Fórmulas de Vieta

Entrenamiento extra
¿Qué es el tiempo?
Por: Argel

Resumen

En el presente material se tratará con una cuestión relacionada con las raíces de un polinomio, en la que se establece una serie de relaciones entre las raíces de un polinomio con los coeficientes de este, las que se expresan en una serie de ecuaciones que se conocen como las fórmulas de Vieta.

1. Las fórmulas de Vieta

Cuando se trata con situaciones relacionadas a las raíces de un polinomio es común tratar de pensar en factorizaciones que nos permitan obtener cada una de las raíces del polinomio en cuestión, sin embargo, no siempre se tiene una factorización que haga la obtención de estas raíces en algo sencillo, las fórmulas de Vieta permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar los coeficientes en este polinomio.

Normalmente cuando se trabaja con las fórmulas de vieta se considera un polinomio mónico, es decir, consideremos el siguiente polinomio

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot + a_1x^1 + a_0$$

En el caso que se tiene que $a_n = 1$ se dice que el polinomio es mónico. A pesar de esta consideración, es importante tomar en cuenta que aunque inicialmente el polinomio no sea mónico, normalmente es posible convertirlo en un polinomio mónico a partir de una división de a_n. Por ejemplo, en el siguiente polinomio

$$5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$$

Efectivamente este polinomio no es mónico, en particular se tiene que $a_3 = 5$, entonces vamos a convertirlo en un polinomio mónico (lo cual no implica darle bananas)

$$x^3 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{3}{5}$$

Con lo anterior, consideremos un polinomio $x^2 + px + q$ el cual tiene raíces a y b. Entonces podemos expresar este polinomio como

$$(x - a)(x - b)$$

Entonces si hacemos la expansión de este, se obtiene

$$x^2 - (a + b)x + ab$$

por lo tanto $p = -(a + b)$ y $q = ab$. Este es el caso más sencillo de las fórmulas de vieta, ¿te suena conocido?, es probable que ya has tenido la oportunidad de trabajar con estas ideas, cuando en la escuela te mostraban la manera de factorizar una ecuación cuadrática probablemente te dijeron que estabas buscando dos números que multiplicados te daban una parte y con su suma pudieras obtener la otra.
Ahora consideremos, el caso que aplica para los polinomios de grado 3, entonces si se tiene un polinomio $x^3 + px^2 + qx + r$, el cual tiene tres raíces que denominaremos a, b y c

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

En la expansión

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Comparando coeficientes se concluye $p = -(a+b+c)$, $q = ab+bc+ca$, $r = -abc$. Con esto se tienen las fórmulas de vieta para un polinomio cúbico, estas fórmulas son generalizables. Tomando el polinomio mónico $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con una cantidad n de raíces $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$a_{n-1} = -(x_1 + \cdots + x_n)$$

$$a_{n-2} = (x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_j \leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n$$

Sin necesidad de las recordar las fórmulas se puede usar estas relaciones si se toma en cuenta el patrón existente entre los primeros casos de las fórmulas de vieta, sugerimos que lo intentes al desarrollar las ecuaciones de vieta para un polinomio de grado cuatro. El uso de esta herramienta con una manipulación correcta del álgebra involucrada puede ser muy útil para tratar con diversos problemas, para ello se recomienda tomar en cuenta diversas factorizaciones y productos notables.

2. Ejemplo

2.1. Ejemplo 1

Encuentre una cuadrática cuyas raíces son $3+2i$ y $3-2i$.
Denotaremos las raíces como a y b. Considerando las fórmulas de Vieta, sabemos que los coeficientes de la cuadrática son ab y $a+b$. Por lo tanto

$$-(3+2i+3-2i) = -6$$

$$(3+2i)(3-2i) = 9 - 4i^2$$

Sin embargo $i = \sqrt{-1}$, con lo que se obtiene $ab = 13$ y que la cuadrática es

$$x^2 - 6x + 13$$

2.2. Ejemplo 2

Sea $f(x)$ un polinomio cúbico con raíces r_1, r_2, r_3 tales que

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)}{f(0)} = 997$$

Encuentre

$$\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1}$$

Consideremos un polinomio cúbico de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c$, por las fórmulas de Vieta tenemos que

$$a = -(r_1 + r_2 + r_3)$$

$$b = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$$
$$c = -r_1r_2r_3$$

Ahora es necesario obtener $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f(0) = -c$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c$$

Usando lo anterior

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)}{f(0)} = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + 2c}{c} = 997$$
$$\frac{a}{2c} + 2 = 997$$

Ahora multiplicamos todo por 2

$$\frac{a}{c} = 1994 - 4 = 1990$$

y notamos que

$$\frac{a}{c} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_3}$$

Por lo que hemos concluido el problema.

