FORMULARIO DE ÁLGEBRA

Razones y proporciones.

Razón (o *relación*) de dos cantidades es el cociente de dividir una cantidad entre la otra. La razón de a a b se escribe $a{:}b$, o bien $\frac{a}{b}$; a y b son llamados los términos de la razón.

Proporción es la igualdad de dos razones, éstas deben estar necesariamente expresadas en las mismas unidades. Se llaman términos de una proporción a las cuatro cantidades que entran en ella. Los términos primero y tercero se llaman *antecedentes*; el segundo y el cuarto, *consecuentes*. El primero y el cuarto se llaman *extremos*; el segundo y el tercero, *medios*.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad a:b::c:d, \quad a:b=c:d$$

Términos: a, b, c, d.
Antecedentes: a, c.
Consecuentes: b, d.
Extremos: a, d.
Medios: b, c.

Cuarta proporcional.- Se llama cuarta proporcional de tres cantidades dadas a la cantidad que forma el cuarto término en una proporción, cuyos otros términos son las tres cantidades dadas tomadas en orden.

Proporción continua.- Se llama proporción continua aquella en que los medios son iguales.

Media proporcional.- Son los términos iguales de una proporción continua, también son conocidos como la media geométrica.

TEOREMAS RELATIVOS A PROPORCIONES

"En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios", e inversamente, "Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, uno de los pares puede hacer las veces de medios y el otro par, de extremos de una proporción".

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc.$$

MÉTODOS DE TRANSFORMACIÓN DE UNA PROPORCIÓN EN OTRA

1. *Método de inversión*: En toda proporción se pueden invertir las dos razones, de lo cual resulta otra proporción.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

2. *Método de alternación*: Si se cambian entre sí los medios, o entre sí los extremos de una proporción, se obtiene una nueva proporción.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

3. *Método de adición* (o de *sustracción*): En toda proporción pueden agregarse (o restarse) a los antecedentes sus respectivos consecuentes de lo cual resulta otra proporción.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \text{o} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Leyes de los exponentes y radicales

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, con $a\neq 0$
3. $a^0=1$, con $a\neq 0$
4. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, con $a\neq 0$
5. $(ab)^n=a^n b^n$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, con $b\neq 0$

7. $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$ 8. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ 9. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

10. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$ 11. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$

Productos notables y factorización

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}x^{n-k}y^k + \ldots + y^n$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

En ambas fórmulas los coeficientes son iguales, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}$, con $k! = 1\times2\times3\times\ldots\times k$ y, además, $0! = 1$.

A la parte $\binom{n}{k}$ se le llama *coeficiente binomial* y tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, propiedad del triángulo de Pascal.
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots(-1)^n\binom{n}{n} = 0$
- $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$
- $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$

- $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$
- $\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{p-2}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}+\ldots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{p}$
- $(1)\binom{n}{1}+(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}+\ldots+(n)\binom{n}{n}=(n)\,2^{n-1}$
- $(1)\binom{n}{1}-(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}-\ldots(-1)^{n-1}(n)\binom{n}{n}=0$

La potencia n de un polinomio con p términos está dada por:

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!n_2!\ldots n_p!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\ldots x_p^{n_p}=\sum\binom{n}{n_1,n_2,n_2,\ldots,n_p}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\ldots x_p^{n_p},$$

donde la sumatoria denotada por $\sum$ se efectúa sobre todos los enteros no negativos $n_1,n_2,n_3,\ldots,n_p$ para los cuales $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_p=n$, es decir, la suma de ellos es n. Similarmente, a la parte del coeficiente de cada término se le llama *coeficiente multinomial*, esto es $\binom{n}{n_1,n_2,n_2,\ldots,n_p}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_2!\ldots n_p!}$.

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$
$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$
$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$
$$x^6-y^6=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$(x^4+4y^4)=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$$

En general,

$$x^{2n+1}-y^{2n+1}=(x-y)(x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\ldots+y^{2n})=$$
$$=(x-y)(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2)(x^2-2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2)\ldots(x^2-2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2)$$
$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots+y^{2n})=$$

$$= (x+y)(x^2+2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2)(x^2+2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2)...(x^2+2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2)$$

$$(x^{2n}-y^{2n}) = (x-y)(x+y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...) =$$

$$= (x-y)(x+y)(x^2-2xy\cos\frac{\pi}{2n}+y^2)(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{2n}+y^2)...(x^2+2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}+y^2)$$

$$(x^{2n}+y^{2n}) = (x^2+2xy\cos\frac{\pi}{2n}+y^2)(x^2-2xy\cos\frac{3\pi}{2n}+y^2)...(x^2+2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+y^2)$$

Leyes de logaritmos

Definición: $L = \log_a N \Leftrightarrow N = a^L$, con $0 \neq a \neq 1$

Al número L se le llama el logaritmo de N en base a; y, a su vez, a N se le llama el antilogaritmo de L en base a.

1. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

2. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

3. $\log_a M^n = n\log_a M$

4. $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a M}{n}$

5. $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$