Funciones y relaciones

Entrenamiento #7 para el nacional
29 de Octubre-1 de Noviembre de 2015
Por: Argel y Fernando

Resumen

En el presente material se hablará acerca de las funciones y relaciones, probablemente en algún momento se ha trabajado con la idea de una función, por ejemplo las funciones aritméticas, la idea es profundizar un poco más en este tema, presentando algunos de los conceptos relacionados a las funciones que nos servirán para entenderlas mejor.

1. Teoría

En matemáticas, se dice que una magnitud o cantidad es función de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo el área A de un círculo es función de su radio r, otro ejemplo sería la duración t de un viaje de tren entre dos ciudades separadas por una distancia d de 150 km depende de la velocidad v a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad $t = \frac{d}{v}$. En estos ejemplos, a la primera magnitud (el área, tiempo) se le denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende(el radio, la velocidad) es la variable independiente.

En álgebra abstracta, el concepto general de función, se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto. Por ejemplo, cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural o el cero:

$$\begin{gathered}\vdots\\ -2 \to +4\\ -1 \to +1\\ 0 \to 0\\ 1 \to +1\\ 2 \to +4\\ \vdots\end{gathered}$$

Esta asignación constituye una función entre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

1.1. Un repaso de notación

En la siguiente lista se va a manejar una notación en específico para expresar algunas ideas, por ello haremos un pequeño repaso con el propósito de tener muy claro lo que se desea mostrar

- $\mathbb{N}$ Los números naturales que abarcan los números $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ en ocasiones también se usa $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{N}_1$ cuando se desea excluir a 0
- $\mathbb{Z}$ Los números enteros tanto positivos como negativos , $-2 - 1, 0, 1, 2$

- $\mathbb{Q}$ Los números racionales, es decir, todos los números que se pueden expresar de la forma $\frac{p}{q}$ donde q sea diferente a 0
- $\mathbb{R}$ Los reales que contiene tanto a los números racionales como los irracionales
- $\{\}$ Un conjunto, o sea una colección de elementos
- $|$ Este símbolo lo usaremos para decir, tal que
- $a \in A$ donde $\in$ significa pertenece, a pertenece al conjunto A, por lo tanto A tiene como uno de sus elementos a
- $\subseteq$ subconjunto
- (a, b) un par ordenado que es una coleción de dos elementos

2. Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b), donde a es un elemento de A y b es un elemento de B. Tanto a como b son componentes de esa pareja ordenada. El producto cartesiano entre A y B se denota como $A \times B$. Un ejemplo sencillo, si $A = \{choclo, borreca, borregato\}$ y $B = \{1, 7\}$, entonces

$$A \times B = \{(choclo, 1), (choclo, 7), (borreca, 1), (borreca, 7), (borregato, 1), (borregato, 7)\}$$

El producto cartesiano toma todos los elementos de A y los junta con un elemento de B de tal manera que se tienen todas las posibles combinaciones entre esos conjuntos. Escrito de manera formal

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Como podrán observar, esto se parece mucho a lo que se hace en un plano cartesiano. No por nada tienen el mismo nombre.

3. Relaciones

Una relación $\mathcal{R}$ entre un conjunto A y otro B, es un subconjunto de $A \times B$. De ahora en adelante, se usará $\mathcal{R}$ o $\sim$ indistintamente. Así, a está relacionado con b, se denota como $a\mathcal{R}b$ o bien $a \sim b$.

Un ejemplo de una relación: Tomemos el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que a y b están relacionados $a \sim b$ si a es menor que b. En vez de $a \sim b$ normalmente se escribe $a < b$ y $\sim$ lo denotamos por $<$.

Decimos que una relación $\mathcal{R}$ está sobre un conjunto E si $\mathcal{R}$ es un subconjunto de $E \times E$, que en notación común se denota como E^2. Por otro lado, existe una clasificación de las relaciones dada por sus propiedades. Esta clasificación es:

Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto E se llama

- reflexiva si $x \sim x$, para todo $x \in E$. Esto es $(x, x) \in \mathcal{R}$
- antireflexiva si no existe $x \in E$ tal que $x \sim x$. Esto es, $(x, x) \notin \mathcal{R}$.
- simétrica si, para todo $x, y \in E$ tenemos que $x \sim y$ implica que $y \sim x$
- antisimétrica si para cada $x, y \in E$ que cumplen ambas condiciones $x \sim y$, $y \sim x$, entonces se sigue que $x = y$

