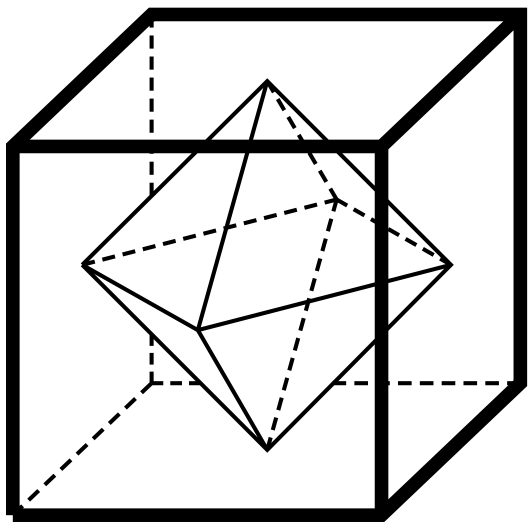
Geometría en Olimpiadas de Matemáticas



por

Jesús Jerónimo Castro

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

2016

Geometría en Olimpiadas de Matemáticas

Jesús Jerónimo Castro

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro.

Introducción

Aquí va el rollo.

Notación básica

La siguiente notación será utilizada:

$\triangle ABC$	el triángulo de vértices A, B y C
$\lvert ABC\rvert$	área del triángulo $\triangle ABC$
$\lvert ABCD\rvert$	área del cuadrilátero $ABCD$
AB	el segmento de extremos A y B
AB	la línea por los puntos A y B
AB	la longitud del segmento AB
$\measuredangle A$	ángulo de vértice A
$\measuredangle BAC$	ángulo formado por BA y CA
$\widehat{AB}$	el arco de A a B
m_A	la mediana desde el vértice A

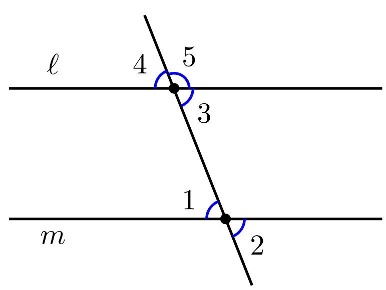
Contenido

Capítulo 1

Conceptos y teoremas básicos

1.1. Ángulos entre paralelas.

Consideremos un par de *líneas paralelas* ℓ y m en el plano. Ahora, supongamos que una línea corta a l y m y observemos los ángulos que ésta forma con ellas. Los ángulos mantienen las siguientes relaciones:



(a) $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y se llaman ángulos *opuestos por el vértice*,

(b) $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ y se llaman ángulos *alternos internos*,

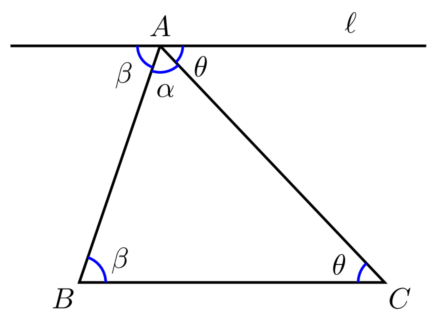
(c) $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *correspondientes*,

(d) $\measuredangle 2 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *alternos externos*.

Además, tenemos que $\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 180°$ y decimos que $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$ son *suplementarios*. Aprovechando estas relaciones de ángulos podemos demostrar (justificar mediante argumentos válidos) el siguiente teorema básico:

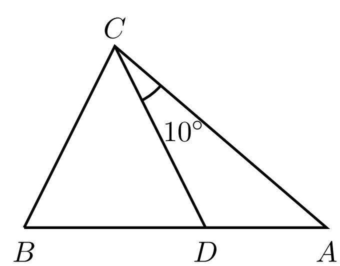
Teorema 1.1.1 *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Demostración. Se traza un línea ℓ, paralela a BC, por el vértice A. De esta manera obtenemos las igualdades de ángulos marcados en la figura. Como sabemos que un ángulo llano mide $180°$, tenemos que $\alpha + \theta + \beta = 180°$. $\square$

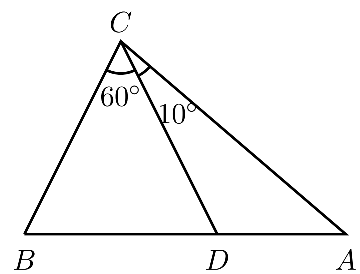


Ahora veremos algunas aplicaciones de este teorema.

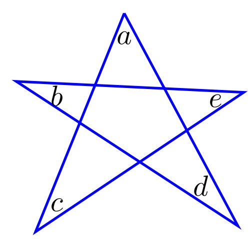
Ejemplo 1.1.1 *En el triángulo* $\triangle ABC$, $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC = 110°$, *y* D *es un punto sobre el segmento* AB *tal que* $CD = CB$ *y* $\measuredangle DCA = 10°$. *Calcula el valor del ángulo* $\measuredangle CAB$.



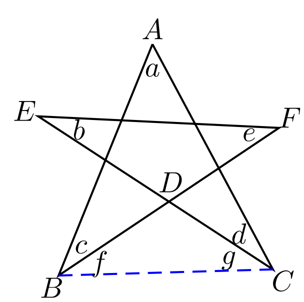
Solución. La suma de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$ es $180°$. Como $\measuredangle A + \measuredangle B = 110°$, entonces $\measuredangle BCA$ debe ser $70°$. Si $\measuredangle DCA = 10°$, $\measuredangle BCD = 70° - 10° = 60°$. Además, el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles, con $CD = CB$, de modo que $\measuredangle DBC = \measuredangle CDB$. Ahora, la suma de los ángulos interiores del triángulo BCD es $180°$, de donde $\measuredangle DBC = \measuredangle CDB = 60°$. Por último, en el triángulo $\triangle ACD$, el ángulo exterior $\measuredangle CDB$ es la suma de los ángulos interiores opuestos $\measuredangle A$ y $\measuredangle DCA$. Por lo tanto, $\measuredangle A = \measuredangle CDB - \measuredangle DCA = 60° - 10° = 50°$.



Ejemplo 1.1.2 *En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?*

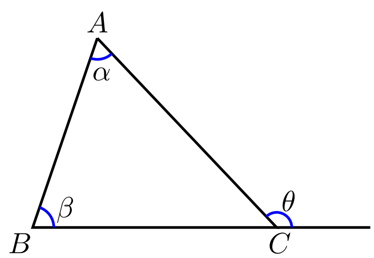


Solución. Considerando el triángulo $\triangle ABC$ obtenemos que $a + c + f + g + d = 180°$, pero de los triángulos $\triangle BCD$ y $\triangle FED$ obtenemos que $f + g = b + e$. Por lo tanto, $a + b + c + d + e = 180°$.

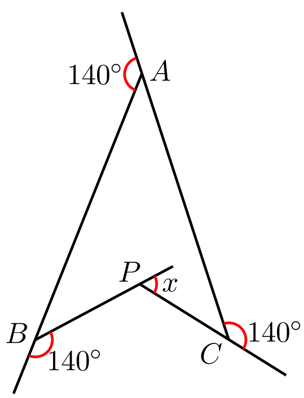


1.1.1. Problemas

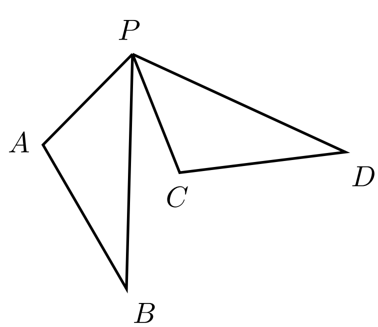
Problema 1.1 *Encuentra cuánto vale el ángulo exterior θ en la siguiente figura si son conocidos los ángulos $\alpha = 62°$ y $\beta = 71°$.*



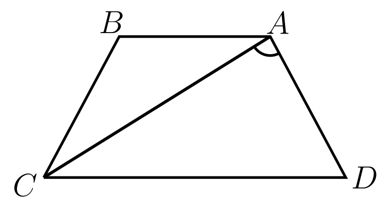
Problema 1.2 *Encuentra cuánto vale el ángulo x en la siguiente figura.*



Problema 1.3 *En la figura, los triángulos $\triangle PAB$ y $\triangle PCD$ son idénticos. Si el ángulo $\measuredangle APC = 67°$ y el ángulo $\measuredangle CPD = 38°$, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle BPC$?*



Problema 1.4 *El trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$ y $DC = 2$, donde AB es paralelo a DC. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CAD$?*



Problema 1.5 *Encuentra cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo* [1] *de n vértices.*

1.2. Ángulos en circunferencias

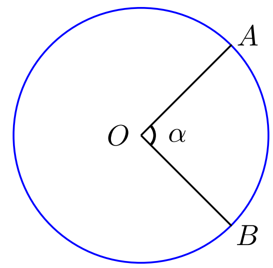
Dado un ángulo y una circunferencia, podemos hacer una equivalencia entre el valor de este ángulo y los arcos que interseca sobre la circunferencia. La forma de calcular el valor del ángulo dependerá del lugar donde se encuentre el vértice y de la forma en que sus lados intersecten la circunferencia. Veamos cada uno de ellos y la manera de calcularlos:

Definición 1.2.1 *Un ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y su valor es equivalente al arco que interseca medido en radianes* [2]*, es decir $\alpha = \widehat{AB}$.* [3]

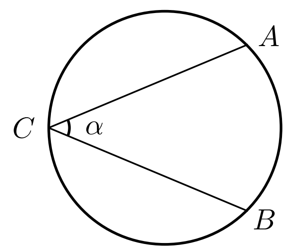
[1] Una figura se dice que es convexa, si para cualesquiera dos puntos en ella, el segmento que los une está totalmente contenido en la figura.

[2] Un radián es la medida de un ángulo central que interseca un arco que tiene longitud igual a un radio de la circunferencia.

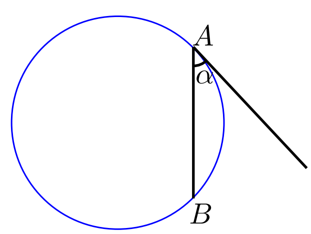
[3] Con $\widehat{XY}$ denotamos al arco de la circunferencia entre los puntos X y Y.



Definición 1.2.2 *Un ángulo inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y los lados que lo forman son cuerdas de la circunferencia. Su valor es equivalente a la mitad del arco que interseca, es decir* $\alpha = \widehat{AB}/2$.

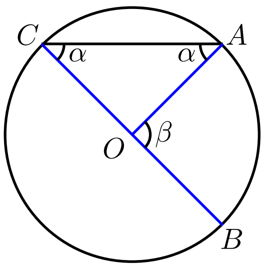


Definición 1.2.3 *Un ángulo semi-inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es equivalente a la mitad del arco que interseca, es decir* $\alpha = \widehat{AB}/2$.



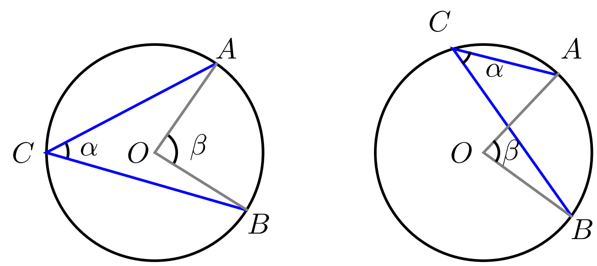
Teorema 1.2.1 *El valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que interseca el mismo arco.*

Demostración. Probaremos esto para el caso cuando uno de los lados del ángulo coincide con un diámetro:



En la figura anterior, sean CB un diámetro, $\measuredangle ACB = \alpha$ (ángulo inscrito) y $\measuredangle AOB = \beta$ (ángulo central). Debemos probar que $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Observemos que tanto OA como OC son radios de la circunferencia, entonces el triángulo $\measuredangle AOC$ es isósceles, esto es $\measuredangle ACO = \measuredangle CAO = \alpha$. Sabemos que $\beta = \measuredangle AOB = \measuredangle ACO + \measuredangle CAO = \alpha + \alpha$, por lo tanto $\beta = 2\alpha$. □

Ahora, faltaría demostrar lo anterior para los casos mostrados en las siguientes figuras. Esto puede hacerse fácilmente utilizando el caso que ya hemos probado, pero esto se deja como ejercicio.



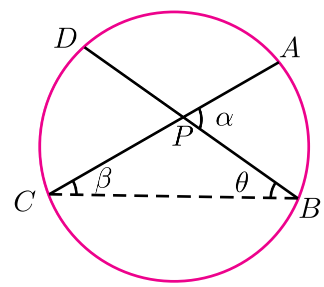
Sin embargo, el vértice de un ángulo no siempre está en alguna de las posiciones antes mencionadas, por lo que debemos encontrar una forma de calcular la medida de un ángulo cuyo vértice esté dentro o fuera del círculo en cuestión.

