Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 19 de septiembre del 2022

Factorizaciones importantes

Ángel Manuel González López

1. Introducción a Factorizaciones

Empezaremos hablando sobre notación, es decir explicaremos con detalle el sistema de signos convencionales que se utiliza para representar ciertos conceptos matemáticos.
Primero diremos que usamos literales para representar de manera abstracta a los números x, y, z, a, b, c, n m, k entre otras. Al multiplicar dos números los podemos expresar de las siguientes formas

$$5 \times 6 \ = \ 5 \cdot 6 \ = \ (5)(6)$$

Lo mismo sucede al multiplicar literales, la única convención que agregamos es que la ausencia de signo entre dos literales también significa multiplicación

$$x \times y \ = \ x \cdot y \ = \ (x)(y) \ = \ xy$$

También se puede escribir la multiplicación de un número por una literal de la siguiente forma

$$5 \times x \ = \ 5 \cdot x \ = \ (5)(x) \ = \ 5x$$

Cuando tenemos expresiones entre paréntesis usamos las mismas notaciones

$$x \times (2y+3) \ = \ x \cdot (2y+3) \ = \ (x)(2y+3) \ = \ x(2y+3)$$

Recalcar que apesara de que el orden de los factores en una multiplicación no altera el resultado no es usual usar $x5$ para representar $x \times 5$, en su lugar usamos $5x$, es decir cuando multiplicamos una literal y una variable es usual que el número se escriba del lado izquierdo de la literal. Tampoco es usual (pero si es correcto) escribir yx para representar el producto de $y \times x$ en su lugar usamos xy, es decir, cuando usamos literales para representar los factores de un producto lo usual es ordenarlos alfabéticamente.

Ahora veamos que le llamamos termino, se le llama cada una de las piezas que se encuentran relacionadas entre si por los signos de suma y de resta en una expresión, por ejemplo la siguiente expresión

$$8x^3 - 5x^2 + 3x - 2$$

Esta expresión tiene 4 términos, y cada termino esta compuesto por un coeficiente y un exponente. Los exponentes indican cuantas veces estamos multiplicando algo, por ejemplo $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ o $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$, mientras que el coeficiente indica multiplicación, por ejemplo

$$8x^3 \ = \ 8 \times x \times x \times x$$

Notar que en el número del coeficiente nos importa el signo, puesto que $-5x^2 = (-5)x^2$ no es lo mismo que $5x^2 = (+5)x^2$; aquí es importante recalcar que $-x$ es lo mismo que $(-1)x$ o también $-1x$, a igual modo que x es lo mismo que $1x$.

Recalcar que para "reconocer" a cada termino es que lo tenemos separado por un signo $+$ o $-$, de hecho para estrictos únicamente el signo $+$ puesto que tenemos

$$8x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (+8x^3) + (-5x^2) + (+3x) + (-2)$$

Pero a pesar de que no sea común escribir a cada termino entre paréntesis todo separado por un signo $+$ como en el lado derecho, es útil que se tenga en mente que eso es lo que se quiere "decir".

También podemos tener exponentes en expresiones algebraicas completas y de igual modo significa cuentas veces multiplicamos dicha expresión, como por ejemplo

$$(2x + y)^3 = (2x + y)(2x + y)(2x + y)$$

También podemos tener que en un solo termino intervienen varias literales, como en el siguiente ejemplo

$$3x^3yz^2 = 3 \times x \times x \times x \times y \times z \times z$$

Muchas veces en alguna expresión necesitamos utilizar muchas letras pero nuestro abecedario es finito es por eso que en lugar de expresar algo como

$$-5a + 2b - 8c - 5d + -5e + 2f - 8g - 5h + 3i - 2j + 5k - 3l$$

usamos una misma letra pero marcándola con subíndices diferente para diferenciarla, por ejemplo decir x_1 es diferente a x_2 y x_3, por eso una mejor forma de escribir una expresión algebraica es

$$-5a_1 + 2a_2 - 8a_3 - 5a_4 + -5a_5 + 2a_6 - 8a_6 - 5a_7 + 3a_8 - 2a_9 + 5a_{10} - 3a_{11}$$