- transitiva si para $x, y, z \in E$, cuando se cumplen $x \sim y$, $y \sim z$ se sigue que $x \sim z$
- de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Retomando el ejemplo anterior de la relación $\mathcal{R}$ dada por $<$. Esta relación no es reflexiva, ya que el número no puede ser menor a si mismo. De esta manera la relación $<$ es antireflexiva. Tampoco se puede decir que es simétrica, ya que si $a < b$ se concluye que b no puede ser menor que a, $<$ no puede ser antisimétrica porque no se puede cumplir $a < b$ y $b < a$ al mismo tiempo. Sin embargo la relación $\leq$ si es antisimétrica. Tanto $<$ como $\leq$ son transitivas.
Existe mucho más contenio con respecto a las relaciones, existen libros enteros que se dedican a estudiar las relaciones de equivalencia. La idea de presentarles la idea de relación es para que puedan diferenciarla de las funciones.

4. Funciones

Sean A y B conjuntos cualesquiera. Una función (también conocido como mapeo o aplicación) f de A en B (denotado por $f : A \to B$), relaciona a cada elemento de A un único elemento de B.

Esto es f en esencia es un subconjunto de $A \times B$, la diferencial principal entre una relación y una función es que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. Una función siempre es una relación, pero una relación no necesariamente es una función.

Para ilustrar lo anterior, f se puede ver como el subconjunto $f = \{(a, b)|a \in A \ y \ b \in B\}$ que cumple siempre que cuando $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$ se sigue que $b = b'$. Normalmente en lugar de $(a, b) \in f$ se usa la notación $f(a) = b$, aunque la manera habitual de denotar una expresión es

$$f : A \to B$$

$$a \to b$$

4.1. Dominio y codominio

Dos definiciones importantes

- Sea $f : A \to B$ una función. El conjunto $D_f = \{x \in A| \ existe \ y \in B \ tal \ que \ y = f(x)\}$ se le llama dominio de f. También se puede expresar como los valores posibles de x
- El conjunto $V_f = \{y \in B| \ existe \ x \in A \ con \ f(x) = y\}$ se le llama codominio o rango o imagen de f. Para ser más específico se puede hacer una distinción entre codominio y rango, ya que codominio hace referencia a los valores posibles de y, mientras que rango es para los valores verdaderos de y

Usualmente A es el dominio y B es el rango, pero esto no tiene que necesariamente ser de esta manera. Pensemos en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple $x \to x^2$, esto es $f(x) = x^2$. Dicha función tiene como dominio $\mathbb{R}$ pero el codominio no incluye a ningún número negativo. En otras palabras, $V_f \subseteq B$. Lo que si pasa, es que $D_f = A$.

A continuación algunos ejemplos de como determinar el dominio de una función, considere la función $f(x) = x-2$, en realidad no existe una restricción para los valores de x, por lo tanto el dominio es

$$D = \{x|x \in \mathbb{R}\}$$

Este ejemplo fue relativamente sencillo, pero que tal si pensamos en la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, recordemos que no se puede dividir entre 0, por lo tanto, para determinar el dominio de esta función se buscan los valores en los que $x^2 - 4 = 0$, pero con esto se tiene una diferencia de cuadrados $(x + 2)(x - 2) = 0$, por ende $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, con lo que se determina

$$D = \{x|x \in \mathbb{R}, x \neq 2, -2\}$$

Ahora vamos a analizar la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, como $f(x)$ está en los reales no se puede tener la raíz cuadrada de un número negativo(resultando en un número imaginario), entonces interesan los valores de x en los que

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$(3 - x)(3 + x) \geq 0$$

entonces $-3 \leq x$, $x \leq 3$, representado

$$D = \{x | x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$$

4.2. Tipos de funciones

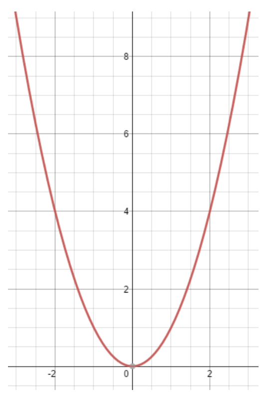
Una función $f : A \to B$ se llama

- Suryectiva ó sobreyectiva ó sobre ó suprayectiva si $V_f = B$, esto es, si para todo $y \in B$ existe x tal que $f(x) = y$.
- inyectiva ó uno a uno ó $1 - 1$ si para todo $x, y \in A$ se cumple que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.
- biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