Teorema 1.2.2 *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es equivalente a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}.$$

Demostración. Trazamos el segmento CB y de esta manera obtenemos el triángulo $\triangle PCB$. Como $\alpha = \beta + \theta$ tenemos

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}. \quad \square$$

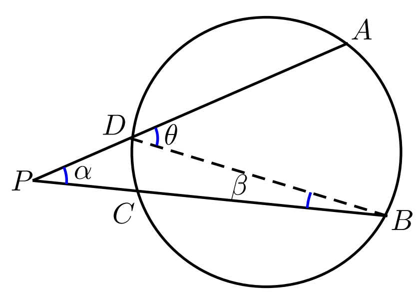


Teorema 1.2.3 *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}.$$

Demostración. Se traza el segmento DB, formándose así el triángulo $\triangle PDB$. Como $\theta = \alpha + \beta$, tenemos que $\alpha = \theta - \beta$, entonces

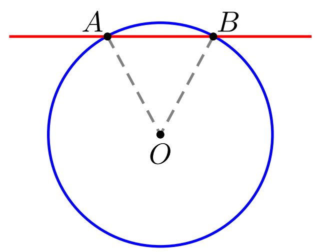
$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}. \quad \square$$



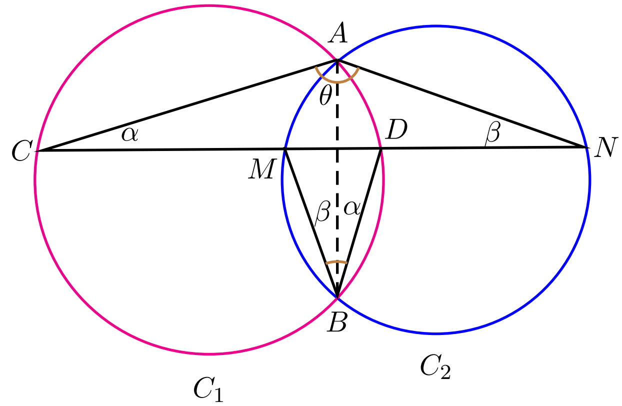
Ahora, veremos algunos ejemplos en los que se mostrará la utilidad de los teoremas anteriores.

Ejemplo 1.2.1 *Demuestra que el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.*

Demostración. Sea A un punto sobre la circunferencia Γ y OA el radio trazado hacia éste. Por el punto A trazamos la recta ℓ perpendicular a OA. Claramente ℓ es tangente a Γ. En caso contrario, supongamos que ℓ interseca a Γ, además de en A, en otro punto B. Como OB también es radio, tenemos que el triángulo $\triangle OAB$ es isósceles, de lo cual tenemos que $\measuredangle ABO = \measuredangle BAO = 90°$. Claramente esto es una contradicción, ya que entonces la suma de los ángulos del triángulo $\triangle OAB$ sería mayor que $180°$. Por lo tanto, la recta ℓ es tangente a la circunferencia en el punto A. □



Ejemplo 1.2.2 *Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Se traza una recta l que corta a C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de l. Demuestra que $\measuredangle CAN + \measuredangle MBD = 180°$.*

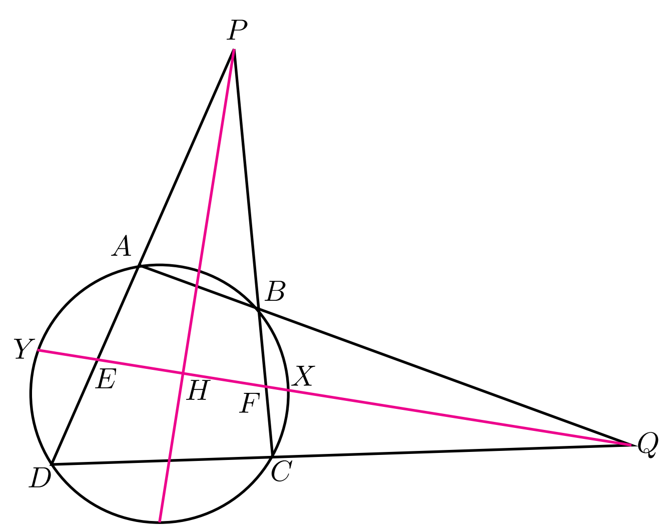


Demostración. Una recomendación muy útil cuando tenemos dos circunferencias que se cortan en dos puntos es *trazar la cuerda común*. Trazamos entonces AB.

Tenemos que $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \alpha$, ya que ambos son ángulos inscritos en C_1 los cuales intersecan el arco $\widehat{AD}$. De la misma manera, $\measuredangle ABM = \measuredangle ANM = \beta$, ya que ambos son ángulos inscritos en C_2. Por otro lado, si hacemos $\measuredangle CAN = \theta$, en el triángulo $\triangle ACN$ tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$. □

Ejemplo 1.2.3 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero el cual tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia. Las líneas AB y DC se intersecan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersecan en un punto P. Demuestra que las líneas que bisectan los ángulos $\measuredangle DPC$ y $\measuredangle AQD$ son mutuamente perpendiculares.*

Demostración. Sea H el punto de intersección de las dos bisectrices mencionadas. Sean Y y X los puntos donde la bisectriz del $\measuredangle AQD$ interseca a la circunferencia y sean E y F los puntos donde esta bisectriz interseca a los lados AD y BC. Probar que $\measuredangle PHQ = 90°$ es equivalente a probar que el triángulo $\triangle PEF$ es isósceles. Para probar esto utilizaremos una técnica que resulta muy útil al resolver problemas y a la cual denominaremos *ir hacia atrás*. La idea es suponer válido el resultado que queremos demostrar e ir observando que otros resultados también serían válidos. Se hace esto hasta que lleguemos a un resultado el cual sea fácil de demostrar o sea conocido por nosotros de alguna manera. Una vez hecho esto tratamos de regresarnos siguiendo los pasos en orden inverso. Aplicando esta técnica al problema tenemos lo siguiente:



$\triangle PEF$ isósceles $\Longrightarrow \measuredangle PEF = \measuredangle PFE \Longrightarrow \widehat{DY}+\widehat{AB}+\widehat{BX} = \widehat{YA}+\widehat{AB}+\widehat{XC}$ $\Longrightarrow \widehat{DY} + \widehat{BX} = \widehat{YA} + \widehat{XC} \Longrightarrow \widehat{DY} - \widehat{XC} = \widehat{YA} - \widehat{BX}$. Esto último es cierto debido a que QY es la bisectriz del ángulo $\measuredangle AQD$. El regreso se lleva a cabo sin dificultad alguna en este caso. $\square$

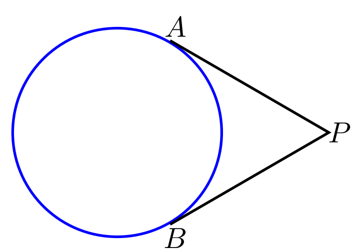
1.2.1. Problemas

Problema 1.6 *Demuestra que dos líneas paralelas cualesquiera que intersecan una circunferencia, cortan arcos iguales entre ellas. ¿Qué sucede cuándo una de las líneas es tangente a la circunferencia?*

Problema 1.7 *Demuestra que el valor de un ángulo semi-inscrito es igual al valor de un ángulo inscrito que intersecte el mismo arco.*

Problema 1.8 *Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro partes y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demuestra que entre estos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.*

Problema 1.9 *En la siguiente figura PA y PB son tangentes a la circunferencia. Demuestra que $PA = PB$.*



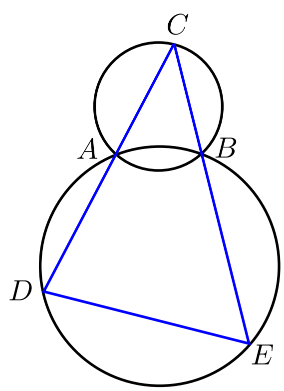
Problema 1.10 *Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\measuredangle BAC = 90°$.*

Problema 1.11 *Uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia coincide con un diámetro. Demuestra que el triángulo es un triángulo rectángulo.*

Problema 1.12 *Demuestra que la razón entre la longitud del lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.* [4]

Problema 1.13 *Sea P un punto en el interior de un cuadrado $ABCD$ de manera que $\triangle ABP$ es equilátero. Demuestra que $\measuredangle PCD = 15°$.*

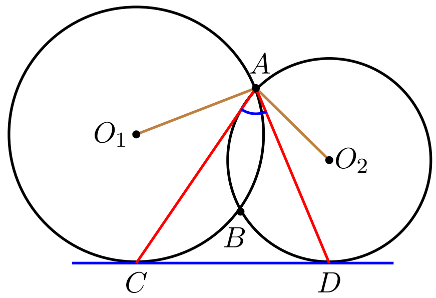
Problema 1.14 *Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B como se muestra en la figura. Se escoge un punto arbitrario C en la primer circunferencia y se trazan los rayos CA y CB, los cuales intersecan la segunda circunferencia de nuevo en los puntos D y E, respectivamente. Demuestra que la longitud del segmento DE no depende de la elección del punto C.*



Problema 1.15 *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersecan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que*

$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle O_1AO_2.$$

[4]Con esto hemos probado que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$, la cual es conocida como la *Ley de Senos*.



Problema 1.16 *Sea E un punto sobre una circunferencia de diámetro AB. Por los puntos B y E se trazan las líneas tangentes t_1 y t_2, respectivamente. Las líneas t_1 y t_2 se cortan en un punto M. Sea C el punto de intersección entre las líneas AE y t_1. Demuestra que M es el punto medio de BC.*

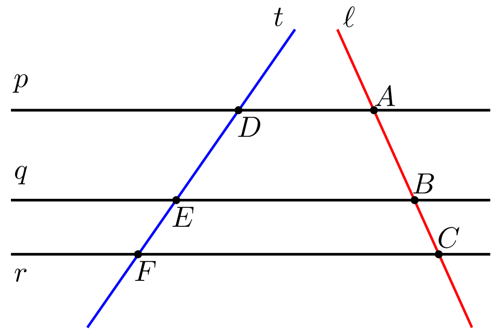
Problema 1.17 *Dos circunferencias son tangentes internamente en un punto M. Una recta arbitraria es tangente a la circunferencia interior en un punto P y corta a la circunferencia exterior en Q y R. Demuestra que $\measuredangle QMP = \measuredangle RMP$.*

1.3. El Teorema de Tales

El teorema que presentaremos en esta sección se debe al matemático griego Tales de la ciudad de Mileto. Lo que este teorema establece, es útil entre otras cosas, para justificar los criterios de semejanza y congruencia los cuales se verán en la sección siguiente. El teorema es el siguiente:

Teorema 1.3.1 *Si una línea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón $m : n$, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón $m : n$.*

Por ejemplo, sean p, q, r, tres rectas paralelas. Si una línea ℓ corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que $AB : BC = 2 : 1$, y otra línea t corta a las rectas paralelas en D, E y F, también se cumple que $DE : EF = 2 : 1$.



Demostración. Tomando en cuenta la figura anterior, debemos demostrar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Para esto utilizaremos que el área de un triángulo se puede obtener mediante el semi-producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre éstos (lo cual es fácil de demostrar). Tenemos entonces que

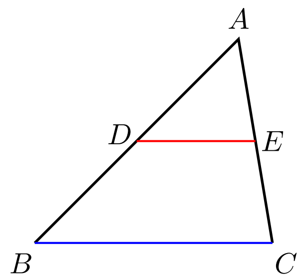
$$\frac{|ABE|}{|BCF|} = \frac{\frac{BE \cdot AB \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}}{\frac{CF \cdot BC \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}},$$

donde $\alpha = \measuredangle ABE = \measuredangle BCF$. Análogamente tenemos que

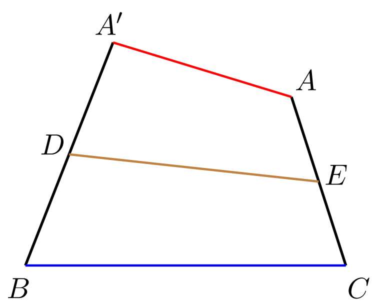
$$\frac{|DEB|}{|EFC|} = \frac{\frac{BE \cdot DE \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}}{\frac{FC \cdot EF \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}},$$

donde $\beta = \measuredangle DEB = \measuredangle EFC$. Como $|ABE| = |DEB|$ y $|BCF| = |EFC|$ tenemos que $\frac{|ABE|}{|BCF|} = \frac{|DEB|}{|EFC|}$ lo cual implica que $\frac{BE \cdot AB}{CF \cdot BC} = \frac{BE \cdot ED}{CF \cdot EF}$. Se sigue que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. □

El recíproco del teorema de Tales es válido cuando es aplicado a dos segmentos que comparten un extremo. Por ejemplo, si dos segmentos AB y AC comparten un vértice A, el segmento que une los puntos medios de éstos es paralelo al segmento que une los otros dos extremos. Es decir, sean D y E los puntos medios de AB y AC, respectivamente; como $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, entonces por el recíproco del Teorema de Tales tenemos que DE es paralelo a BC.



Sin embargo, debemos tener cuidado cuando los segmentos no comparten un extremo. Por ejemplo, en la siguiente figura D y E son los puntos medios de $A'B$ y AC, respectivamente, y sin embargo DE no es paralelo ni a BC ni a $A'A$.