Quizá no sea muy útil en este ejemplo ya que si nos alcanzan las letras del abecedario, pero ¿que pasa cuando no sabemos cuantos términos tiene?, pues podemos hacer lo siguiente

$$-5a_1 + 2a_2 + 8a_3 - 5a_4 + 2a_5 - 8a_6 - 5a_6 + 2a_7 + 8a_8 - 5a_9 + 2a_{10} + \cdots - 8a_n$$

donde sabemos que tiene n términos, pero n es la representación de cualquier numero, esto no es útil para representar polinomios que son expresiones algebraicas donde cada termino tiene exponente entero, pero la cantidad de términos es cualquier numero

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Para continuar con la introducción veremos la factorización mas importante que nos sera de utilidad para demostrar las demás. Factor común:

$$c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$$

Quizá sea útil ver un ejemplo con números precisos para que quede más claro

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 5 \cdot (3 + 4)$$

Para ver que eso es cierto basta ver que

$$5 \cdot (3 + 4) \;=\; 5 \cdot (7) \;=\; 35$$

y que

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \; = \; 15 + 20 \; = \; 35$$

La factorización por factor común también aplica cuando tenemos mas de dos términos en la expresión

$$c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + x \cdot a_3 + x \cdot a_4 + \cdots + c \cdot a_n = x \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n)$$

Y por ultimo, veremos como multiplicamos dos términos

$$(2x)(3y) = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6 \cdot x \cdot y = 6xy$$

$$(5x)(2x) = 5 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 5 \cdot 2 \cdot x \cdot x = 10 \cdot x \cdot x = 6x^2$$

$$(3x^3)(6x^2) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot x = 3 \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 18 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 18x^5$$

$$(2x^3y^2)(3x^2y^4) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 3 \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 18 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 18x^5y^6$$

Lo mismo sucede para términos con más de dos variables, la “idea” es, los coeficientes se multiplican y los exponentes de cada literal se suman para formar el nuevo exponente de la misma literal.

2. Factorizaciones importantes

Vamos a continuar mostrando algunos productos notables que nos sarán de utilidad para resolver problemas de olimpiadas en el que necesitemos factorizar una expresión algebraica. Los productos notables son el resultado de realizar multiplicaciones con expresiones algebraicas de dos o mas variables. Recordamos los principales

Nombre(s)	Operación
Factor común Distribución	$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$
Binomio al cuadrado Trinomio Cuadrado Perfecto	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Binomios con termino semejante	$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$
Binomios Conjugados Diferencia de cuadrados	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3$
Suma y diferencia de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Suma y diferencia de n-ésimas potencias	$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$

2.1. Demostraciones

Antes de empezar a usarlas en ejercicios y aprender en que tipos de ejercicios es recomendable usar una u otra, se tiene que entender lo que se esta haciendo, por ello sugiero que como reto se intenten demostrar por cuenta propia, para ello dedicamos esta subsección a atender este punto. Demostraremos “Ambos caminos” para el practicar tanto realizar el producto cómo también su camino inverso que es realizar la factorización, para ello tu principal herramienta sera Factorizar por factor común.

Binomio al cuadrado - Trinomio cuadrado perfecto.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Realizamos el producto:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + 1ab + 1ab + b^2 \\
&= a^2 + ab(1+1) + b^2 \\
&= a^2 + ab(2) + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Realizamos la factorización:

$$\begin{aligned}
a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a(a+b) + ab + b^2 \\
&= a(a+b) + b(a+b) \\
&= (a+b)(a+b) \\
&= (a+b)^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1. *Como puedes ver realizar la factorización es lo mismo que "Hacer el camino de regreso" al realizado en el producto, por eso como ejercicio intenta hacer los productos de Binomios con termino semejante, Binomios Conjugados, Binomio al cubo y Suma y diferencia de cubos para posteriormente realizar la factorizaciones de cada uno respectivamente, las respuestas se encuentran en las paginas siguientes.*

Binomios con termino semejante.

$$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$$

Realizamos el producto:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a(a+c) + b(a+c)\\ &= a^2 + ac + ba + bc\\ &= a^2 + ac + ba + bc\\ &= a^2 + a(c+b) + bc\\ &= a^2 + a(b+c) + bc\end{aligned}$$

Realizamos la factorización

$$\begin{aligned}a^2 + a(b+c) + bc &= a^2 + ab + ac + bc\\ &= a(a+b) + ac + bc\\ &= a(a+b) + c(a+b)\\ &= (a+b)(a+c)\end{aligned}$$

Notar que: *Al realizar la factorizacion un paso importante para poder proseguir fue " Descomponer " una parte ya factorizada* $a(b+c)$ *, un error común suele ser tratar de hacer lo siguiente:*

$$\begin{aligned}a^2 + a(b+c) + bc &= a(a + (b+c)) + bc\\ &= a(a+b+c) + bc\end{aligned}$$

Debido a esto es recomendable primero realizar el producto para ver con una mayor naturalidad estos "trucos" para aplicarlos al momento de factorizar la expresión.

