Funciones Generatrices

Isaias Fernando de la Fuente Jiménez

Diciembre 2018

1 Introducción

En este pequeño documento damos una introducción al tema de Funciones Generatrices, con material sacado del libro Combinatoria para Olimpiadas de la serie Cuadernos de Olimpiada, escrito por Pablo Soberón Bravo. Para más problemas e información sobre el tema, recomiendo leer el libro.

2 Funciones Generatrices

Las funciones generatrices son una herramienta matemática que utilizamos para trabajar con sucesiones, usualmente nos ayudan a encontrar fórmulas cerradas para sucesiones definidas mediante una ecuación recursiva (por ejemplo, expresar los términos de Fibbonacci sin aludir a los anteriores) , lo que hacemos es asignar a cada sucesión una función de la siguiente forma:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) < - > f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

A la función $f(x)$ se le llama **función generatriz** de la sucesión $(a_0, a_1, a_2, ...)$. Hay que notar que $f(x)$ sólo es una manera de "hablar" de la sucesión, por lo que nunca nos va a interesar evaluarla en algun punto. A a_0 se le llama el **término independiente** de $f(x)$.
Se pueden definir la suma y el producto para funciones generatrices, estas operaciones se definen como se esperaría y hacen que las funciones generatrices se comporten como si fueran polinomios infinitos:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ...$$

En el producto, el coeficiente de x^k es $a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + ... + a_1b_{k-1} + a_0b_k$.

Proposición 1: Para cualquier funcion generatriz $f(x)$ cuyo término independiente sea distinto de 0, existe una única función generatriz $g(x)$ tal que $f(x)g(x) = 1$.

Ejemplo 1: Sea $f(x)$ la función generatriz asociada a la sucesión $(1, 1, 1, 1, ...)$, entonces $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Las demostraciones de la proposición y el ejemplo se dejan como ejercicio, debería ser sencillo si se han entendido bien las definiciones.

Ejercicio 1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ las funciones generatrices asociadas a las sucesiones $(a_0, a_1, a_2, ...)$ y $(b_0, b_1, b_2, ...)$. Demuestra que si k es un entero positivo y:

- $b_n = a_{n+k}$ para todo n y $a_t = 0$ si $t < k$, entonces $f(x) = x^k g(x)$.
- $b_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ para todo n, entonces $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.
- $b_n = t^n$ para todo n, entonces $g(x) = \frac{1}{1-tx}$.
- $b_n = n$ para todo n, entonces $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
- $b_n = \binom{n}{k}$ para todo n, entonces $g(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{(k+1)}}$.
- $b_n = \binom{n+k}{k}$ para todo n, entonces $g(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- $b_n = \binom{k}{n}$ para todo n, entonces $g(x) = (1 + x)^k$.
- $b_n = t^n \binom{k}{n}$ para todo n, entonces $g(x) = (1 + tx)^k$.

Solución:

- Basta notar cómo se recorren los coeficientes.
- $$\begin{aligned} (1-x)g(x) &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + ... \\ &- \ 0 + \quad (a_0)x \quad + \quad (a_0 + a_1)x^2 + ... \\ &= \ a_0 \ + \quad a_1 x \quad + \quad a_2 x^2 \quad + ... \qquad = f(x). \end{aligned}$$
- Similar al punto anterior.
- Obtener la sucesión asociada a $(1 - x)^2 g(x)$.
- Procederemos por inducción sobre k, el caso base $k = 1$ es el punto anterior, ahora, suponiendo que cumple para k, veamos que para $k + 1$, $g(x) = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \frac{1}{1-x} x$.
  Ya conocemos los coeficientes de $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$, multiplicar por x al final sólo es recorrer los coeficientes, y los coeficientes de la función generatriz $\frac{1}{1-x}$ son todos 1, así, note (si no lo nota haga el trabajo en papel necesario)

que basta demostrar que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + ...\binom{k}{k}$$

Esta igualdad se puede demostrar con el siguiente razonamiento: Queremos elegir $k+1$ elementos de $n+1$ posibles, para esto hay $\binom{n+1}{k+1}$, ahora contemos de otra manera, si ponemos los elementos en fila y los numeramos de derecha a izquierda, al fijar al i'esimo elemento como el más a la izquierda (o el más grande) que se va a tomar, nos quedan $\binom{i-1}{k}$ formas de completar nuestra elección; i puede ir desde $k+1$ hasta $n+1$, así, se demuestra la igualdad.

- Usando el punto anterior y el primero.
- Es el desarrollo del binomio elevado.
- También, eleva el binomio.

Un ejemplo Tratemos de resolver el siguiente problema: Supongamos que tenemos 9 objetos indistinguibles y 9 espacios, y queremos contar el número de maneras de acomodar los objetos en los espacios (puede haber varios en el mismo espacio).
Solución. Ya sabemos, resolviendo con separadores por ejemplo, que la respuesta es $\binom{9+8}{9} = \binom{17}{9}$, tratemos de usar las funciones generatrices ahora: Tomemos la función $1 + x + x^2 + x^3 + ...$, la cuál ya sabemos que es $f(x) = \frac{1}{1-x}$, digamos que "elegir" x^k representa poner k objetos en el primer espacio, entonces tenemos que elegir $k_1, k_2, ..., k_9$ con suma 9, las formas de hacer esto están contadas en el coeficiente de x^9 en la función generatriz $g(x) = f(x)f(x)...f(x)$, 9 veces (una para cada k), así que $g(x) = (\frac{1}{1-x})^9$, por el ejercicio anterior, $g(x)$ es la función asociada a la sucesión $b_0, b_1, b_2, ...$ con $b_n = \binom{n+8}{8}$, así, el coeficiente de x^9 es $\binom{17}{8} = \binom{17}{9}$, tal como queríamos demostrar.