Antes de demostrar el recíproco del Teorema de Tales, mostraremos un resultado que es bastante útil.

Lema 1.3.1 *Dado un segmento AB y una número positivo λ, existe un único punto C en el segmento AB el cual cumple que*

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Demostración. Supongamos que existe un par de puntos distintos C y C' en el interior del segmento AB los cuales lo dividen en la razón λ. Tenemos dos posibles casos:

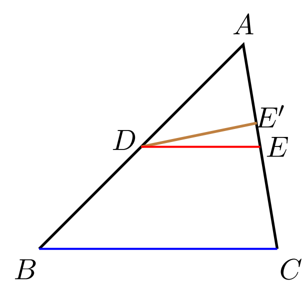
(1) C' está en el interior del segmento AC. Tenemos que $\frac{AC}{CB} = \frac{AC'+C'C}{C'B-C'C} \neq \frac{AC'}{C'B}$. Pero recordemos que ambos cocientes son iguales a λ, por lo que la única posibilidad es que $C' = C$.

(2) C' está en el interior del segmento CB. Este caso se resuelve de manera análoga al anterior.

Por lo tanto, concluimos que existe un único punto que divide al segmento AB en la razón λ. $\square$

Nota. El lema sigue siendo válido cuando consideramos números $\lambda < 0$, sólo que en este caso el punto C estará en el exterior del segmento AB, pero sobre la línea AB.

Teorema 1.3.2 Recíproco del Teorema de Tales. *Sean D y E puntos sobre los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ de manera que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Entonces el segmento DE es paralelo a BC.*



Demostración. Supongamos que DE no es paralelo a BC. Sea E' el punto en AC tal que $DE' \parallel BC$. Por el Teorema de Tales tenemos que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C},$$

se sigue entonces que

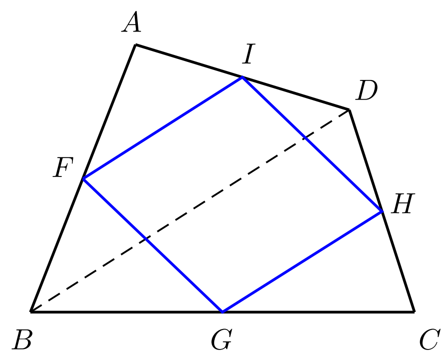
$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC}.$$

Por el lema anterior, tenemos que $E' = E$, por lo tanto, $DE \parallel BC$. $\square$

Un cuadrilátero en el que cada par de lados opuestos son paralelos se llama *paralelogramo*.

Ejemplo 1.3.1 Teorema de Varignon. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean F, G, H e I los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Entonces el cuadrilátero $FGHI$ es un paralelogramo.*

Demostración. Tracemos la diagonal BD. Como F e I son los puntos medios de AB y AD, respectivamente, tenemos que FI es paralelo a BD; también, como G y H son los puntos medios de BC y CD, respectivamente, entonces GH es paralelo a BD. De aquí tenemos que FI es paralelo a GH. Análogamente, podemos demostrar que FG es paralelo a IH. Como el cuadrilátero $FGHI$ tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos, entonces es un paralelogramo. □

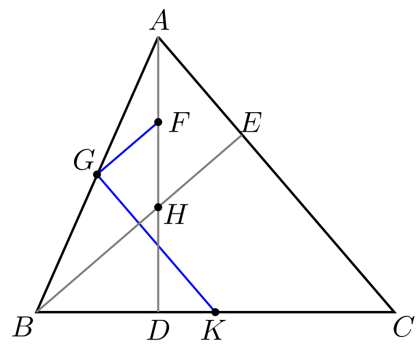


Observemos que en ningún momento de la demostración se usa que el cuadrilátero sea convexo, esto sucede porque el resultado sigue siendo válido aún para cuadriláteros que no son convexos. La prueba sigue exactamente las mismas líneas. Otra observación importante es la siguiente: *en todo paralelogramo los lados opuestos tienen la misma longitud*. Para ver esto, hacemos lo siguiente. Sea $ABCD$ un paralelogramo dado, entonces observemos que $|ABC| = |ABD|$ ya que ambos comparten la base AB y sus alturas hacia ese lado tienen la misma longitud. Si hacemos $\measuredangle DAB = \alpha$ entonces tenemos que $\measuredangle CBA = 180° - \alpha$, de aquí se sigue que

$$\frac{AD \cdot AB \cdot \text{sen}\alpha}{2} = |ABD| = |ABC| = \frac{BC \cdot AB \cdot \text{sen}(180° - \alpha)}{2}$$

y como $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$, obtenemos que $AD = BC$. De manera análoga se demuestra que $AB = DC$.

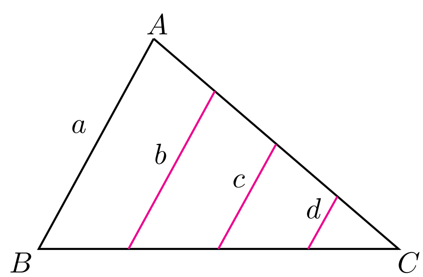
Ejemplo 1.3.2 *En la siguiente figura, BE y AD son alturas del $\triangle ABC$ las cuales se intersecan en un punto H. Sean F, G y K los puntos medios de los segmentos AH, AB y BC, respectivamente. Demuestra que $\measuredangle FGK$ es un ángulo recto.*



Demostración. Dado que G es el punto medio de AB y F el punto medio de AH, por el Teorema de Tales tenemos que GF es paralelo a BH. Análogamente, se prueba que GK es paralelo a AC. Por otro lado, como el ángulo entre BH y AC es $90°$, también tenemos que el ángulo entre GF y GK es $90°$. □

1.3.1. Problemas

Problema 1.18 *En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado BC en 4 segmentos iguales. Si $a = 10$, encuentra la suma $a + b + c + d$.*



Problema 1.19 *Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean L y M los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demuestra que los segmentos LC y AM dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.*

Problema 1.20 *Sean M y N los puntos medios de los lados BC y CD de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Los segmentos AM y AN intersecan a BD en los puntos X y Y, respectivamente. Demuestra que si $BX = XY = YD$ entonces $ABCD$ es un paralelogramo.*

Problema 1.21 *Sea AM una mediana del triángulo $\triangle ABC$, es decir M es el punto medio del lado BC. Sobre el segmento AM se considera el punto P de manera que $AP = 2 \cdot PM$. La línea BP interseca al lado AC en el punto Q. Demuestra que $AQ = QC$.*

Problema 1.22 *Sean M y N los puntos medios de los lados AD y BC de un trapecio $ABCD$ en el cual AB es paralelo a DC. Demuestra que $MN = \frac{AB+DC}{2}$.*

Problema 1.23 *Demuestra que las diagonales en un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Problema 1.24 *Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero $ABNC$ es un paralelogramo.*

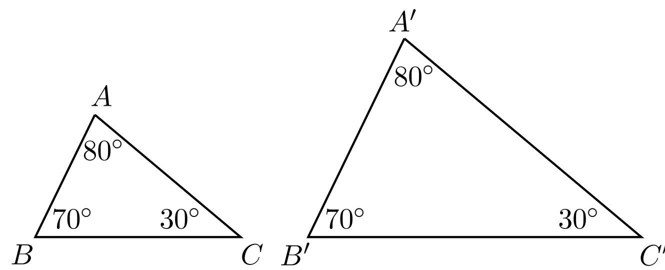
Problema 1.25 *Demuestra que el segmento de línea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.*

1.4. Triángulos semejantes

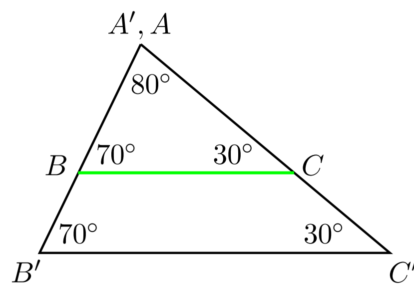
En esta sección analizaremos el concepto de *semejanza* de triángulos.

Definición 1.4.1 *Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma (aunque no necesariamente el mismo tamaño), es decir, si tienen sus tres ángulos correspondientes iguales y sus lados proporcionales.*

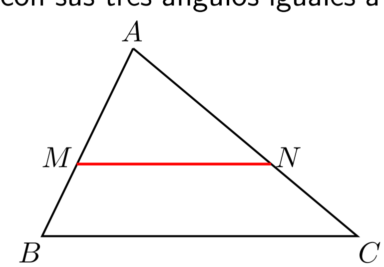
Cuando estamos resolviendo problemas, no siempre sabemos que dos triángulos tienen sus tres ángulos correspondientes iguales y sus lados proporcionales. Sin embargo, en ocasiones la cantidad de información que tenemos es suficiente para concluir que los triángulos son semejantes. Esto es lo que se conoce como *criterios de semejanza*. El primer criterio de semejanza que veremos es el conocido como *aaa*, es decir, dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales. Para ver esto, demostraremos que si se tiene la igualdad de ángulos correspondientes entonces los lados del triángulo son proporcionales. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ los triángulos en cuestión.



Si nosotros movemos el triángulo $\triangle ABC$ hasta que el vértice A coincida con el vértice A', y además lo hacemos de tal manera que el lado AB quede exactamente encima del lado $A'B'$, tendremos la siguiente figura:



Aquí podemos observar que los lados BC y $B'C'$ son paralelos, y de manera inversa, si nosotros trazamos una línea paralela a uno de los lados de un triángulo de manera que ésta corte a los dos lados restantes, entonces esta línea paralela determinará un triángulo con sus tres ángulos iguales a los del triángulo original.



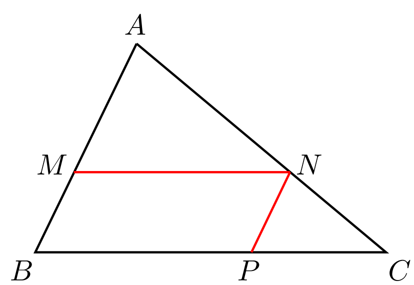
Utilizando lo anterior y el teorema de Tales , tenemos las siguiente proporción:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA},$$

sumando 1 en ambos lados tenemos

$$\frac{BM}{MA} + 1 = \frac{CN}{NA} + 1 \Longrightarrow \frac{BM + MA}{MA} = \frac{CN + NA}{NA} \Longrightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}.$$

Si trazamos una paralela a AB la cual pase por el punto N, obtenemos el paralelogramo $MNPB$:



Utilizando nuevamente el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CN}{NA}.$$

Nuevamente sumamos 1 en ambos lados y obtenemos que

$$\frac{CB}{PB} = \frac{CA}{NA},$$

pero como $PB = NM$ tenemos que

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN}.$$

Juntando los resultados anteriores tenemos que

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN},$$

es decir, los lados son proporcionales. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Probaremos ahora el recíproco de este enunciado (el cual es conocido como el criterio de semejanza $\ell\ell\ell$), es decir, probaremos que si dos triángulos tienen sus tres lados respectivos proporcionales, entonces son semejantes. Para esto, consideremos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tienen sus lados proporcionales, es decir, que se cumple que

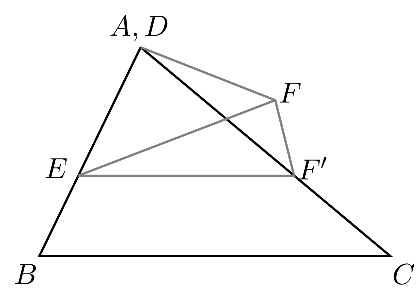
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \lambda.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda > 1$. Coloquemos el triángulo $\triangle DEF$ de manera que el vértice D coincida con el vértice A y que el lado DE esté sobre el lado AB. Si tenemos que $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$, entonces por el Teorema de Tales tenemos que EF es paralelo a BC y por tanto, el triángulo $\triangle DEF$ tiene sus ángulos iguales a los del triángulo $\triangle ABC$, se sigue entonces por el criterio aaa que los triángulos son semejantes. Aquí es importante mencionar que hasta este punto hemos demostrado el criterio de semejanza $\ell a \ell$, es decir, dos triángulos serán semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre dichos lados igual.

Supongamos ahora que $\measuredangle EDF \neq \measuredangle BAC$. Sea F' el punto donde la paralela a BC por E interseca al lado AC; como sabemos que $\triangle DEF' \sim \triangle ABC$ entonces se cumple que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF'} = \frac{BC}{EF'}.$$

De aquí se obtiene que $EF' = EF$ y que $DF' = DF$, es decir, los triángulos $\triangle EF'F$ y $\triangle DF'F$ son isósceles. Si trazamos las alturas de estos triángulos desde los vértices E y D sobre el segmento $F'F$, tenemos que ambas caen sobre el punto medio de $F'F$, pero entonces tenemos dos líneas perpendiculares a $F'F$ las cuales son distintas. Esto es claramente una contradicción, por lo tanto $F' = F$ y $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.



Resumiendo, los criterios de semejanza son los siguientes:

Criterios de semejanza. Dos triángulos son semejantes si:

1. sus ángulos correspondientes son iguales (*criterio* aaa),
2. sus tres lados son proporcionales (*criterio* $\ell\ell\ell$),
3. dos lados son proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos es igual (*criterio* $\ell a\ell$).