Binomios Conjugados-Diferencia de cuadrados.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Realizamos el producto:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b)\\ &= a^2 - ab + b(a-b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 + 0 - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Realizamos la factorización:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - ab + b(a-b)\\ &= a(a-b) + b(a-b)\\ &= (a+b)(a-b)\end{aligned}$$

Notar que: *Un paso importante al realizar la factorizacion fue sumar y restar* ab*, esto se puede hacer ya que sabemos que sumar y restar una misma cantidad no altera la igualdad, y es muy útil en muchos casos para poder " completar la factorización ".*

Binomio al cubo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3$$

Realizamos el producto:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (a+b)^2(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a) + (a^2+2ab+b^2)(b) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+(a^2+2ab+b^2)(b) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+2a^2b+3ab^2+a^2b+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}$$

Un paso que usamos al hacer el producto es usar lo que ya sabemos, es decir el Binomio al cuadrado, con esta misma como ejercicio propio puedes tratar de hacer el producto de $(a+b)^4$, $(a+b)^5$*... etc.*

Realizamos la factorización:

$$\begin{aligned}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= a^3+2a^2b+a^2b+3ab^2+b^3 \\
&= a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a(a^2+2ab+b^2)+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a(a+b)^2+b(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (a+b)^3
\end{aligned}$$

Notar que: *Un paso importante fue separar el termino* $3a^2b$ *en* $2a^2b + a^2b$*, probablemente al principio pareciera ser que estas ideas son " rebuscadas " o que no es claro que hay que hacer eso, asi que explicare " la idea de la idea ", en la expresión que queremos factorizar tenemos variables al cubo y al cuadrado y lineales, queremos tratar de reducir la expresión a " algo mas sencillo", para ello lo trataremos de reducir a una expresión sin cubos por lo que queremos que sea " algo del estilo cuadrático " por lo que podemos tratar de que " tome la forma " de un binomio al cuadrado, es por que en los primeros pasos descomponemos el termino* $3a^2b$ *en* $2a^2b + a^2b$ *y también que cambiemos de lugar el termino* ab^2*, ya que al factorizar el factor* a *nos queda una expresión cuadrática con la forma de un trinomio cuadrado perfecto y vemos que a la derecha queda algo similar " casi automáticamente " solo que esta vez factorizando* b*.*

Diferencia de Cubos.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Realizamos el producto:

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2 - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2 - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3\\ &= a^3+ab^2-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

Notemos que la suma de cubos es un caso particular de la diferencia de cubos ya que se tiene que

$$a^3-b^3 = a^3+(-b^3) = a^3+((-b)^3) = a^3+(-b)^3.$$

o bien

$$a^3+b^3 = a^3-(-b^3) = a^3-((-b)^3) = a^3-(-b)^3.$$

Mas adelante veremos que la suma de n-ésimas potencias es del mismo modo un caso particular de la diferencia de n-ésimas potencias con el caso n impar, y demostraremos ambas formulas; asi como un binomio elevado a la n-ésima potencia, también conocido como binomio de Newton. Por ahora con lo visto hasta este momento ya podemos hacer ejercicios.

2.2. Ejercicios

Los productos notable nos sirven principalmente para factorizar expresiones lo que no es de utilidad para encontrar números primos en la descomposición de números como en los ejemplos que veremos enseguida.

Ejercicio 2.2.1. *Determinar el mayor número primo que divide a 12^2-5^2.*
Solución. *Ya que en la expresión que tenemos se están restando dos números elevados al cuadrado, haremos uso de Binomios al cuadrado - binomios conjugados para factorizar la expresión.*

$$\begin{aligned}12^2-5^2 &= (12+5)(12-5)\\ &= (17)(7)\end{aligned}$$

Por lo que el numero primo mas grande que divide a 12^2-5^2 es 17.

Ejercicio 2.2.2. *Determinar el mayor número primo que divide a 16^2-7^2.*
Solución.

$$\begin{aligned}16^2-7^2 &= (16+7)(16-7)\\ &= (23)(9)\\ &= 23\cdot 3\cdot 4\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que el número primo más grande que divide a 16^2-7^2 es el 23.