3 Números de Fibonacci

. Los números de Fibonacci están definidos recursivamente como sigue:

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Vamos a buscar una fórmula no recursiva para los números de Fibonacci usando su función generatriz. Si $f(x)$ es la función generatriz de los números de Fibonacci, entonces:

$$f(x) = 0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + ...$$

$xf(x) = 0 + 0x + F_1x^2 + F_2x^3 + ...$

$x^2f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + F_1x^3 + ...$

Y, $(1 - x - x^2)f(x) = 0 + F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + ...$

Por la fórmula recursiva con que se definió la sucesión, los términos cuyo exponente es mayor o igual a 3 se cancelan, y como $F_2 = F_1$, nos queda:

$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{x^2+x-1}$.

Ya tenemos la función generatriz, ahora, podemos factorizar el denominador, como:

$$x^2 + x - 1 = (x + \phi)(x - \tfrac{1}{\phi}) \text{ (recordando que } \phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\text{)}.$$

Así, tenemos que $f(x) = \frac{-x}{(x+\phi)(x-\frac{1}{\phi})}$, ¿y qué?, bueno, la idea aquí es pensar que los números de Fibonacci F_n son de la forma $(c_1)(r_1)^n + (c_2)(r_2)^n$, ¿quiénes son r_1 y r_2?, tendrán que ver con ϕ y $\frac{1}{\phi}$, ahora, tenemos a $f(x)$, lo que hacemos es buscar números reales A y B tales que:

$f(x) = \frac{A}{x+\phi} + \frac{B}{x-\frac{1}{\phi}}$.

Es decir, $\frac{-x}{(x+\phi)(x-\frac{1}{\phi})} = \frac{A}{x+\phi} + \frac{B}{x-\frac{1}{\phi}}$.

$-x = A(x - x - \frac{1}{\phi}) + B(x + \phi)$.

$-x = (A + B)x + \frac{B\phi^2 - A}{\phi}$.

Entonces $A + B = -1, \quad B\phi^2 - A = 0$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos que

$A = \frac{-\phi}{\sqrt{5}}. \qquad B = \frac{-1}{\phi\sqrt{5}}$.

Con esto,

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\frac{-1}{\phi}x}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\phi x}$

¡Yupi!, por el ejercicio 1 (tercer punto), sabemos las sucesiones asociadas a

$g(x) = \frac{1}{1-(\frac{-1}{\phi}x)}$ y a

$h(x) = \frac{1}{1-\phi x}$.

Nota entonces que

$$F_n = \frac{\phi^n - (\frac{-1}{\phi}^n)}{\sqrt{5}}.$$

Este truco se puede hacer siempre que tengamos una recursión, usando la fórmula para ver la función generatriz como una fracción de polinomios, y luego, "partir" esa fracción en funciones generatrices conocidas. La ventaja de esta técnica es que no se nos tenía que ocurrir la fórmula cerrada.

4 La Derivada

. Cuando uno trabaja con funciones sobre los números reales, una de las ideas que más sirven es la derivada. Sin embargo, recordemos que dijimos que las funciones generatrices eran sólo una manera de referirnos a las sucesiones. Por eso nunca estamos pensando en evaluar la función en puntos específicos y mucho menos en derivarla.

A pesar de esto, la teoría de derivación se puede recrear para funciones generatrices aunque con un enfoque muy distinto al usual. Lo que queremos es asociarle a cada función generatriz $f(x)$ otra función generatriz $f'(x)$ (es decir, una sucesión) la cual llamaremos la derivada de $f(x)$.

Si $f(x)$ está asociada a la sucesión $(a_0, a_1, a_2, ...)$, entonces $f'(x)$ va a estar asociada a la sucesión $(b_0, b_1, b_2, ...)$ tal que $b_n = (n+1)a_{n+1}$ para cada n. Las personas que ya conozcan la derivada usual pueden ver que la definición coincide para los polinomios.Ahora veamos que con nuestra definición, se cumplen las propiedades usuales de la derivada.

Proposición Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones generatrices asociadas a las sucesiones $(a_0, a_1, a_2, ...)$ y $(b_0, b_1, b_2, ...)$ respectivamente, entonces se cumple que

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $(\frac{1}{g})'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$ (si $b_0 \neq 0$)
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (si $b_0 \neq 0$).

Las demostraciones necesitan simple manipulación algebraica (que recomiendo hacer).

5 Problemas

.

Problema 1. Demuestra que $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + ...$
Nota: Cuando la parte de abajo es más grande que la parte de arriba, los sumandos son 0.

Problema 2. Se tiene el conjunto $A = 1, 2, 3, ..., n$. Por cada subconjunto no vacío de A, consideramos el inverso de su producto. Encuentra la suma de estos números.

Problema 3. Sea a_n el número de sucesiones de tamaño n usando sólo los números 1,2,3,4 con una cantidad impar de unos. Encuentra una fórmula cerrada para a_n.

Problema 4. Demuestra que (como funciones generatrices)

$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)...$

Problema 5. **(USA 1996)** Decide si existe un subconjunto X de los enteros tal que la ecuación $a + 2b = n$ con $a, b \in X$ tenga exactamente una solución para todo entero no negativo.

Problema 6. Sea a_n una sucesión tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ si $n \geq 2$. Encuentra una fórmula cerrada para a_n.