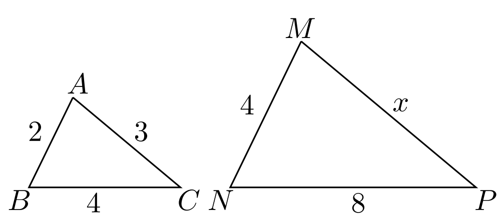
Si además de ser semejantes, un par de triángulos tienen sus lados correspondientes del mismo tamaño entonces se dice que son *congruentes*. Para saber si dos triángulos dados son congruentes, se tienen los siguientes criterios:

Criterios de congruencia. Dos triángulos son congruentes si:

1. sus tres lados correspondientes son iguales (*criterio* $\ell\ell\ell$),
2. dos lados correspondientes son iguales y el ángulo comprendido entre éstos es igual (*criterio* $\ell a\ell$)
3. dos ángulos correspondientes son iguales y el lado que comparten dichos ángulos es igual (*criterio* $a\ell a$).

Veamos algunos ejemplos donde utilicemos los criterios vistos anteriormente:

Ejemplo 1.4.1 *Tenemos dos triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$. Sabemos que sus lados son iguales a los valores marcados en la siguiente figura, encuentra cuánto vale x.*

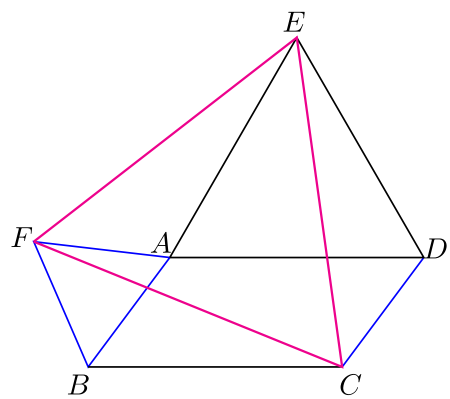


Solución. Como tenemos que los lados de ambos triángulos son proporcionales, entonces:

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{4}$$

con esto llegamos a que el valor de x es 6.

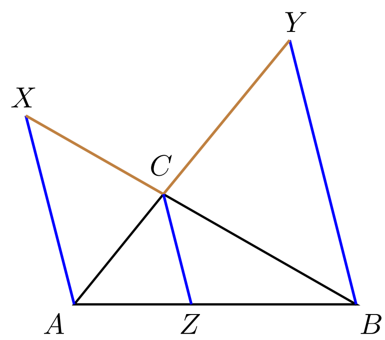
Ejemplo 1.4.2 *En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros $\triangle ABF$ y $\triangle ADE$, respectivamente. Demuestra que el triángulo $\triangle FCE$ es equilátero.*



Solución. Cuando dos triángulos, además de ser semejantes, tienen las longitudes de sus lados iguales se dice que son *congruentes*. En la figura anterior, tenemos que $\measuredangle FAE + 120° + \measuredangle BAD = 360°$, entonces $\measuredangle FAE = 240° - \measuredangle BAD = 180° - \measuredangle BAD + 60°$. Como $\measuredangle FBC = 180° - \measuredangle BAD + 60°$, entonces $\measuredangle FAE = \measuredangle FBC$. Además, tenemos que $FA = FB$ y $AE = BC$, esto implica que el triángulo $\triangle FAE$ es congruente al triángulo $\triangle FBC$ y por lo tanto $FE = FC$. De manera análoga podemos demostrar que $EC = FE$ y así concluimos que el triángulo $\triangle FEC$ es equilátero.

Ejemplo 1.4.3 *Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo $\triangle ABC$. Una línea a través de A paralela a CZ interseca a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ interseca a AC en Y. Demuestra que*

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}.$$



Demostración. Primero re-escribimos la expresión que queremos demostrar como

$$1 = \frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY}.$$

Tenemos que el triángulo $\triangle BCZ$ es semejante al triángulo $\triangle BXA$, de aquí obtenemos

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}.$$

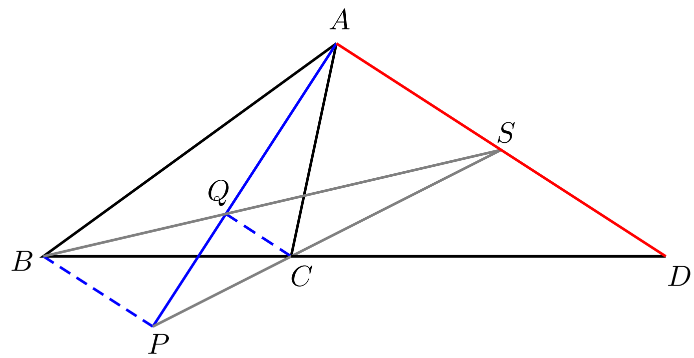
De manera análoga, de la semejanza entre los triángulos $\triangle ACZ$ y $\triangle AYB$, tenemos que

$$\frac{CZ}{BY} = \frac{AZ}{AB}.$$

Sumando estas dos expresiones que hemos obtenido tenemos que

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ + ZB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1. \qquad \square$$

Ejemplo 1.4.4 *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sea l una línea que pasa por el vértice A la cual divide el ángulo $\measuredangle BAC$ en dos partes iguales. Sean P y Q las proyecciones desde B y C sobre l, respectivamente, y sea D un punto sobre la línea BC de tal manera que DA es perpendicular a l. Demuestra que AD, BQ y CP concurren.*



Demostración. Sea S el punto donde la línea BQ interseca a AD. Como AD, CQ y BP son paralelas, tenemos que

$$\frac{SQ}{SB} = \frac{AQ}{AP}.$$

Además, como los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle ACQ$ son semejantes, tenemos que

$$\frac{QC}{BP} = \frac{AQ}{AP},$$

de aquí obtenemos que los triángulos $\triangle SQC$ y $\triangle SBP$ son semejantes y comparten el vértice S, por lo tanto, P, C y S son colineales. $\square$

En el siguiente ejemplo podemos observar cómo la geometría y el álgebra, en ocasiones, se mezclan en armonía para dar como resultado demostraciones con gran belleza.

Ejemplo 1.4.5 *Expresa el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.*

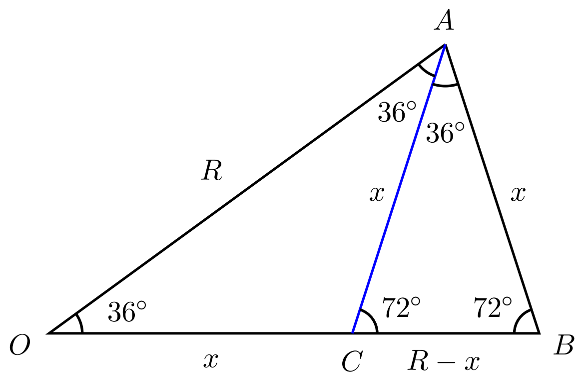
Solución. Sean $AB = x$ uno de los lados del decágono, O el centro de la circunferencia y R el radio de ésta. Sea C un punto sobre el lado OB de tal manera que $\measuredangle OAC = \measuredangle CAB = 36°$. De esta manera, obtenemos el triángulo $\triangle CAB$, el cual es semejante al triángulo $\triangle OAB$. Utilizando la proporción entre los lados tenemos:

$$\frac{x}{R} = \frac{R - x}{x}.$$

Esto da lugar a la siguiente ecuación (aquí se acabó la geometría y le toca el turno al álgebra):

$$x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

la cual tiene como raíces a $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ y $-R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. Claramente, la segunda no puede ser solución de nuestro problema, ya que no existen longitudes negativas. Por lo tanto, la solución es $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

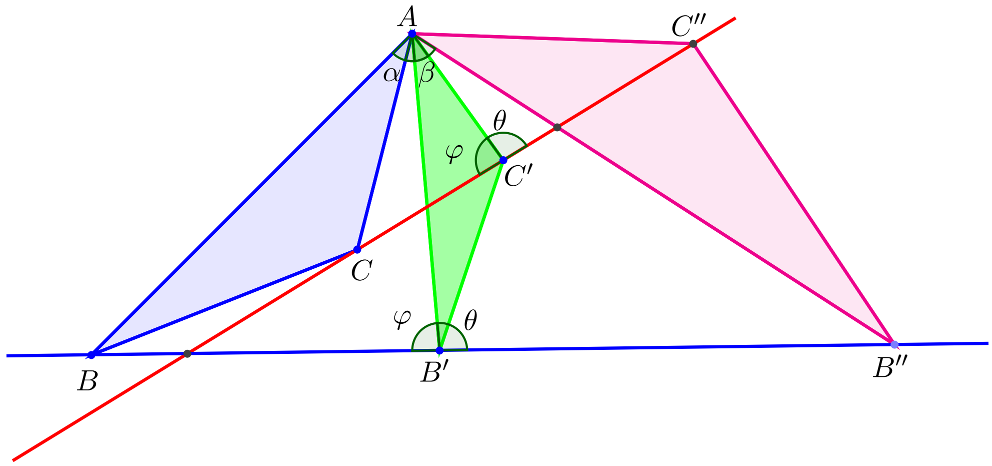


Teorema 1.4.1 *Sean $\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$ y $\triangle AB''C''$ tres triángulos semejantes los cuales comparten el vértice A y de manera que los vértices B, B', B'' son correspondientes y también C, C', C'' son correspondientes. Si B, B' y B'' son colineales, entonces también C, C' y C'' son colineales.*

Demostración. Sean $\measuredangle BAB' = \alpha$ y $\measuredangle B'AB'' = \beta$. Primero, observemos que $\measuredangle CAC' = \alpha$ y $\measuredangle C'AC'' = \beta$, lo cual se ve de manera sencilla por la semejanza de los triángulos dados. Notemos también que

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \quad \text{y} \quad \frac{AB'}{AB''} = \frac{AC'}{AC''},$$

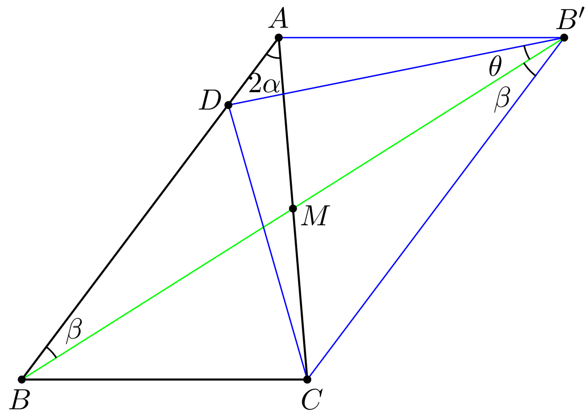
entonces, por el criterio de semejanza $\ell a \ell$ tenemos que se cumplen las siguientes semejanzas: $\triangle CAC' \sim \triangle BAB'$ y $\triangle C'AC'' \sim \triangle B'AB''$. De aquí se sigue que $\measuredangle AC'C = \measuredangle AB'B = \varphi$ y $\measuredangle AC'C'' = \measuredangle AB'B'' = \theta$. Finalmente, como $\varphi + \theta = 180°$, concluimos que C, C' y C'' son colineales. $\square$



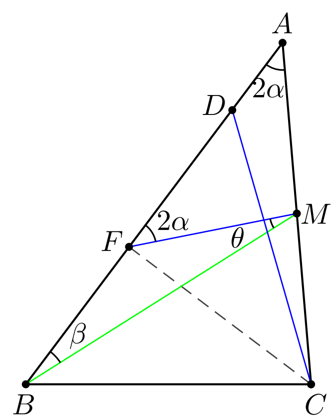
Hasta este momento, podría quedarnos la idea de que un problema posee sólo una solución y se necesita de *mucha suerte* para encontrarla. Normalmente esto no es cierto, como podemos apreciarlo en el siguiente ejemplo para el cual damos tres soluciones (esencialmente) distintas:

Ejemplo 1.4.6 *Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Demuestra que $BD = AC$ si y sólo si $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABM$.*

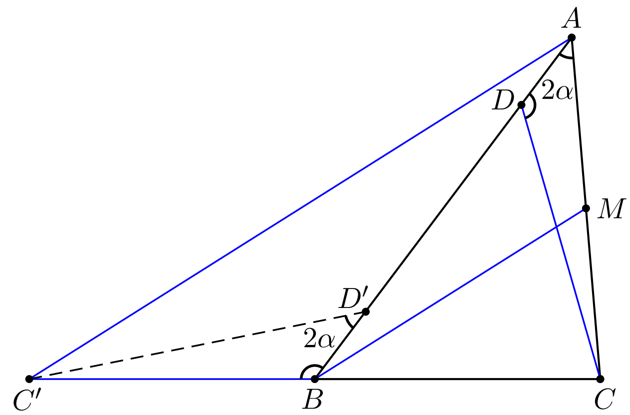
Primera Solución. Sea $\measuredangle BAC = 2\alpha$. Prolongamos el segmento BM hasta un punto B' tal que $BM = MB'$. De este modo obtenemos que el cuadrilátero $AB'CB$ es un paralelogramo, de donde se sigue que $B'C = AB$. También sabemos que $DC = BC = AB'$, entonces el cuadrilátero $ADCB'$ es un trapecio isósceles. De aquí se sigue que $DB' = AC$. Con estas tres igualdades de segmentos obtenemos que el triángulo $B'CD$ es congruente al triángulo ABC. Se sigue que $\measuredangle DB'C = 2\alpha$. Entonces se cumple que $BD = DB' = AC$ si y sólo si $\measuredangle DB'B = \measuredangle DBB'$, lo cual es cierto si y sólo si $\measuredangle DB'B = \measuredangle BB'C = \alpha$. Es decir, $BD = AC$ si y sólo si $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABM$. $\square$



Segunda Solución. Tracemos primero la altura CF desde C. Sean $2\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABM$ y $\theta = \measuredangle FMB$. Como el triángulo $\triangle CFA$ es un triángulo rectángulo, tenemos que $FM = AC/2$, además, también tenemos que $\measuredangle MFA = 2\alpha$. Por otro lado, como el ángulo $\measuredangle MFA$ es exterior al triángulo $\triangle MFB$, tenemos que $\beta + \theta = 2\alpha$. De todo esto obtenemos que $BD = AC$ si y sólo si $BF = FM$, que a su vez es cierto si y sólo si $\beta = \theta$, es decir, si y sólo si $\beta = \alpha$. □



Tercera Solución. Sea C' el punto donde la paralela a MB por A interseca a la línea BC, y sea D' el punto sobre el lado AB tal que $AD' = BD$. Observemos que $C'B = BC = CD$ y que $BD' = AD$, además, como el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles tenemos que $\measuredangle C'BD' = \measuredangle ADC$. Con esto, obtenemos que el triángulo $\triangle C'BD'$ es congruente al triángulo $\triangle CDA$, de donde se sigue que $C'D' = AC$. Denotemos por 2α a los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle C'D'B$.