Ejercicio 2.2.3. *Descompone al número* $2027^2 - 2022^2$ *en factores primos.*
Solución. *Diferencia de cuadrados-Binomios Conjugados para factorizarlo.*

$$\begin{aligned} 2027^2 - 2022^2 &= (2027 + 2022)(2027 - 2022) \\ &= (4049)(5) \\ &= 5 \cdot 4049 \end{aligned}$$

Sabemos que 5 es un número primo y podemos probar fácilmente que 4049 es un numero primo también (basta ver que no lo divide ningún primo menor que 65 ya que $65^2 > 4049$*), por lo que concluimos que la descomposicion en factores primos de* $2027^2 - 2022^2$ *es* $5 \cdot 4049$*.*

Ejercicio 2.2.4. *Descompone al número $2^{16}-1$ en factores primos.*
Solución. *Usaremos de manera repetida Diferencia de cuadrados-Binomios Conjugados para factorizarlo.*

$$\begin{aligned}
2^{16}-1 &= 2^{(8\cdot 2)}-1\\
&= \left(\left(2^8\right)^2-1^2\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^8-1\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^{(4\cdot 2)}-1\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(\left(2^4\right)^2-1^2\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^{(2\cdot 2)}-1\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(\left(2^2\right)^2-1^2\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^2-1\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^2-1^2\right)\\
&= \left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^2+1\right)(2+1)(2-1)\\
&= (256+1)\,(16+1)\,(4+1)\,(3)(1)\\
&= (257)\,(17)\,(5)\,(3)(1)\\
&= 257\cdot 17\cdot 5\cdot 3
\end{aligned}$$

Y como 257, 17, 5 y 3 son números primos concluimos que la descomposición en factores primos de $2^{16}-1$ *es* $257\cdot 17\cdot 5\cdot 3$

Ejercicio 2.2.5. *Determinar el mayor número primo de dos dígitos que divide a $3^{32}-2^{32}$.*
Solución.

$$\begin{aligned}
3^{32}-2^{32} &= 3^{(16\cdot 2)}-2^{(16\cdot 2)}\\
&= (3^{16})^2-(2^{16})^2\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^{16}-2^{16}\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^{(8\cdot 2)}-2^{(8\cdot 2)}\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(\left(3^8\right)^2-\left(2^8\right)^2\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left(3^8-2^8\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left((3^4)^2-(2^4)^2\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left(3^4+2^4\right)\left(3^4-2^4\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left(3^4+2^4\right)\left((3^2)^2-(2^2)^2\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left(3^4+2^4\right)\left(3^2+2^2\right)\left(3^2-2^2\right)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)\left(3^4+2^4\right)\left(3^2+2^2\right)(3+2)(3-2)\\
&= \left(3^{16}+2^{16}\right)\left(3^8+2^8\right)(97)\,(13)\,(5)(1)
\end{aligned}$$

Como 97 es primo y además sabemos que es el primo más grande de dos cifras que existe (ya que 98 y 99 no son primos) concluimos que el primo más grande de dos cifras que divide a $3^{32}-2^{32}$ *es el 97.*

Ejercicio 2.2.6. *Descompone el numero 9999 en factores primos.*
Solución. *Usemos Diferencia de cuadrados-Binomios Conjugados para factorizar al numero.*

$$\begin{aligned} 9999 &= 10000 - 1 \\ &= 100 \cdot 100 - 1 \\ &= 100^2 - 1^2 \\ &= (100 + 1)(100 - 1) \\ &= (101)(99) \\ &= 101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.7. *Descompone al numero 1027 en factores primos.*
Solución. *Usaremos Suma de cubos para factorizar a el número.*

$$\begin{aligned} 1027 &= 1000 + 27 \\ &= 10^3 + 3^3 \\ &= (10 + 3)(10^2 - 10 \cdot 3 + 3^2) \\ &= (13)(100 - 30 + 9) \\ &= 13 \cdot 79 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.8. *Encontrar el mayor divisor de 1001001001 que no excede a 10000.*
Solución. *Notemos que*

$$1001001001 = 1001000000 + 1001 = 1001 \cdot 1000000 + 1001 = 1001(1000000 + 1)$$

También veamos que podemos usar Suma de cubos para factorizar el numero 1001

$$\begin{aligned} 1001 = 1000 + 1 &= 10^3 + 1^3 \\ &= (10 + 1)(10^2 - 10 \cdot 1 + 1^2) \\ &= (1)(100 - 10 + 1) \\ &= (11)(91) \\ &= 11 \cdot 7 \cdot 13 \end{aligned}$$