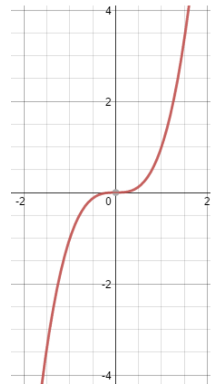
Al hablar de funciones en los números reales también se tienen otras definiciones que es importante tomar en cuenta y que pueden ser de gran utilidad. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces se dice que la función es

- par si cumple que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D_f$
- impar si cumple que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in D_f$

Sin embargo no todas las funciones tienen paridad, en dado caso se dice que la función no tiene paridad. Un ejemplo de una función par es la función $f(x) = x^2$ ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$



en las funciones pares su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Ahora que ya se ha visto un ejemplo de una función par, hace falta proseguir con una impar, consideremos la función $f(x) = x^3$ en esta se tiene que $-f(-x) = -(-x^3) = x^3$



la gráfica de las funciones impares es simétrica con respecto al origen.

4.3. Operaciones con funciones

También se pueden realizar diversas operaciones con funciones:

Suma y resta de funciones

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Producto de funciones

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Si $g(x) \neq 0$ para toda x, el cociente de las funciones es

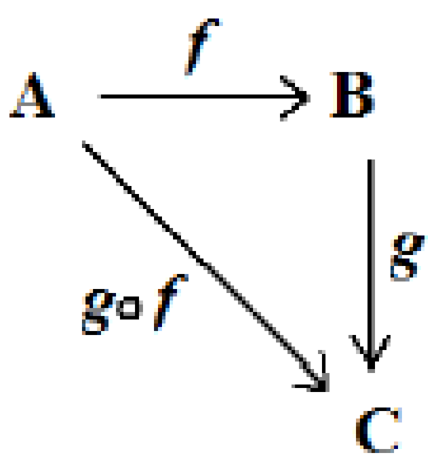
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4.4. Composición de funciones

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ donde la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la función composición

$$(g \circ f) : A \to C$$

como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todos los elementos a de A. Si se prefiere, se puede escribir $g \circ f(x) = g(f(x))$



A continuación un ejemplo de como se hace la composición de funciones, consideremos dos funciones $f(x) = -4x + 9$ y $g(x) = 2x - 7$, encuentre $(f \circ g)(x)$

$$f(2x-7) = -4(2x-7) + 9$$

$$f(2x-7) = -8x + 37$$

Por lo tanto $(f \circ g)(x) = -8x + 37$, pero ¿qué sucede si nos piden encontrar $(g \circ f)(x)$?, vamos a ver

$$g(-4x+9) = 2(-4x+9) - 7$$

$$g(-4x+9) = -8x + 11$$

Es posible observar que $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ dieron resultados diferentes, por lo tanto no son necesariamente iguales.

5. ¿El inverso de una función?

Sea f una función real biyectiva cuyo dominio sea el conjunto A e imagen sea el conjunto B. Se puede demostrar que f es estrictamente creciente o decreciente en el conjunto A (así que los invitamos a que lo demuestren). Por lo tanto, la función inversa o recíproca de f, denotada por f^{-1}, es la función de dominio B e imagen A definida por la siguiente regla

$$f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Lo que es equivalente a decir que $f^{-1} \circ f(a) = a$ para todo $a \in A$ y que al mismo tiempo $f \circ f^{-1}(b) = b$ para todo $b \in B$. Para obtener el inverso de una función se realiza lo siguiente:

- Recordar que $f(x)$ representa a y
- Sustituir las x de la función por y, mientras que las x se sustituyen por las y
- Despejar la nueva y de la ecuación, con esto ya se tiene la $f^{-1}(x)$

Por ejemplo consideremos la función $f(x) = \sqrt{x-3}$, vamos a tratar de obtener su inversa

$$y = \sqrt{x-3}$$

$$x = \sqrt{y-3}$$

$$x^2 + 3 = y$$

Por lo tanto $f^{-1}(x) = x^2 + 3$, para estar seguros podemos hacer la prueba

$$f \circ f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+3-3} = x$$

$$f^{-1} \circ f = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x$$

Efectivamente tenemos el inverso de la función. Nota importante, la notación f^{-1} no representa un exponente,es decir