Supongamos primero que $BD = AC$, es decir, $AD' = AC$. Entonces, $C'D' = AD'$ y de aquí obtenemos que $\measuredangle AC'D' = \measuredangle C'AD'$, además, como $\measuredangle AC'D' + \measuredangle C'AD' = \measuredangle C'D'B = 2\alpha$ obtenemos que $\measuredangle C'AD' = \alpha$. Como $C'A$ y BM son paralelas, concluimos que $\measuredangle ABM = \measuredangle C'AD' = \alpha$.

Ahora, supongamos que $\measuredangle ABM = \alpha$, entonces se sigue que $\measuredangle C'AD' = \alpha$. Como $\measuredangle C'D'B = 2\alpha = \measuredangle AC'D' + \measuredangle C'AD' = \measuredangle AC'D' + \alpha$, tenemos que $\measuredangle AC'D' = \alpha$, es decir, el triángulo $\triangle AC'D'$ es isósceles. De aquí obtenemos que $AD' = C'D' = AC$, y como $AD' = BD$, concluimos que $BD = AC$. $\square$

1.4.1. Problemas

Problema 1.26 *En un triángulo $\triangle ABC$, sobre el lado BC se considera un punto D de tal manera que $\measuredangle BAD = \measuredangle ACB$. Demuestra que*

$$AB^2 = BD \cdot BC.$$

Problema 1.27 *Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se trazan los segmentos AC y AD, cada uno de los cuales es cuerda de una circunferencia y tangente a la otra. Demuestra que*

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC.$$

Problema 1.28 *Sobre los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Sea D el punto medio del* *lado BC. Demuestra que $PM = 2 \cdot AD$.*

Problema 1.29 *En un paralelogramo $ABCD$ se escogen los puntos E y F sobre la diagonal AC de manera que $AE = FC$. Si BE se extiende hasta intersecar AD en H, y BF se extiende hasta intersecar DC en G, demuestra que HG es paralelo a AC.*

Problema 1.30 *Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.*

Problema 1.31 *Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Consideremos un punto P sobre AM. Se extiende el segmento BP hasta intersecar a AC en E, y CP se extiende hasta intersecar a AB en D. Demuestra que DE es paralelo a BC.*

Problema 1.32 *A una circunferencia se le han trazado dos líneas tangentes paralelas las cuales la tocan en los puntos M y N. Se traza una tercer tangente la cual corta a las tangentes anteriores en los puntos K y L. Sea O el centro de la circunferencia. Demuestra que $\measuredangle KOL = 90°$.*

Problema 1.33 *En un triángulo $\triangle ABC$, la altura CE es extendida hasta G de tal manera que $EG = AF$, donde AF es la altura trazada hacia BC. Una línea a través de G y paralela a AB interseca CB en H. Demuestra que $HB = AB$.*

Problema 1.34 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AD, BD, AC y BC, respectivamente. Demuestra que*

(a) $MQ = \frac{a+b}{2}$

(b) $NP = \frac{|a-b|}{2}$

Problema 1.35 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Supongamos que $\measuredangle ADC + \measuredangle BCD = 90^\circ$. Sean M y N los puntos medios de AB y DC, respectivamente. Demuestra que*

$$MN = \frac{b-a}{2}.$$

Problema 1.36 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) M es el punto medio del lado DC. Supongamos que AM interseca a BD en E. A través de E, se traza una línea paralela a DC la cual corta a AD, AC y BC, en los puntos H, F y G, respectivamente. Demuestra que $HE = EF = FG$.*

Problema 1.37 *Demuestra que las rectas que unen los centros de los cuadrados, construidos exteriormente sobre los lados de un paralelogramo, forman también un cuadrado.*

Problema 1.38 *En un cuadrilátero $ABCD$. Sobre las rectas AC y BD se consideran los puntos K y M de manera que BK es paralelo a AD y AM es paralelo a BC. Demuestra que KM es paralelo a CD.*

Problema 1.39 *Sea M el punto medio de la base AC de un triángulo isósceles $\triangle ABC$. H es un punto en BC tal que MH es perpendicular a BC. P es el punto medio del segmento MH. Demuestra que AH es perpendicular a BP.*

Problema 1.40 *Se da un triángulo $\triangle ABC$. En la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC, se toman dos puntos A_1 y A_2 de modo que $AA_1 = AA_2 = BC$ (A_1 es más próximo a la recta BC que A_2). De manera análoga, en la recta perpendicular a AC, que pasa por B, se toman los puntos B_1 y B_2 de modo que $BB_1 = BB_2 = AC$. Demuestra que los segmentos A_1B_2 y A_2B_1 son iguales y mutuamente perpendiculares.*

Problema 1.41 *Por el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$ se traza una recta que corta a AB en el punto M y a CD en el punto N. Por M y N se trazan las rectas paralelas a CD y AB, respectivamente, que cortan a AC y a BD en los puntos E y F. Demuestra que BE es paralelo a CF.*

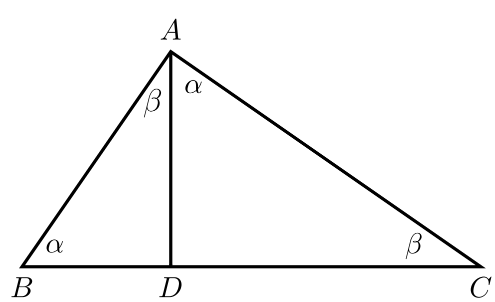
Problema 1.42 *Sea E un punto arbitrario sobre el lado AC del triángulo $\triangle ABC$. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria l. Por E, se traza una recta paralela a BC la cual corta l en el punto N. También por E, se traza una recta paralela a AB la cual corta l en el punto M. Demuestra que AN es paralelo a CM.*

Problema 1.43 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y sea Γ el semicírculo que tiene a BC como diámetro y que es exterior al triángulo. Demuestra que si una línea que pasa por A trisecta a BC, entonces también trisecta al arco Γ.*

Problema 1.44 *Sea I el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ΔABC. Esta circunferencia es tangente a los lados BC, CA y AB del triángulo en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta paralela a MK que pasa por el punto B interseca a las rectas LM y LK en los puntos R y S, respectivamente. Demuestra que el ángulo $\measuredangle RIS$ es agudo.*

1.5. Teorema de Pitágoras

Antes de enunciar el *Teorema de Pitágoras* vamos a analizar un triángulo rectángulo el cual tiene trazada la altura hacia la hipotenusa .



Sea $\triangle ABC$ el triángulo mencionado el cual tiene trazada la altura AD y con ángulo recto en A. Sean $\measuredangle ABC = \alpha$ y $\measuredangle ACB = \beta$. Tenemos que $\alpha + \beta = 90°$, entonces también $\measuredangle DAC = \alpha$ y $\measuredangle BAD = \beta$. Así, de ésta manera hemos obtenido dos triángulos semejantes al $\triangle ABC$, es decir, $\triangle BAD$ y $\triangle DAC$ son semejantes al triángulo $\triangle ABC$. De la semejanza entre $\triangle BAD$ y $\triangle DAC$ obtenemos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

de aquí obtenemos que

$$AD^2 = BD \cdot DC,$$

y se dice que AD es la *media geométrica* o *media proporcional* de BD y DC. Además, de manera análoga podemos obtener también que

$$AB^2 = BD \cdot BC \tag{1.1}$$

(de la semejanza de los triángulos $\triangle BAD$ y $\triangle ABC$) y que

$$AC^2 = DC \cdot BC \tag{1.2}$$

(de la semejanza de los triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle ABC$).

Sumando (1.1) y (1.2) tenemos que

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC,$$

esto es

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC \cdot BC,$$

es decir

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. \tag{1.3}$$

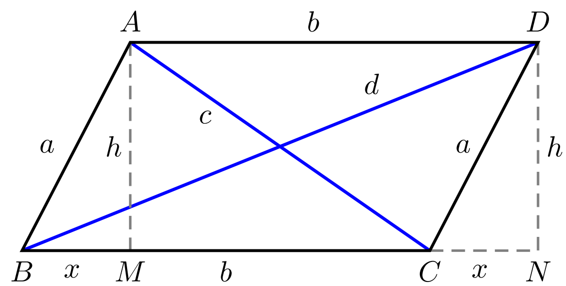
Con esto hemos probado el teorema de Pitágoras.

Teorema 1.5.1 *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Este teorema es atribuido a uno de los más grandes matemáticos de la antigua Grecia, Pitágoras, y será de gran utilidad en muchos de los problemas que veremos más adelante. El recíproco también es cierto, pero esto se deja como ejercicio. Utilizando el Teorema de Pitágoras es fácil probar el siguiente teorema, conocido como la *Ley del Paralelogramo* .

Teorema 1.5.2 *La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

Demostración. Sea $ABCD$ el paralelogramo y sean $AB = CD = a$ y $BC = DA = b$. También sean $AC = c$ y $BD = d$.



Tracemos perpendiculares a BC desde A y D, las cuales intersecan a BC en M y N. Sean $AM = DN = h$ y $BM = CN = x$. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos $\triangle DCN$, $\triangle DBN$, $\triangle AMC$ tenemos las siguientes igualdades:

$$h^2 + x^2 = a^2 \tag{1.4}$$

$$h^2 + (b + x)^2 = d^2 \tag{1.5}$$

$$h^2 + (b - x)^2 = c^2 \tag{1.6}$$

sumando (1.5) y (1.6) obtenemos

$$2h^2 + 2b^2 + 2x^2 = d^2 + c^2.$$

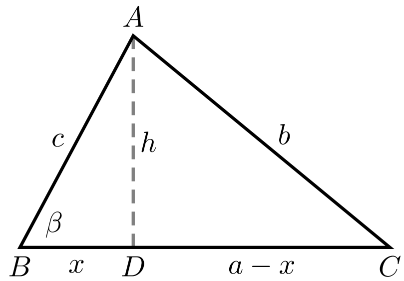
Ahora utilizando (1.4) tenemos que

$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + c^2. \tag{1.7}$$

Lo cual queríamos demostrar. $\square$

De nuevo, utilizando el Teorema de Pitágoras, probaremos fácilmente la bien conocida *Ley del Coseno*.

Ejemplo 1.5.1 *En el triángulo $\triangle ABC$, sean $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ y $\measuredangle ABC = \beta$. Entonces $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$.*



Demostración. Sea $AD = h$ la altura trazada hacia el lado BC y sea $BD = x$. Tenemos que

$$h^2 + x^2 = c^2$$

y

$$h^2 + (a - x)^2 = b^2$$

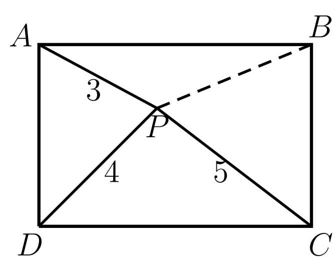
esto implica que

$$c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax = c^2 + a^2 - 2ax = b^2$$

y como $x = c \cdot \cos\beta$, tenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta. \square$$

Ejemplo 1.5.2 *Sea P un punto en el interior del rectángulo $ABCD$. Si $PA = 3$, $PC = 5$ y $PD = 4$, encuentra el valor de PB.*



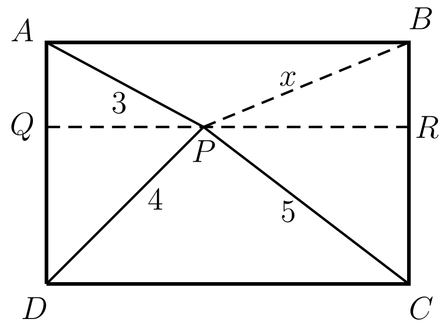
Solución. Sean Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde P hacia los segmentos AD y BC, respectivamente. Utilizando el Teorema de Pitágoras obtenemos que

$$PA^2 - PD^2 = QA^2 - QD^2 = RB^2 - RC^2 = PB^2 - PC^2.$$

Sea $x = PB$, entonces, de la expresión anterior tenemos que

$$3^2 - 4^2 = x^2 - 5^2,$$

de aquí tenemos $x^2 = 18$. Por lo tanto, $x = PB = 3\sqrt{2}$.