Ahora podemos usar suma de cubos nuevamente para factorizar 1000000+1

$$\begin{aligned} 1000000 + 1 &= 100 \cdot 100 \cdot 100 + 1 \\ &= (100)^3 + 1^3 \\ &= (100 + 1)(100^2 - 100 \cdot 1 + 1^2) \\ &= (101)(100^2 - 100 + 1) \\ &= (101)(9900 + 1) \\ &= 101 \cdot 9901 \end{aligned}$$

Asi que concluimos

$$1001001001 = 1001(1000000 + 1) = 11 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$$

Como 11,7,13,101 son primos y podemos verificar fácilmente que 9901 también es primo, concluimos que el divisor mas grande de 1001001001 es 9901

3. Para familiarizarse con las factorizaciones

Antes de empezar a resolver problemas del estilo de la Olimpiada de matemáticas es importante que domines lo básico de factorizaciones, para ello se presentan los siguientes ejercicios "clasicos" para que practiques el álgebra llevando a cabo las facturaciones usando diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto o binomio con termino semejante.

3.1. Ejercicios

3.1.1. $25x^2 + 65x + 42$

3.1.2. $x^2 - 2x + 1$

3.1.3. $4a^2 - 9$

3.1.4. $x^2 + 2ax - 15a^2$

3.1.5. $y^4 + 1 + 2y^2$

3.1.6. $1 - 4m^2$

3.1.7. $a^2 - 4ab - 21b^2$

3.1.8. $9 - 6b + b^2$

3.1.9. $25 - 36x^4$

3.1.10. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 24$

3.1.11. $16 + 40x^2 + 25x^4$

3.1.12. $1 - y^2$

3.1.13. $5 + 4x - x^2$

3.1.14. $1 + 49a^2 - 14a$

3.1.15. $1 - 49a^2b^2$

3.1.16. $x^{10} + x^5 - 20$

3.1.17. $36 + 12m^2 + m^4$

3.1.18. $4x^2 - 81y^4$

3.1.19. $m^2 + mm + 56n^2$

3.1.20. $1 - 2a^3 + a^6$

3.1.21. $a^2b^8 - c^2$

3.1.22. $x^4 + 7ax^2 - 60a$

3.1.23. $a^8 + 18a^4 + 81$

3.1.24. $100 - x^2y^6$

3.1.25. $4x^2 - 8x + 3$

3.1.26. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$

3.1.27. $25x^2y^4 - 121$

3.1.28. $m^2 - 2mn + n^2 + 5m - 5n - 24$

3.1.29. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$

3.1.30. $a^2m^4n^6 - 144$

3.1.31. $x^8 + x^4 - 240$

3.1.32. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$

3.1.33. $100m^2n^4 - 655z^{12}$

3.1.34. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99$

3.1.35. $1 + a^{10} - 2a^5$

3.1.36. $1 - 9a^2b^4c^6d^8$

3.1.37. $12 - x^2y^2 - xy$

3.1.38. $49m^6 - 70am^3 + 25a^2n^4$

3.1.39. $361x^{14} - 1$

3.2. Soluciones

3.2.1. $(5x+7)(5x+6)$

3.2.2. $(x-1)^2$

3.2.3. $(2a+3)(2a-3)$

3.2.4. $(x+5a)(x-3a)$

3.2.5. $(y^2+1)^2$

3.2.6. $(1+2m)(1-2m)$

3.2.7. $(a-7b)(a+3b)$

3.2.8. $(3-b)^2$

3.2.9. $(5+6x^2)(5-6x^2)$

3.2.10. $(x-y+6)(x-y-4)$

3.2.11. $(4+5x^2)^2$

3.2.12. $(1-y)(1+y)$

3.2.13. $(x+1)(5-x)$

3.2.14. $(1-4a)^2$

3.2.15. $(1-7ab)(1+7ab)$

3.2.16. $(x^5+5)(x^5-4)$

3.2.17. $(m^2+6)^2$

3.2.18. $(2x^3+9y^2)(2x^3-9y^2)$

3.2.19. $(m+8n)(m-7n)$

3.2.20. $(1-a^3)^2$

3.2.21. $(ab^4+c)(ab^4-c)$

3.2.22. $(x^2+12a)(x^2+5a)$

3.2.23. $(a^4+9)^2$

3.2.24. $(10-xy^3)(10+xy^3)$

3.2.25. $(2x-3)(2x-1)$

3.2.26. $(a^3-b^3)^2$

3.2.27. $(5xy^2+11)(5xy^2-11)$

3.2.28. $(m-n+8)(m-n-3)$

3.2.29. $(3b-5a^2)^2$

3.2.30. $(am^2n^3-12)(am^2n^3+12)$

3.2.31. $(x^4+16)(x^4-15)$

3.2.32. $(1+7x^2y)^2$

3.2.33. $(10mn^2+25z^6)(10mn^2-25z^6)$

