queda: $2052 = 2^2 \times 3^3 \times 19$. Luego, aplicando la fórmula anterior vemos que el número de divisores es: $3 \times 4 \times 2 = \mathbf{24}$.

Una última manera en que utilizaremos la factorización en primos es que nos permite saber cuando un número es un cuadrado perfecto. Recordemos que un número es un cuadrado perfecto si podemos encontrar otro número que al multiplicarse por sí mismo nos de el número original. De esta manera, podemos ver que, por ejemplo, $225 = 3^2 \times 5^2$ es cuadrado perfecto pues $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)(3 \times 5)$ Igualmente, podemos ver que $400 = 2^4 \times 5^2$ es cuadrado perfecto pues $2^4 \times 5^2 = (2^2 \times 5)(2^2 \times 5)$. Es decir, el número será cuadrado perfecto si podemos repartir sus factores primos equitativamente entre los dos multiplicandos idénticos que nos deben dar el número original y si esto no se puede hacer el número no es cuadrado perfecto. Por ejemplo, $3^6 \times 7^2 \times 23^8$ sí es cuadrado perfecto pero $2^2 \times 5^4 \times 7 \times 11^6$ no lo es. En otras palabras, un número es cuadrado perfecto si todos sus factores primos aparecen elevados a potencias pares (o equivalentemente, aparecen un número par de veces así que podemos repartirlos equitativamente en dos multiplicandos).

Evidentemente, podemos generalizar este método para ver cuando un número es un cubo perfecto. La diferencia ahora es que queremos repartir los factores primos equitativamente entre tres multiplicandos. Por ejemplo, $5^6 \times 11^3$ es cubo perfecto pues $5^6 \times 11^3 = (5^2 \times 3)(5^2 \times 3)(5^2 \times 3)$. Pero $2^9 \times 7^4 \times 13^3$ no lo es puesto que el factor 7 aparece cuatro veces y no puede ser repartido equitativamente entre tres. Es decir, un número será un cubo perfecto si todos sus factores primos aparecen elevados a una potencia múltiplo de 3. De la misma manera podríamos continuar y obtener un criterio para cuando un número es una cuarta potencia perfecta, una quinta potencia perfecta etc.

2. Problemas

1. Encuentra todos los enteros positivos p tales que p, $p + 1$ y $p + 3$ sean todos números primos.

2. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $16^8 \times 25^{15}$?

3. Paco desea impresionar a Ana, Betty y Carla así que les realiza el siguiente truco de magia. Paco les dice que cada una escriba su número de tres cifras favorito. Despues deben escribir nuevamente cada número de tres cifras para formar un número de seis cifras. Por ejemplo, si el número favorito de Ana es 123, debe terminar con el número de seis cifras 123,123. Sin ver los números que escribieron, Paco les dice "El número de seis cifras que escribió Ana es divisible por 7, el que escribió Betty es divisible por 11 y el que escribió Carla es divisible por 13."¿Porqué funciona el truco de Paco?

4. Un entero a que no es la potencia de un primo es tal que a^2 tiene 143 divisores. ¿Cuántos divisores tiene a^3?

5. ¿Cuántos múltiplos de 45^{45} son divisores de 90^{90}?

6. Encuentra todos los enteros n tales que su divisor más grande distinto de n es 15 veces su divisor más chico distinto de 1

7. En un salón se encuentran 100 focos alineados. Los focos estan numerados $1, 2, \ldots 100$. Al principio, todos los focos se quedan apagados. Cien personas pasan por la fila de focos y hacen lo siguiente: la primera persona prende todos los focos; la segunda persona apaga todos los focos pares (el $2, 4, \ldots, 98$ y 100). La tercera persona cambia de estado (si esta prendido lo apaga, si esta apagado lo prende) todos los focos múltiplos de 3 $(3, 6, 9, \ldots)$. Y así sucesivamente hasta la centésima persona que solo cambia de estado el foco 100. ¿Cuáles focos quedan encendidos?

8. Determina el mayor entero positivo n tal que existe una reordenación a, b, c, d, de los números 3, 6, 9 y 12 para la cual $\sqrt[n]{3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d}$ es un entero.

3. Soluciones

1. Notemos que entre p y $p+1$ uno de ellos debe ser un número par. Como queremos que ambos sean primos y el único primo par es 2, uno de ellos debe ser 2. Si tuvieramos $p + 1 = 2$ eso implicaría $p = 1$ pero el 1 no es un número primo. Por lo tanto, debemos tener $p = 2$ y como en este caso tendríamos $p + 1 = 3$ y $p + 3 = 5$ que son, en efecto, números primos, obtenemos que la única solución es $p = 2$.

2. Observemos que $16^8 \times 25^{15} = (2^4)^8 \times (5^2)^{15} = (2^{4\times 8}) \times (5^{2\times 15}) = (2^{32}) \times (5^{30}) = 2^2 \times (2^{30} \times 5^{30}) = 2^2 \times (2 \times 5)^{30} = 4 \times 10^{30} = 4\underbrace{0 \ldots 0}_{30}$ por lo tanto, la suma de dígitos de este número es 4.