De manera muy simple se puede probar el siguiente lema.

Lema 1.5.1 *Sean A y B dos puntos dados. Entonces, el* lugar geométrico *de los puntos* [5] *M tales que $AM^2 - MB^2 = k$ (donde k es un número dado), es una recta perpendicular a AB.*

Ahora, utilizando el lema anterior probaremos el siguiente *Teorema de Carnot*.

Teorema 1.5.3 *Sean D, E y F tres puntos dados. Para que las líneas perpendiculares sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$ trazadas desde los puntos E, D y F, respectivamente, se intersecten en un punto, es necesario y suficiente que*

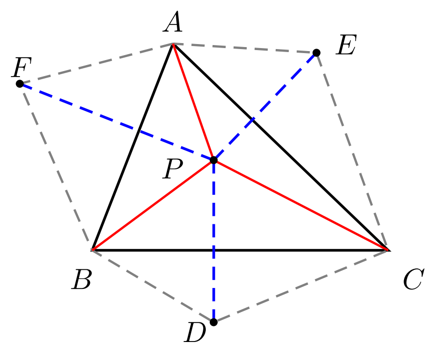
$$DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0.$$

Demostración. Supongamos primero que las tres perpendiculares concurren en un punto P. Por el lema anterior, tenemos que $AF^2 - FB^2 = AP^2 - PB^2$,

[5] El lugar geométrico de los puntos es el conjunto de puntos que cumplen una propiedad dada.

$BD^2 - DC^2 = BP^2 - PC^2$ y $CE^2 - EA^2 = CP^2 - PA^2$. Sumando estas tres expresiones obtenemos que

$$DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0.$$



Ahora, supongamos que se cumple que $DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0$. Consideremos el punto P donde se intersecan las perpendiculares desde F y D sobre los lados AB y BC, respectivamente. Dado que se cumple que $AF^2 - FB^2 = AP^2 - PB^2$ y $BD^2 - DC^2 = BP^2 - PC^2$, tenemos que también debe cumplirse que $CE^2 - EA^2 = CP^2 - PA^2$. Esto último, por el lema anterior, implica que el segmento PE es perpendicular al lado AC. Por lo tanto, las perpendiculares trazadas desde D, E y F sobre los lados respectivos, concurren en un punto. $\square$

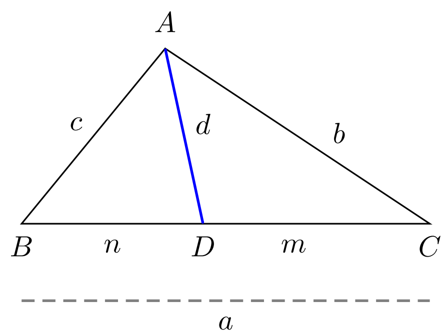
1.5.1. Problemas

Problema 1.45 *Probar el inverso del teorema de Pitágoras: si a, b y c son los lados de un triángulo y se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces es un triángulo rectángulo.*

Problema 1.46 *Sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo, c la hipotenusa y h la altura trazada hacia la hipotenusa. Demuestra que el triángulo con lados h, $c + h$ y $a + b$ es un triángulo rectángulo.*

Problema 1.47 *Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Sean $AB = c, BC = a, CA = b, AD = d, BD = n$ y $DC = m$. Demuestra que* *se cumple el* Teorema de Stewart

$$b^2n + c^2m = a(d^2 + mn).$$



Problema 1.48 *En una circunferencia de radio R está trazado un diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia d de su centro. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al diámetro en el punto A y es tangente interiormente a la circunferencia dada.*

Problema 1.49 *K es el punto medio del lado AD del rectángulo $ABCD$. Hallar el ángulo entre BK y la diagonal AC si sabemos que $AD : AB = \sqrt{2}$.*

Problema 1.50 *En un triángulo $\triangle ABC$, E es un punto sobre la altura AD. Demuestra que*

$$AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2.$$

Problema 1.51 *Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Demuestra que*

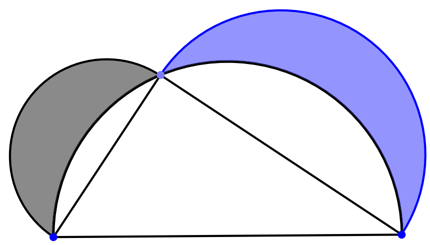
$$AC^2 + BD^2 = 4R^2.$$

Problema 1.52 *Un trapecio $ABCD$, con AB paralelo a CD, tiene sus diagonales AC y BD perpendiculares. Demuestra que*

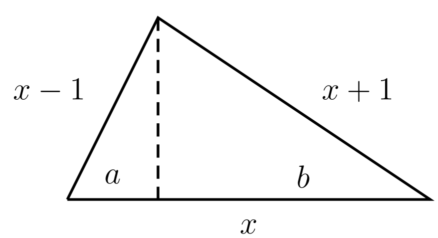
$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

Problema 1.53 *Demuestra que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, entonces sus diagonales son perpendiculares entre sí.*

Problema 1.54 *Sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan semicírculos, como se muestra en la figura. Demuestra que el área de la región sombreada es igual al área del triángulo.*

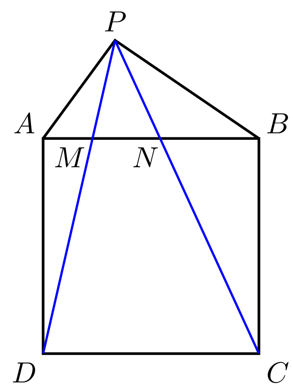


Problema 1.55 *¿Cuál es el valor de $b-a$ en la siguiente figura, donde x, $x-1$ y $x+1$ son las longitudes de los lados del triángulo? (La línea punteada es una altura).*



Problema 1.56 *En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y el triángulo $\triangle ABP$ es rectángulo con ángulo recto en P. Demuestra que*

$$MN^2 = AM \cdot BN.$$



Problema 1.57 *Se dan el triángulo equilátero $\triangle ABC$ y el punto arbitrario D; A_1, B_1 y C_1 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ y $\triangle ABD$. Demuestra que las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto.*

Problema 1.58 *En el hexágono convexo $ABCDEF$ tenemos que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Probar que las perpendiculares bajadas desde los puntos C, E y A sobre las líneas BD, DF y FB, respectivamente, se intersecan en un punto.*

Problema 1.59 *En los rayos AB y CB del triángulo $\triangle ABC$ están trazados los segmentos AM y CN de tal manera que $AM = CN = p$, donde p es el semiperímetro del triángulo (B se halla entre A y M, así como entre C y N). Sea K el punto de la circunferencia circunscrita el cual es diametralmente opuesto a B. Demuestra que la perpendicular trazada desde K sobre MN pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 1.60 *Se dan una circunferencia y el punto A fuera de ésta. Una circunferencia que pasa por A, es tangente a la dada en el punto arbitrario B. Las líneas tangentes a la segunda por los puntos A y B se intersecan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.*

1.6. Cuadriláteros cíclicos.

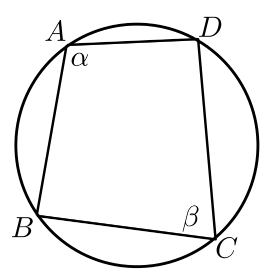
Un hecho muy conocido en geometría es que por cualesquiera tres puntos no alineados pasa exactamente una circunferencia. ¿Pero qué podemos decir si consideramos cuatro puntos en lugar de tres? Como es de esperarse, no siempre existirá una circunferencia que pase por los cuatro puntos dados. Por ejemplo, consideremos la circunferencia que pasa por tres puntos dados (la cual es única), A, B, C, y agreguemos un cuarto punto, D, el cual no esté sobre la circunferencia. Claramente, no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos, ya que en particular pasaría por A, B, C, y por la manera en que escogimos a D, ésta no puede pasar por D. De aquí vemos que los cuadriláteros que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma *especiales*. A tales cuadriláteros se les acostumbra llamar *cuadriláteros cíclicos*.

Definición 1.6.1 *Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia se dice que es un cuadrilátero cíclico.*

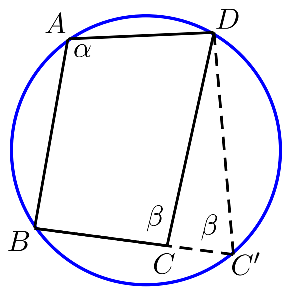
Veremos que dos ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico suman $180°$, más aún, para que un cuadrilátero sea cíclico es suficiente con verificar que dos ángulos opuestos sumen $180°$.

Teorema 1.6.1 *Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a* $180°$.

Demostración. Para probar esto, primero vamos a suponer que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Tenemos que el $\measuredangle DAB = \frac{\widehat{BD}}{2}$ y $\measuredangle BCD = \frac{\widehat{DB}}{2}$, y como $\widehat{BD} + \widehat{DB} = 360°$ (midiendo los ángulos en grados), tenemos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \alpha + \beta = 180°$.

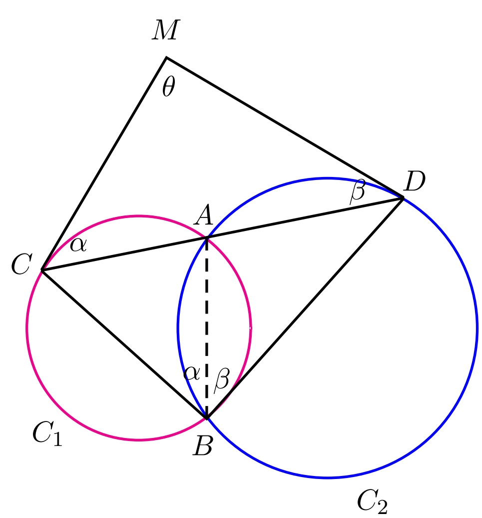


Ahora supongamos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \alpha + \beta = 180°$. Tracemos la circunferencia que pasa por los vértices D, A y B y supongamos que ésta no pasa por el vértice C. Prolonguemos BC hasta que intersecte a la circunferencia en C'. Como el cuadrilátero $ABC'D$ es cíclico tenemos que $\measuredangle DAB + \measuredangle BC'D = 180°$, esto quiere decir que $\measuredangle BC'D = \measuredangle BCD = \beta$ y entonces DC es paralelo a DC', lo cual es una contradicción ya que líneas paralelas no se intersecan. Entonces C coincide con C' y por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. $\square$



Ahora vamos a hacer un ejemplo donde utilicemos el teorema anterior:

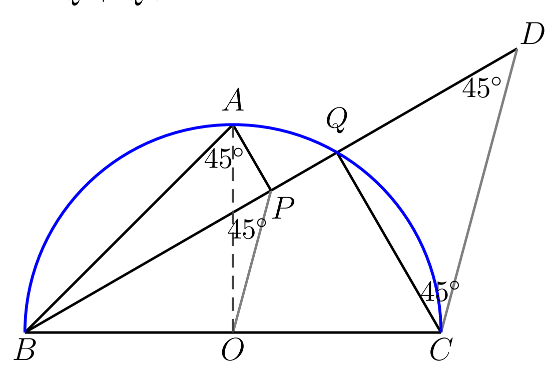
Ejemplo 1.6.1 *Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demuestra que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.*



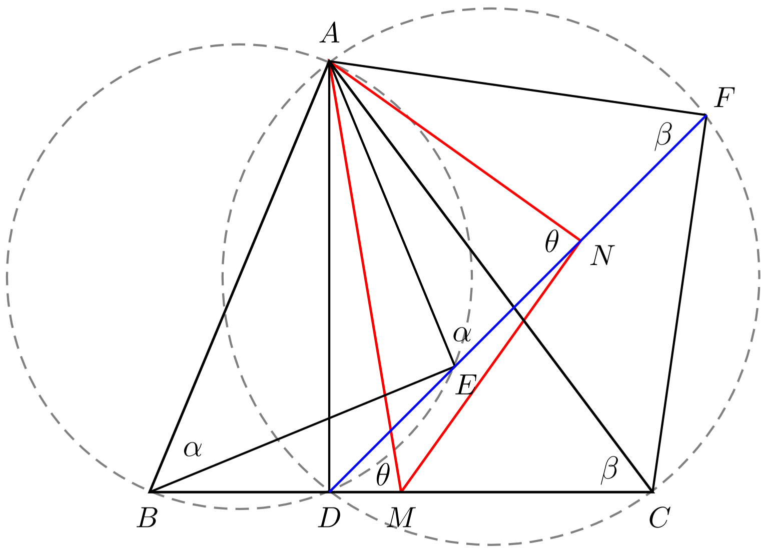
Solución. Queremos probar que $\measuredangle CMD + \measuredangle DBC = 180°$. Tracemos la cuerda común AB. Tenemos que $\measuredangle MCA = \measuredangle CBA = \alpha$ ya que uno es ángulo semi-inscrito y el otro es ángulo inscrito, ambos en la circunferencia C_1. Análogamente se demuestra que $\measuredangle MDA = \measuredangle DBA = \beta$ (en C_2). Tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$, por ser los ángulos internos del triángulo $\triangle MCD$, pero como $\measuredangle CBD = \alpha + \beta$ tenemos que $\measuredangle CMD + \measuredangle DBC = 180°$. $\square$