3.2.34. $(a^2b^2-11)(a^2b^2+9)$

3.2.35. $(1-a^5)^2$

3.2.36. $(1+3ab^2c^3d^4)(1-3ab^2c^3d^4)$

3.2.37. $(xy+4)(xy-3)$

3.2.38. $(7m^3-5an^2)^2$

3.2.39. $(19x^7+1)(19x^7-1)$

4. Problemas que usan factorizaciones

4.1. Enunciados

Problema 4.1.1. *Si* $a+b=9$ *y* $a^2+b^2=45$*, calcula el valor de* ab

Problema 4.1.2. *¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera para cualesquiera valores de* a *y* b*?*
(a) $a^2+b^2=(a+b)^2$
(b) $(a+b)^3-(a+b)^2=a+b$
(c) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
(d) $a^{100}-b^{100}=(a^{50}+b^{50})(a^{25}+b^{25})(a^{25}-b^{25})$
(e) $a^2-b^2=(a+b)^2+2ab$
(f) Sin respuesta

Problema 4.1.3. *Demuestra la siguiente igualdad* $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Problema 4.1.4. *Sean* a *y* b *dos números que cumplen que* $a+b=1$ *y* $a^2+b^2=2$*. Encuentra el valor de* a^3+b^3.

Problema 4.1.5. *Sean* x *y* y *dos números tales que* $x+y=3$ *y* $xy=1$*. Encuentra el valor de* x^3+y^3.

Problema 4.1.6. *Si* a *y* b *son números positivos distintos que cumplen* $a^2+b^2=4ab$*. Hallar el valor de*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

Problema 4.1.7. *Si* $x^2+y^2=6xy$ *y* $x-y\neq 0$*, calcula*

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

Problema 4.1.8. *Si* $x-y=2\sqrt{3}$ *y* $x+y=3\sqrt{2}$*, calcula el valor de* $\left(x^2-y^2\right)^2$.

Problema 4.1.9. *Calcula el valor de*

$$2022^2-2021^2+2020^2-2029^2+\cdots+4^2-3^2+2^2-1^2$$

Problema 4.1.10. *Calcula el valor de*

$$20222021^2-20222022\cdot 20222022$$

4.2. Soluciones

Problema 4.2.1. *Si $a+b=9$ y $a^2+b^2=45$, calcula el valor de ab*
Solución.
usemos que $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, así que tenemos lo síguete

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2+b^2+2ab &= (a+b)^2 \\ 45+2ab &= (9)^2 \\ 45+2ab &= 81 \\ 2ab &= 36 \\ ab &= 18 \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $ab=18$

Problema 4.2.2. *¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera para cualesquiera valores de a y b?*
No *(a)* $a^2+b^2=(a+b)^2$
No *(b)* $(a+b)^3-(a+b)^2=a+b$
Si *(c)* $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
Si *(d)* $a^{100}-b^{100}=(a^{50}+b^{50})(a^{25}+b^{25})(a^{25}-b^{25})$
Si *(e)* $a^2-b^2=(a+b)^2-2ab$
No *(f) Sin respuesta*

Solución.
(a) *Desarrollemos el inciso, suponiendo que es cierta para llegar a una contradicción*

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2+b^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ 0 &= 2ab \\ 0 &= ab \ \boldsymbol{!} \end{aligned}$$

Asi que solo se cumple para $a=0$ o para $b=0$. Por lo que concluimos que (a) no es verdadera para cualesquiera valores de a y b ***(b)*** *Desarrollemos el inciso, suponiendo que es cierta para llegar a una contradicción*

$$\begin{aligned} (a+b)^3-(a+b)^2 &= a+b \\ (a+b)\left((a+b)^2-(a+b)\right) &= a+b \\ \left((a+b)^2-(a+b)\right) &= 1 && \text{si } a+b\neq 0 \\ (a+b)\left((a+b)-1\right) &= 1 \\ x\left(x-1\right) &= 1 && \text{Nombramos } x:=a+b \\ x^2-x &= 1 \\ x^2-x-1 &= 0 \ \boldsymbol{!} \end{aligned}$$