3. Observemos que si tenemos un número de tres cifras abc, el número de seis cifras abc, abc es igual a $abc \times 1001$. Por lo tanto, tenemos $1001 \mid abc, abc$. Pero la factorización en primos de 1001 es $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Entonces, sin importar que valores tomen a, b y c, sabemos que $7 \mid abc, abc$, $11 \mid abc, abc$ y $13 \mid abc, abc$.

4. Supongamos que a se factoriza en primos como $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$. Como a no es una potencia de un primo, debe haber al menos dos factores en esta descomposición. Luego, a^2 se factoriza como $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \times p_2^{2\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{2\alpha_k}$. Ahora, usando la fórmula para la cantidad de divisores vemos que $143 = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1)$. Pero vemos que 143 se descompone en primos como $143 = 11 \times 13$. Por lo tanto, la única manera de obtenerlo como un producto de factores distintos de 1 es justamente utilizar sólo dos factores, el 11 y el 13. Esto

es, a se debe descomponer en sólo dos factores primos y estos estan elevados a potencias tales que $(2\alpha_1 + 1) = 11, (2\alpha_2 + 1) = 13 \Rightarrow \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 6$. Por lo tanto, la factorización de a es en realidad $a = p_1^5 \times p_2^6$ para algunos primos p_1 y p_2. Luego, $a^3 = p_1^{15} \times p_2^{18}$ y finalmente aplicando la fórmula, la cantidad de divisores de a^3 es $16 \times 19 = \mathbf{304}$.

5. La factorización en primos de 45 es $45 = 3^2 \times 5$ así que $45^{45} = 3^{90} \times 5^{45}$. Por otro lado, la factorización en primos de 90 es $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ así que $90^{90} = 2^{90} \times 3^{180} \times 5^{90}$. Entonces, para obtener un múltiplo de 45^{45} debemos poner el 3 a potencia al menos 90 y el 5 a potencia al menos 45. Podríamos también poner otros factores primos pero si queremos obtener un divisor de 90^{90} solo podemos usar los factores 2, 3 y 5 y estos deben ir el 2 a potencia a lo más 90, el 3 a potencia a lo más 180 y el 5 a potencia a lo más 90. Por lo tanto, para construir un número que cumpla ambas características tenemos para la potencia del dos 91 opciones (de 0 a 90), para la potencia del tres 91 opciones (del 90 al 180) y para la potencia del cinco 46 opciones (del 45 al 90). Por lo tanto, debe haber $\mathbf{91} \times \mathbf{91} \times \mathbf{46}$ números que cumplan.

6. Sea d el divisor de n más pequeño distinto del 1. Sabemos que $15d$ es el divisor más grande diferente de n. Pero sabemos que si multiplicamos estos dos divisores nos debe dar n, esto es: $15d^2 = n$. Pero esto quiere decir que 3 divide a n (pues la ecuación anterior nos dice que n es múltiplo de 15, y consecuentemente de 3). Pero como d es el menor divisor de n distinto de 1, debemos tener $d \leq 3$. Es decir solo tenemos dos opciones, $d = 2$ ó $d = 3$. Estas dos opciones nos dan los números $n = 15 \times 2^2 = \mathbf{60}$ y $n = 15 \times 3^3 = \mathbf{135}$.

7. Observemos que el foco n cambia de estado tantas veces como divisores tenga n. Ahora bien, es claro que para que un foco quede encendido al final debe cambiar de estado un número impar de veces. Entonces, los focos que quedan encendidos son los que tienen un número impar de divisores. Ahora, recordemos que si n se factoriza en primos como $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$, el número de divisores de n es $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$. Pero para que esta multiplicación sea impar, cada uno de los factores que la componen debe ser impar. Y esto sólo es posible si todos los α_i son pares. En otras palabras, n debe ser tal que todos sus factores primos aparecen a una potencia par. Pero esto es justamente que n sea cuadrado perfecto. Por lo tanto, los focos que quedan prendidos son $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ y 100.

8. Primero, factoricemos en primos: $3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d = 3^a \times (2 \times 3)^b \times (3^2)^c \times (2^2 \times 3)^d = 3^a \times 2^b \times 3^b \times 3^{2c} \times 2^{2d} \times 3^d = 2^{b+2d} \times 3^{a+b+2c+d}$. Entonces, para que $\sqrt[n]{3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d}$ sea entero se necesita que n sea divisor tanto de $a+b+2c+d$

como de $b+2d$. En particular, n debe ser menor que ambos. Ahora, observemos que $a+b+2c+d=(a+b+c+d)+c=30+c$ (pues los a,b,c,d deben ser los números 3, 6, 9 y 12 en algún orden así que su suma debe ser 30). Entonces $a+b+2c+d$ sólo puede valer 33, 36, 39 ó 42. ¿Y cuánto es lo más que puede valer $b+2d$? Claramente el valor máximo se alcanza tomando $d=12$ y $b=9$ lo cual nos da $b+2d=33$. Entonces, n no puede valer más de 33 (ya que debe valer menos que $b+2d$) y si tomamos $c=3$ obtenemos $a+b+2c+d=33$ con lo cual n en efecto sería un divisor tanto de $a+b+2c+d$ como de $b+2d$. Por lo tanto, tomando $a=6, b=9, c=3, d=12$ y $n=33$ obtenemos que $\sqrt[n]{3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d}$ es entero y éste es el máximo n que puede cumplirlo.