Ejemplo 1.6.2 *Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea Q un punto sobre el arco $\widehat{AC}$ y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la línea BQ. Demuestra que $BP = PQ + QC$.*

Solución. Consideremos el punto D sobre el rayo BP de tal manera que $QD = QC$, entonces $PD = PQ + QD = PQ + QC$. Bastará entonces probar que P es el punto medio de BD. Primero, tenemos que $\measuredangle QDC = \measuredangle QCD = 45°$, y como O es el punto medio de BC, ahora tendremos que demostrar que OP es paralelo a DC. Para esto, bastará demostrar que $\measuredangle BPO = 45°$. Como $AO \perp BC$ y $\measuredangle APB = 90°$ tenemos que $APOB$ es cíclico y de aquí que $\measuredangle BPO = \measuredangle BAO = 45°$, por lo tanto $BP = PQ + QC$. $\square$



Ejemplo 1.6.3 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demuestra que AN es perpendicular a NM.*



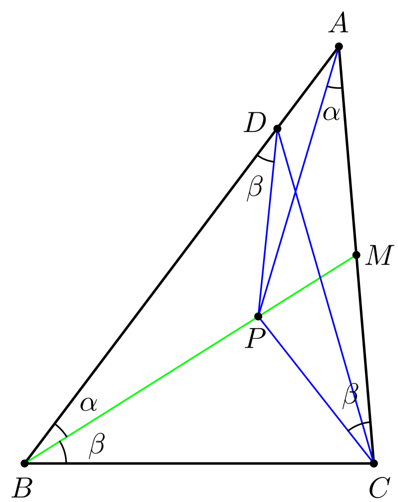
Demostración. Tenemos que E está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABD$ y F está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ADC$, entonces los cuadriláteros $ABDE$ y $ADCF$ son cíclicos. De lo anterior tenemos que $\measuredangle ABD = \measuredangle AEF = \alpha$ y $\measuredangle ACD = \measuredangle AFE = \beta$ lo cual implica que $\triangle ABC \sim \triangle AEF$. Tanto M como N son puntos medios de los lados correspondientes BC y EF, respectivamente, y esto implica que $\measuredangle AMB = \measuredangle ANE = \measuredangle AND = \theta$, es decir, el cuadrilátero $ADMN$ es cíclico y por lo tanto $\measuredangle ANM = 90°$. $\square$

En el ejemplo que acabamos de ver, no es difícil convencerse que no es necesario que M y N sean puntos medios de los lados BC y EF, de hecho, es suficiente con considerar que los puntos dividan a los respectivos segmentos en la misma razón. Esto se vio en realidad en el Teorema 1.4.1.

Aunque el siguiente ejemplo ya fue demostrado en la sección anterior, damos una demostración más utilizando cuadriláteros cíclicos.

Ejemplo 1.6.4 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Demuestra que $BD = AC$ si y sólo si $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABM$.*

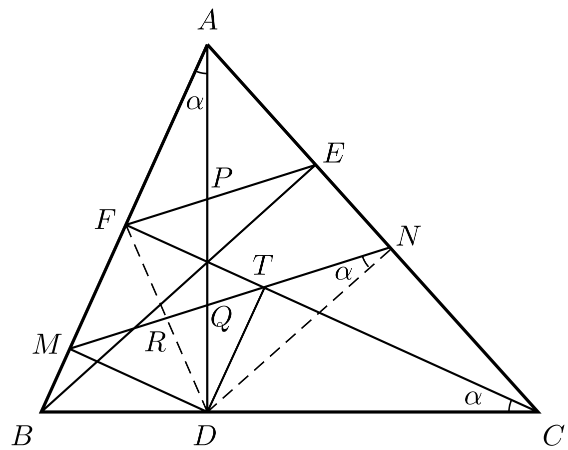
Demostración. Sea P un punto sobre BM tal que $\measuredangle PAM = \measuredangle MBA = \alpha$. Los triángulos $\triangle MAP$ y $\triangle MBA$ comparten el ángulo $\measuredangle BMA$ y por construcción $\measuredangle PAM = \measuredangle MBA$, por tanto, son semejantes. Así que $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MA}$. Como $MA = CM$, se tiene que $\frac{CM}{MP} = \frac{MB}{CM}$. Entonces, los triángulos $\triangle MCP$ y $\triangle MBC$ tienen lados proporcionales, además comparten el ángulo $\measuredangle CMB$. Se sigue que son semejantes. De aquí obtenemos que $\measuredangle MCP = \measuredangle MBC = \beta$.



Ahora, observemos que $\measuredangle APC = 180 - (\alpha + \beta)$. Por otro lado, como $\alpha + \beta = \measuredangle ABC = \measuredangle CDB$, se tiene que $\measuredangle ADC = 180 - (\alpha + \beta) = \measuredangle APC$. Obtenemos que el cuadrilátero $CPDA$ es cíclico. Esto implica que $\measuredangle PDB = \measuredangle PCA = \beta$. Se sigue que los triángulos $\triangle CPA$ y $\triangle DPB$ son semejantes. Entonces, $BD = AC \Leftrightarrow \Delta CPA \cong \Delta DPB \Leftrightarrow PA = PB \Leftrightarrow \measuredangle PAB = \measuredangle PBA = \measuredangle PAC \Leftrightarrow \measuredangle A = 2\measuredangle MBA$. $\square$

Ejemplo 1.6.5 *Sean $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Demuestra que Q es el punto medio de PD.*

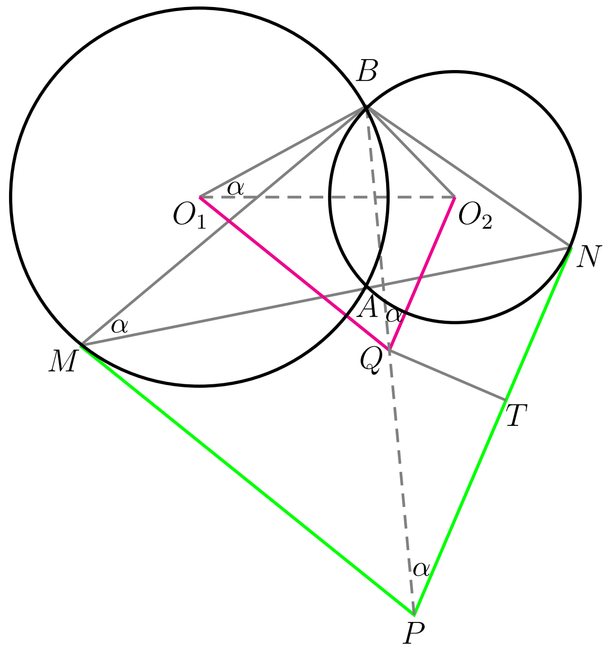
Demostración. Como AD es diámetro, los ángulos $\measuredangle AMD$ y $\measuredangle AND$ son rectos. El triángulo $\triangle ABD$ es entonces semejante al $\triangle ADM$ y de aquí, $AM \cdot AB = AD^2$. Análogamente, $AN \cdot AC = AD^2$. Por lo tanto, $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Esto implica que los triángulos $\triangle ANM$ y $\triangle ABC$ son semejantes, ya que además de tener una pareja de lados proporcionales también comparten el ángulo $\measuredangle BAC$. Se sigue que $BCNM$ es un cuadrilátero cíclico.



Por otro lado, como $\measuredangle BEC = \measuredangle BFC = 90°$, el cuadrilátero $BFEC$ también es cíclico. Entonces $\gamma = \measuredangle ACB = \measuredangle AMN = \measuredangle AFE$. De aquí, MN es paralela a FE. Además, si T es el punto de intersección de MN con CF, $\measuredangle CTN = \measuredangle FTM = 90° - \measuredangle TMF = 90° - \gamma = \measuredangle CDN$. Por lo tanto, el cuadrilátero $DTNC$ es cíclico y entonces $\measuredangle DTC = \measuredangle DNC = 90°$. El cuadrilátero $DMFT$ tiene 3 ángulos rectos, luego el cuarto ángulo también es recto, es decir, se trata de un rectángulo.

Tracemos FR paralela a PQ con R sobre MN, entonces los triángulos $\triangle FMR$ y $\triangle DTQ$ son de lados paralelos y como $DT = FM$ los triángulos son congruentes, luego $DQ = FR = PQ$, por lo tanto Q es el punto medio de PD. □

Ejemplo 1.6.6 *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersecan en los puntos A y B como se muestra en la figura. Por A se traza una recta l que interseca de nuevo a las circunferencias en los puntos M y N. Por M y N se trazan las líneas tangentes respectivas y éstas se intersecan en el punto P. La paralela a PN por O_2 y la paralela a PM por O_1 se intersecan en Q. Demuestra que las rectas PQ, al variar la recta l, pasan por un punto fijo y que la longitud del segmento PQ es constante.*

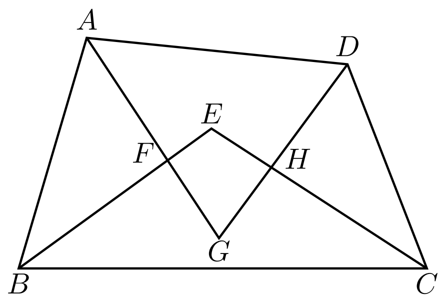


Demostración. Como vimos en el Ejemplo 1.6.1, el cuadrilátero $BMPN$ es cíclico. Entonces $\measuredangle BPN = \measuredangle BMN = \alpha$. Por otro lado, tenemos que $\measuredangle BO_1O_2 = \measuredangle BMN$ y $\measuredangle BO_2O_1 = \measuredangle BNM$, lo cual implica que $\measuredangle O_1BO_2 = \measuredangle MBN$. Con esto hemos probado que el cuadrilátero BO_1QO_2 es cíclico. De aquí obtenemos que $\measuredangle BQO_2 = \measuredangle BO_1O_2 = \measuredangle BMN = \alpha$, lo cual implica que B, Q y P están alineados. De no ser así, tendríamos que BP intersecaría a la línea QO_2 en un punto Q' distinto de Q, pero entonces también tendríamos que $\measuredangle BQ'O_2 = \measuredangle BPN = \measuredangle BQO_2 = \alpha$, lo que a su vez implicaría que los puntos B, O_1, Q, Q' y O_2 son concíclicos. Esto es una contradicción, por lo tanto, B, Q y P están alineados.

Para la segunda parte consideramos la proyección de Q sobre PN y la llamamos T. Sabemos que el ángulo $\measuredangle BMA = \alpha$ no depende de la elección de la recta l, entonces, como la longitud del segmento QT es igual al radio de la circunferencia de centro O_2 y $\measuredangle QPT = \alpha$, tenemos que los triángulos $\triangle QPT$ siempre son congruentes. Por lo tanto, la longitud del segmento PQ no depende de la elección de la línea l. $\square$

1.6.1. Problemas

Problema 1.61 *En la siguiente figura están trazadas las bisectrices* [6] *de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersecan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.*



Problema 1.62 *Sea AB una cuerda en una circunferencia y P un punto sobre el arco $\widehat{AB}$. Sea Q la proyección de P sobre AB, R y S las proyecciones de P sobre las tangentes al círculo en A y B, respectivamente. Demuestra que PQ es la media geométrica de PR y PS, esto es, $PQ = \sqrt{PR \cdot PS}$.*

Problema 1.63 *Una línea PQ, paralela al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$, corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q, corta de nuevo a AB en R. Demuestra que el cuadrilátero $RQCB$ es cíclico.*

Problema 1.64 *Dos circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en un punto M. Sea X un punto en el segmento CD de tal manera que $CX = AD$. Demuestra que el triángulo $\triangle CXM$ es semejante al triángulo $\triangle BAC$.*

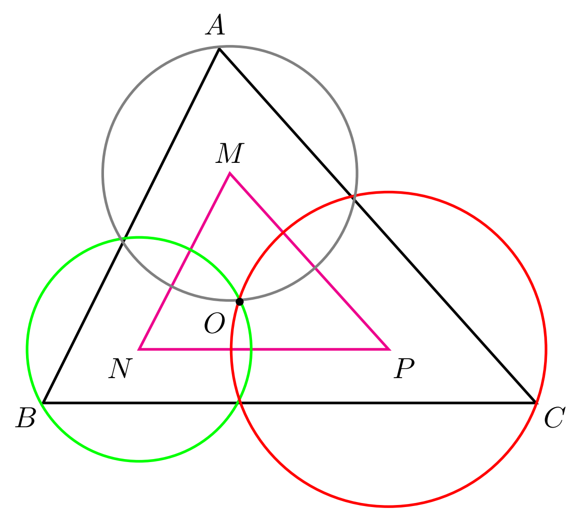
Problema 1.65 *Dos circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza dos rectas ℓ_1 y ℓ_2; ℓ_1 interseca a C_1 en C y a C_2 en*

[6] La *bisectriz* de un ángulo es la línea que pasa por el vértice y lo divide en dos ángulos iguales.