Sabemos que la ecuación cuadrática tiene a los mas dos soluciones $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, así que los valores de a y b que si cumplen (b) son:

$$a+b=0 \quad y \quad a+b=x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad a+b=x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por lo que si tenemos a a fija entonces b ya queda determinada

$$b=-1 \quad y \quad b=-a+x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad b=-a+x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por lo que concluimos que (b) no es verdadera para cualesquiera valores de a y b ***(c)*** *Usemos que $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, con $x=a$ y $y=-b$ asi que*

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a+(-b))^2\\
(a-b)^2 &= a^2+2a(-b)+(-b)^2\\
(a-b)^2(a-b)^2 &= a^2-2ab+(-b)(-b)\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+(+b\cdot b)\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+(+b^2)\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \quad *\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a-b)^2+ab &= a^2+b^2
\end{aligned}$$

Así que concluimos que es cierto $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

* *Notemos que hemos demostrado que $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ apartir de $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, lo cual nos sera de utilidad en ejercicios de factorizaciones.*

(d) *usemos diferencia de cuadrados para ver que*

$$\begin{aligned}
a^{100}-b^{100} &= \left(a^{50}\right)^2-\left(b^{50}\right)^2\\
&= \left(a^{50}+b^{50}\right)\left(a^{50}-b^{50}\right)\\
&= \left(a^{50}+b^{50}\right)\left(\left(a^{25}\right)^2-\left(b^{25}\right)^2\right)\\
&= \left(a^{50}+b^{50}\right)\left(\left(a^{25}+b^{25}\right)\left(a^{25}-b^{25}\right)\right)\\
&= \left(a^{50}+b^{50}\right)\left(a^{25}+b^{25}\right)\left(a^{25}-b^{25}\right)
\end{aligned}$$

por lo que concluimos que se cumple que $a^{100}-b^{100}=(a^{50}+b^{50})(a^{25}+b^{25})(a^{25}-b^{25})$

(e) *Supongamos que es cierta para llegar a una contradicción*

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a+b)^2+2ab\\
a^2-b^2 &= a^2+2ab+b^2+2ab\\
-b^2 &= 2ab+b^2+2ab\\
0 &= 3ab+2b^2+2ab\\
0 &= 4ab+2b^2\\
0 &= b(4a+2b\\
0 &= 4a+2b && si\ b\neq 0\\
-2b &= 4a\\
b &= -2a \ !
\end{aligned}$$

Asi que concluimos que la expresión solo es cierta cuando $b=0$ o $b=-2a$, por lo que que (e) no es verdadera para cualesquiera valores de a y b $a^2-b^2=(a+b)^2+2ab$

Problema 4.2.3. *Demuestra la siguiente igualdad* $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

Solución.

Usaremos que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *para continuar con lo siguiente*

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2\\ &= a^3 + b^3 + 3\left(a^2b + ab^2\right)\\ &= a^3 + b^3 + 3(a)\left(ab + b^2\right)\\ &= a^3 + b^3 + 3(a)(b)\left(a+b\right)\\ &= a^3 + b^3 + 3ab\left(a+b\right)\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que la igualdad $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab$ *es verdadera.*

Problema 4.2.4. *Sean* a *y* b *dos números que cumplen que* $a+b=1$ *y* $a^2+b^2=2$*.Encuentra el valor de* a^3+b^3

Solución.

Vamos a usar que $(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$*. Tenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned}a+b &= 1\\ (a+b)^2 &= 1^2\\ a^2+2ab+b^2 &= 1\\ a^2+b^2+2ab &= 1\\ 2+2ab &= 1\\ 2ab &= -1\\ ab &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora Usar que $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$*, asi pues*

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &= (a+b)(a^2+b^2-ab)\\ &= (1)\left(a^2+b^2-ab\right)\\ &= (1)\left(2-ab\right)\\ &= (1)\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= (1)\left(2+\frac{1}{2}\right)\\ &= (1)\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= (1)\left(\frac{5}{2}\right)\\ &= (1)\left(\frac{4+1}{2}\right)\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $a^3+b^3 = \frac{5}{2}$

Problema 4.2.5. *Sean x y y dos números tales que $x+y=3$ y $xy=1$. Encuentra el valor de x^3+y^3.*
Solución.
Vamos a usar que $(x+y)^2=x^2+2xy+x^2$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\ (3)^2 &= x^2+2(1)+y^2\\ 9 &= x^2+2+y^2\\ 7 &= x^2+y^2\end{aligned}$$

Ahora usemos que $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)\\ &= (x+y)(x^2+y^2-xy)\\ &= (3)(7-1)\\ &= (3)(6)\\ &= 18\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $x^3+y^3=18$.