3. Agregados culturales

1. Existe una técnica conocida como Vieta jumping
2. Técnicamente esta es la primera lista que se crea en el año

4. Ejercicios

1. Sea r_1, r_2, r_3 las raíces de la cúbica $x^3 + 3x^2 + 4x - 4$. Encuentre el valor de $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$
2. Suponga que el polinomio $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$ tiene tres raíces naturales a, b y c. Encuentre el valor de $a(1 + b + c) + b(1 + a + c) + c(1 + a + b)$.
3. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$, encuentre $(a + 1)(b + 1)$
4. Sean m y n las raíces de la ecuación cuadrática $4x^2 + 5x + 3 = 0$. Encuentre $(m + 7)(n + 7)$.
5. Sean a, b y c las raíces de la ecuación $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$. Demuestre que $abc > ab + bc + ca - (a + b + c)$.

5. Problemas

1. (**URSS, 1986**) Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1 = 0$ son números naturales. Muestre que $a^2 + b^2$ no es un primo.

2. Si a, b, c, p y q son números enteros, con $q \neq 0$, $(p, q) = 1$ y $\frac{p}{q}$ raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, muestre que p divide a c y q divide a a.

3. Sean a, b y c números positivos reales con $a < b < c$ tales que $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 50$, y $a^3 + b^3 + c^3 = 216$. Encuentre $a + 2b + 3c$.

4. Encuentre todas las tripletas de números complejos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$a + b + c = 0$$

$$ab + bc + ca = 0$$

$$abc = 0.$$

5. Sean a, b y c números reales, con a y c diferentes de cero. Sean α, β las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$ y α', β' las raíces del polinomio $cx^2 + bx + a$.Muestre que si α, β, α', β' son números positivos, entonces $(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') \geq 4$.

6. Suponga k es un número tal que el polinomio cúbico $P(x) = -2x^3 + 48x^2 + k$ tiene tres raíces enteras que son números primos. ¿Cuántos valores distintos puede tener k?

7. ¿Para qué valores reales positivos de m, las raíces de x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)x + \frac{m^2-3}{2} = 0$$

cumplen que $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$?

8. Si α, β son las raíces de la ecuación $x^2 + 2x + 3 = 0$, ¿cuál es la ecuación cuadrática cuyas raíces son $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ y $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$

9. **Ibero,1986** Encuentre todas las tripletas de enteros (a, b, c) tales que:

$$a + b + c = 24$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$

$$abc = 440$$

10. Los números naturales a, b, c y d cumplen que $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ y $a + b = c + d$. Muestre que dos de estos números coinciden.

11. Si α, β y γ son las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$, calcule

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

12. Sean r, s y t tres raíces de la ecuación

$$8x^3 + 1001x + 2008 = 0.$$

$(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3$

13. **Irlanda, 2007** Si a, b y c son las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2007x + 2002$, determine el valor de
$$\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right).$$

14. **Brazil,2011** Considere el polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.
    a) Muestre que si r es una raíz de $f(x)$ entonces $r^2 + r - 3$ también es una raíz de $f(x)$
    b) Sean α, β, γ las tres raíces de $f(x)$, en algún orden. Determine todos los valores posibles de
    $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}$$

15. **China, 2008** Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio con coeficientes reales. Si $P(x)$ tiene tres raíces reales positivas y $P(0) < 0$, muestre que $2b^3 + 9a^2d - 7abc \leq 0$.

16. **Filipinas, 2013** Si p es una constante real tal que las raíces de la ecuación $x^3 - 6px^2 + 5px + 88 = 0$ forman una secuencia aritmética, encuentre p.

17. Encuentre las soluciones del sistema
$$\begin{aligned} x + y + z &= w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

18. ¿Es el polinomio $x^{105} - 9$ reducible en $\mathbb{Z}$?

19. **OMCC, 2001** Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2, q_2 en ese orden, forman una progresión aritmética. Muestra que $a + c = 0$.

20. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, los ceros diferentes de 1 del polinomio $P(x) = x^n - 1$, $n \geq 2$. Demuestre que
$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}.$$

21. Muestre que el polinomio con coeficientes reales $P(x) = x^2 + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0$, no puede tener todas sus raíces reales.

22. **IMO shortlist, 1982** Determine todos los valores reales del parámetro a para los cuales la ecuación
$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$
tiene exactamente cuatro raíces reales distintas que forman una progresión geométrica.

23. **Rusia,1997** ¿Existe un conjunto S de número reales diferentes de cero tales que para cualquier entero positivo n existe un polinomio $P(x)$ con grado a lo menos n, con todas las raíces y coefficientes que son de S?

24. **Rusia, 2003** Las longitudes de los lados de un triángulo son las raíces de una ecuación cúbica con coeficientes racionales. Muestre que las alturas son las raíces de una ecuación de grado seis con coeficientes racionales.

25. **IMO Longlist,1983** Las tres raíces de la ecuación
$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$
son $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$, donde A, B y C son los ángulos de un triángulo. Determine la cuarta raíz como una función de p, q, r, s.(únicamente)

26. El polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ tiene tres raíces reales distintas. Encuentra números a y b tales que el polinomio $x^2 + ax + b$ permuta cíclicamente a las raíces de Q, es decir que si r, s y t son las raíces de Q (en cierto orden) entonces $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$.