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

6. Agregados culturales

1. Yugioh g(x) protagonizando a Jaden Yuki con sus héroes elementales de un conjunto, Yugioh 5dx y Yugioh arc(V)
2. Fernando cree que no juego tan bien con Peach (lamentablemente estoy de acuerdo)
3. $2-0$
4. Guadalajara en el 2011 del 14 al 30 de Octubre fue anfitirión de los juegos Panamericanos
5. José Ignacio Barradas Bribiesca (Mejor conocido como *Nacho*) es la persona que comúnmente anuncia con una gran voz: "¡Jóvenes, les quedan 5 minutos!", antes de que termine cada examen. En 2011, se cuenta que Nacho lo hizo cuando faltaban 6 minutos.

7. Ejercicios

1. Determina cuál de las siguientes relaciones es una función:
    a) $\{(2,3),(3,4),(5,1),(6,2),(2,4)\}$
    b) $\{(2,3),(3,4),(5,1),(6,2),(7,3)\}$
    c) $\{(2,3),(3,4),(5,1),(6,2),(3,3)\}$
2. La circunferencia (completa) de radio 1 centrada en el origen, ¿representa de manera gráfica a una función o a una relación?
3. ¿Qué debe cumplir una gráfica para que pueda ser una función?
4. Supongamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Escribe de manera formal qué entiendes cuando te dicen que f es una función:
    a) creciente
    b) decreciente
    c) no-creciente;
    d) no-decreciente;
    e) estrictamente creciente;
    f) estrictamente decreciente;
5. Encuentra el dominio y el rango (dentro de los reales) de las siguientes funciones:
    a) $f(x)=3x-4$;
    b) $f(x)=x^2+x-2$;
    c) $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$;
    d) $f(x)=\frac{3x-4}{5x-1}$;
    e) $f(x)=\sqrt{\frac{3x-4}{5x-1}}$;
    f) $f(x)=\frac{16-x^2}{x^2+7x+12}$
    g) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$
    h) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

6. Sea $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = x^2 + 1$. Encuentra los siguientes
   a) $f(g(-3))$
   b) $f(h(7))$
   c) $g \circ h(24)$
   d) $g \circ h \circ f(-9)$
   e) $f(-2t) - g(-2t)$
   f) $g(f(3 + x))$
   g) $(\frac{f}{g})(\frac{n}{4})$
   h) $(5h + f)(\frac{z}{2})$
7. Sobre paridad de funciones:
   a) Encuentra todas las funciones que sean pares e impares al mismo tiempo.
   b) Encuentra un ejemplo de dos funciones distitas de cero, una par y la otra impar, de manera que su suma no tenga paridad
   c) Prueba que la suma de dos funciones pares es par, y que un múltiplo costante de una función par es par
   d) Prueba que la suma de dos funciones impares es impar, y que un múltiplo constante de una función impar es impar
   e) Prueba que el producto de dos funciones pares es par
   f) ¿El producto de dos funciones impar es impar, es par o no tiene paridad? Justifica tu respuesta
   g) Prueba que la composición de dos funciones pares es par, y que la composición de dos funciones impares es impar es impar
   h) Prueba que la composición de cualquier función con una función par es par. ¿Es cierto al revés?
   i) Cierto o falso: la composición de una función par y una impar es impar
8. Muchas veces una función no es uno a uno, pero es posible restringir el dominio de la función para convertirla en uno a uno y definir una inversa para esta función restringida. Por ejemplo:$\sqrt{x}$ es la inversa de x^2 restringida al intervalo $[0, \infty]$
   a) La función $\sin x$ no es uno a uno. ¿Cómo podemos restringir su dominio para obtener una función que sea uno a uno?
   b) Explica como podemos usar la parte *a* para definir la conocida función $\arcsin x$(también conocida como $\sin^{-1} x$).
9. Encuentra las funciones inversas de las siguientes funciones, especificando el dominio y el rango de cada una de ellas. En caso de tener algún conflicto, ¿qué se puede hacer para que las funciones resultantes efectivamente sean inversas?
   a) $f(x) = 3x$
   b) $f(x) = 2x + 5$
   c) $f(x) = x^3$
   d) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
   e) $f(x) = e^x$
   f) $f(x) = 2^x$
10. Haz la gráfica de algunas de las funciones del problema 9, junto con las de sus inversas. ¿Qué podemos decir respecto a la gráfica de una función y su inversa?
11. Grafica las funciones x^2 y 2^x. ¿Cuántas veces se intersecan sus gráficas? Encuetra al menos uno de estos puntos de intersección. ¿Cuál de estas funciones crece más rapidamente?¿Cómo podrías demostrarlo?