Problema 4.2.6. *Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2+b^2=4ab$. Hallar el valor de*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

Solución.
Usaremos que las potencias se distribuyen en las multiplicaciones, es decir $(ab)^n=a^nb^n$, y los productos notables que hemos visto.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}\\ &= \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}\\ &= \frac{4ab+2ab}{4ab-2ab}\\ &= \frac{6ab}{2ab}\\ &= 3\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=3.$$

Problema 4.2.7. *Si* $x^2 + y^2 = 6xy$ *y además* $x - y \neq 0$, *calcula*

$$\frac{x+y}{x-y}.$$

Solución.

Notemos que la condición $x - y \neq 0$ *es para que exista la división. Veamos el binomio al cuadrado*

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1)$$
$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad (2)$$
$$(x+y)^2 = 6xy + 2xy \quad (3)$$
$$(x+y)^2 = 8xy \quad (4)$$
$$x + y = \sqrt{8xy} \quad (5)$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (6)$$
$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \quad (7)$$
$$(x-y)^2 = 6xy - 2xy \quad (8)$$
$$(x-y)^2 = 4xy \quad (9)$$
$$x - y = \sqrt{4xy} \quad (10)$$

Así que sustituyendo tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x-y} &= \frac{\sqrt{8xy}}{\sqrt{4xy}} \\ &= \frac{\sqrt{8}\sqrt{xy}}{\sqrt{4}\sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{4}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{2}$$

Problema 4.2.8. *Si* $x - y = 2\sqrt{3}$ *y* $x + y = 3\sqrt{2}$, *calcula el valor de* $\left(x^2 - y^2\right)^2$.

Solución.

Usemos diferencia de cuadrados y reescribamos la expresión.

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - y^2\right)^2 &= ((x+y)(x-y))^2 \\
&= ((x+y)^2(x-y)^2 \\
&= ((3\sqrt{2})^2(2\sqrt{3})^2 \\
&= (3^2(\sqrt{2})^2)(2^2(\sqrt{3})^2) \\
&= (3^2(\sqrt{2})^2)(2^2(\sqrt{3})^2) \\
&= (9 \cdot (2))(4 \cdot (3)) \\
&= (18)(12) \\
&= 216
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 216.$$

Problema 4.2.9. *Calcula el valor de*

$$2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2029^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

Solución.
Usemos diferencia de cuadrado para factorizar cada dos dígitos consecutivos para posteriormente reescribirl la expresión y usar suma de gauss.

$$\begin{aligned}
&2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2029^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\
&= (2022^2 - 2021^2) + (2020^2 - 2029^2) + \cdots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) \\
&= (2022 + 2021)(2022 - 2021) + (2020 + 2029)(2020 - 2019) + \cdots + (4 + 3)(4 - 3) + (2 + 1)(2 - 1) \\
&= (2022 + 2021)(1) + (2020 + 2019)(1) + \cdots + (4 + 3)(1) + (2 + 1)(1) \\
&= (2022 + 2021) + (2020 + 2019) + \cdots + (4 + 3) + (2 + 1) \\
&= 2022 + 2021 + 2020 + 2019 + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1 \\
&= \frac{(2022)(2022 + 1)}{2} \\
&= \frac{(2022)(2023)}{2} \\
&= 1011 \cdot 2023 \\
&= 2045253
\end{aligned}$$

Así que concluimos

$$2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2029^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 2045253$$

Problema 4.2.10. *Calcula el valor de*

$$20222021^2 - 20222022 \cdot 20222022$$

Usemos diferencia de cuadrado para factorizarlo

$$\begin{aligned}
220222021^2 - 20222022 \cdot 20222022 &= 20222021^2 - 20222022^2 \\
&= (20222021 + 20222022)(20222021 - 20222022) \\
&= (40444043)(-1) \\
&= -40444043
\end{aligned}$$

Asi que se concluye lo sigueinte

$$20222021^2 - 20222022 \cdot 20222022 = -40444043.$$