8. Problemas

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones reales:

   a) $\frac{\ln(2-\sin x)}{\sqrt{x^3-8}}$;

   b) $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sin(\frac{x}{2}+\pi)}$;

   c) $(e^x-2)^x$;

   d) $\ln(\frac{2-x}{2+x})$;

2. Sea $S(x)=x^2$, $P(x)=2^x$ y $s(x)=\sin x$. Encuentra cada una de las siguientes

   a) $(S\circ P)(y)$

   b) $(S\circ s)(y)$

   c) $(S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)+s(t^3)$

3. Expresa cada una de las siguientes funciones en términos de S, P y s, usando solamente $+$, $\cdot$ y $\circ$ (por ejemplo la respuesta al inciso a) es $P\circ s$). En cada caso tu respuesta debe ser una función.

   a) $f(x)=2^{\sin x}$

   b) $f(x)=\sin 2^x$

   c) $f(x)=\sin x^2$

   d) $f(x)=\sin^2 x$ (recuerde que $\sin^2 x$ es una abreviación de $(\sin x)^2$).

   e) $f(t)=2^{2^t}$

   f) $f(u)=\sin(2^u+2^{u^2})$

   g) $f(a)=2^{\sin^2 a}+\sin(a^2)+2^{\sin(a^2+\sin a)}$

4. a) Si $x_1,\dots,x_n$ son números distintos, encuentra un polinomio f_i de grado $n-1$ que sea 1 en x_i y 0 en x_j para $j\neq i$

   b) Ahora encuentra un polinomio de grado $n-1$ de manera que $f(x_i)=a_i$, donde $a_i,\dots,a_n$ son números dados.(Es útil usar las funciones f_i de la parte a. La fórmula que obtendrás se llama Fórmula de interpolación de Lagrange).

5. a) Prueba que para cualquier función polinómica f, y cualquier número a, existe un polinomio g, y un número b, tales que $f(x)=(x-a)g(x)+b$ para toda $x\in\mathbb{R}$.

   b) Prueba que si $f(a)=0$, entonces $f(x)=(x-a)g(x)$ para algún polinomio g

   c) Prueba que si f es un función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo más n raíces reales, i.e., hay a lo más n números a con $f(a)=0$.

   d) Prueba que para cada n exste un polinomio de grado n con n raíces. Si n es par encuentra un polinomio de grado n que no tenga raíces y si n es impar, encuentra un polinomio que tenga exactamente ua raíz.

6. ¿Para cuáles a,b,c,d la función

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

   satisface $f(f(x))=x$ para toda x?

7. a) Pureba que no existen funciones f o g con cualquiera de las siguientes propiedades

      1) $f(x)+g(y)=xy$ para todos los $x,y\in\mathbb{R}$

2) $f(x) \cdot g(x) = x + y$ para todos los $x, y \in \mathbb{R}$(Tip: Trata de obtener información sobre f y g tomando valores particulares para x e y).

b) Encuentra funciones f y g de manera que $f(x+y) = g(xy)$ para todas las x e y.

8. Prueba o da un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$
   b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$
   c) $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g$
   d) $\frac{1}{f \circ g} = f \circ (\frac{1}{g})$

9. Encuentra una función f tal que $g \circ f = I$ para alguna g, pero que no exista una función h con $f \circ h = I$. ($I(x)$ es conocida como la funció identidad, y cumple que $I(x) = x$ para toda x).

10. Suponga que $f \circ g = I$ y que $h \circ f = I$. Pruebe que $g = h$. Hint: Use el hecho de que la composición es asociativa.($f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$)

11. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(3n) = n + f(3n-3)$ si n es un entero positivo mayor que 1, y $f(3) = 1$. Encuentre el valor de $f(12)$.