D, ℓ_2 interseca a C_1 en E y a C_2 en F. Las líneas CE y FD se intersecan en un punto M. Demuestra que los cuadriláteros $MCBD$ y $MEBF$ son cíclicos.

Problema 1.66 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean M, N y P, puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle APN$, $\triangle BMP$ y $\triangle CNM$. Demuestra que las tres circunferencias tienen un punto en común el cual se conoce como* punto de Miquel.[7]

Problema 1.67 *Tres circunferencias tienen un punto común O. Los lados del triángulo $\triangle ABC$ pasan por los otros puntos de intersección entre los pares de circunferencias, como se muestra en la figura. Demuestra que el triángulo formado por los centros de las circunferencias es semejante al triángulo $\triangle ABC$.*



Problema 1.68 Teorema de Steiner. *Están dadas cuatro rectas en el plano de manera que no hay un par de ellas que sean paralelas ni tres de ellas que sean concurrentes. Estas rectas determinan cuatro triángulos. Entonces se cumple que*

(a) las circunferencias circunscritas a estos triángulos concurren en un punto.

(b) Los centros de las circunferencias circunscritas a estos triángulos determinan un cuadrilátero cíclico.

[7] Este resultado es conocido como *teorema de Miquel*.

Problema 1.69 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean M, N y P, puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle APN$, $\triangle BMP$ y $\triangle CNM$. Sea T un punto cualquiera en el plano. La línea TA corta a la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle APN$ de nuevo en A', La línea TB corta a la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BMP$ de nuevo en B', y La línea TC corta a la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle CNM$ de nuevo en C'. Demuestra que los puntos A', B', C' y T son concíclicos.*

Problema 1.70 *Por uno de los puntos C del arco $\widehat{AB}$ de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda AB en los puntos D y E, y a la circunferencia, en los puntos F y G. ¿Para cuál posición del punto C en el arco $\widehat{AB}$, el cuadrilátero $DEGF$ es cíclico?*

Problema 1.71 *Se toma un punto P en el interior de un rectángulo $ABCD$ de tal manera que $\measuredangle APD + \measuredangle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\measuredangle DAP$ y $\measuredangle BCP$.*

Problema 1.72 *Sobre los lados de un cuadrilátero convexo, hacia el exterior, están construidos cuadrados. Las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.*

Problema 1.73 *En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC por M interseca a AD en K. Demuestra que $\measuredangle BCM = \measuredangle KCM$.*

Problema 1.74 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, sea M el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$, y sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde M hacia los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Determina el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $EFGH$.*

Problema 1.75 *Sea AB el diámetro de un círculo con centro O. Se toma un punto C sobre la circunferencia de tal manera que OC es perpendicular a*

AB. Sea P un punto sobre el arco CB. Las líneas CP y AB se intersecan en Q. Se escoge un punto R sobre la línea AP de tal manera que RQ y AB son perpendiculares. Demuestra que $BQ = QR$.

Problema 1.76 *Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.*

Problema 1.77 *Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.*

Problema 1.78 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Demuestra que las reflexiones* [8] *de P con respecto a AB, BC, CD y DA son concíclicos.*

Problema 1.79 *Está dada la circunferencia Ω. Desde un punto exterior P se trazan dos líneas tangentes a Ω las cuales la tocan en A y B. También por P se traza una secante l a Ω. Desde el centro de Ω se traza una recta perpendicular a l la cual corta a Ω en el punto K y a l en C (el segmento BK corta a l). Demuestra que BK bisecta el ángulo $\measuredangle ABC$.*

Problema 1.80 *La cuerda CD de un círculo de centro O es perpendicular a su diámetro AB. La cuerda AE bisecta el radio OC. Demuestra que la cuerda DE bisecta la cuerda BC.*

Problema 1.81 *Están dados una circunferencia C_1 y un punto P exterior a ésta. Desde P se trazan las tangentes a C_1 las cuales la intersecan en los puntos A y B. También desde P se traza la secante l la cual interseca a C_1 en los puntos C y D. Por A se traza una línea paralela a l la cual interseca a C_1, además de en A, en un punto E. Demuestra que EB bisecta la cuerda CD.*

[8] Decimos que un punto X' es el reflejado de X con respecto a una línea ℓ si el segmento $X'X$ es perpendicular a ℓ y su punto medio está en ℓ.

Problema 1.82 *Desde un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero $\triangle ABC$ están trazadas rectas paralelas a BC, CA y AB, las cuales cortan CA, AB y BC en los puntos M, N y Q, respectivamente. Demuestra que M, N y Q están alineados.*

Problema 1.83 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo y sea D el punto donde la altura desde A interseca a la hipotenusa BC. Sean I y J los incentros de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$, respectivamente, y sean M y N los puntos donde la línea IJ interseca a los catetos AB y AC, respectivamente. Demuestra que $AM = AN$.*

Problema 1.84 *El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia, cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado BC y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia en el punto N. Demuestra que AN parte BC por la mitad.*

Problema 1.85 *Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Una recta arbitraria pasa por B y corta por segunda vez la primera circunferencia en el punto C y a la segunda en el punto D. Las tangentes a la primera circunferencia en C y a la segunda en D se cortan en el punto M. Por el punto de intersección de AM y CD pasa una recta paralela a CM, que corta AC en el punto K. Demuestra que KB es tangente a la segunda circunferencia.*

Problema 1.86 *Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A. Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demuestra que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.*

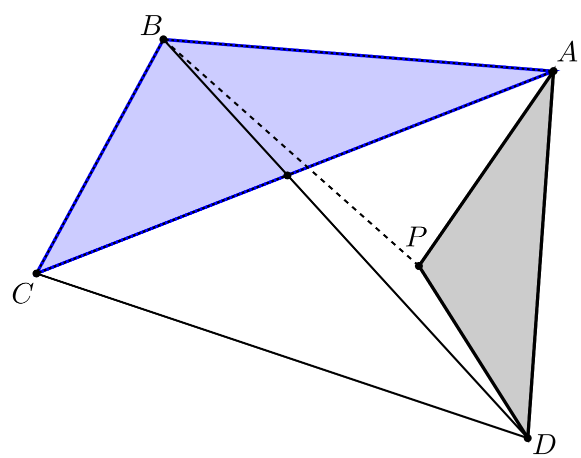
Problema 1.87 *Dado un cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se intersecan en E y las líneas AD y BC se intersecan en F. Los puntos medios de AB y CD son G y H, respectivamente. Demuestra que EF es tangente en E al circuncírculo del triángulo $\triangle EGH$.*

1.7. Teorema de Ptolomeo

En esta sección veremos un teorema sobre cuadriláteros cíclicos el cual se debe al matemático Ptolomeo, de la antigua Grecia. El enunciado del Teorema de Ptolomeo es el siguiente:

Teorema 1.7.1 *Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$



Demostración. Sea P un punto en el plano de manera que $\measuredangle PAD = \measuredangle BAC$ y $\measuredangle PDA = \measuredangle BCA$. De aquí tenemos que el triángulo $\triangle APD$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$, entonces $\frac{BC}{PD} = \frac{AC}{AD}$ de donde se obtiene que

$$BC \cdot AD = AC \cdot PD. \tag{1.8}$$

De la misma semejanza tenemos que $\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AC}$ y $\measuredangle BAP = \measuredangle CAD$, entonces $\triangle ABP \sim \triangle ACD$, de esta última se sigue que $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD}$. Escrita en otra forma

$$AB \cdot CD = AC \cdot BP. \tag{1.9}$$

Sumando las igualdades (1.8) y (1.9) tenemos que

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(BP + PD).$$

Ahora, tenemos que $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ si y sólo si $BP + PD = BD$, es decir, si y sólo si B, P y D son colineales. De manera equivalente, tenemos que $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ si y sólo si $\measuredangle BDA = \measuredangle BCA$, es decir, si y sólo si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. $\square$

El siguiente problema se obtiene de manera muy sencilla si aplicamos el Teorema de Ptolomeo.

Ejemplo 1.7.1 *Sea M un punto sobre el arco $\widehat{CB}$ (el cual no contiene al vértice A) de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero $\triangle ABC$. Entonces se cumple que $BM + CM = AM$.*

Demostración. Aplicando el Teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero cíclico $ABMC$ tenemos que

$$BC \cdot AM = AB \cdot CM + AC \cdot BM.$$

Como el triángulo es equilátero, dividimos ambos lados de la ecuación por la longitud del lado de éste y obtenemos que $AM = CM + BM$. $\square$

Ejemplo 1.7.2 *Dado un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, sean R y r el circunradio y el inradio, respectivamente. Sea O el circuncentro y sean d_A, d_B, d_C, las distancias de O a los lados BC, CA, AB, respectivamente. Demuestra que $d_A + d_B + d_C = R + r$.*

Demostración. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde O hacia los lados BC, CA y AB, respectivamente. Observemos que el cuadrilátero $BDOF$ es cíclico, entonces, aplicando el Teorema de Ptolomeo, tenemos $BO \cdot DF = BD \cdot FO + BF \cdot DO$, es decir

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_C + \frac{c}{2} \cdot d_A. \tag{1}$$

Análogamente,

$$R \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_B + \frac{b}{2} \cdot d_A, \tag{2}$$

y

$$R \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_C + \frac{c}{2} \cdot d_B. \tag{3}$$

Sumando (1), (2) y (3) obtenemos

$$R\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right) = d_A\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right) + d_B\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right) + d_C\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right).$$

Equivalentemente

$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - \left(\frac{a}{2} \cdot d_A + \frac{b}{2} \cdot d_B + \frac{c}{2} \cdot d_C\right),$$

es decir

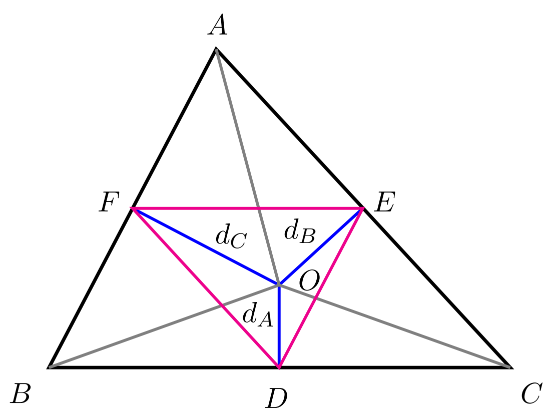
$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - (|BOC| + |COA| + |AOB|)\,,$$

$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - |ABC|,$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$. Como el área del triángulo se obtiene mediante la expresión $s \cdot r$, lo cual puede verse dividiendo al triángulo en tres triángulos más pequeños los cuales tienen altura r, tenemos que

$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - s \cdot r.$$

De esta última igualdad se obtiene la expresión deseada. □



Si el triángulo es obtusángulo, por ejemplo $\measuredangle BAC > 90°$, entonces se cumple que $d_B + d_C - d_A = R + r$. La demostración es análoga a la que acabamos de ver.

1.7.1. Problemas

Problema 1.88 *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean I su incentro y L el punto donde la línea AI interseca al circuncírculo. Demuestra que*

$$\frac{AL}{LI} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

Problema 1.89 *El triángulo isósceles $\triangle ABC$ ($AB = AC$) está inscrito en una circunferencia. Sea P un punto en el arco $\widehat{BC}$. Demuestra que*

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}.$$

Problema 1.90 *Una circunferencia pasa por el vértice A de un paralelogramo $ABCD$ e interseca los lados AB y AD en los puntos P y R, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto Q. Demuestra que $AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$.*

Problema 1.91 *Sea $A_0 A_1 \ldots A_{3n-1}$ un $3n$-ágono regular inscrito en una circunferencia. Desde un punto P, sobre la circunferencia, se trazan las cuerdas a los $3n$ vértices. Demuestra que la suma de las longitudes de las n cuerdas más grandes es igual a la suma de las longitudes de las restantes $2n$ cuerdas.*

Problema 1.92 *Dado un heptágono regular $ABCDEFG$ de lado 1, demuestra que las diagonales AC y AD verifican*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

Problema 1.93 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean x, y y z las distancias desde A hacia las líneas BD, BC, CD, respectivamente. Demuestra que*

$$\frac{BD}{x} = \frac{BC}{y} + \frac{CD}{z}.$$

Problema 1.94 *Sea $\mathcal{P}$ un pentágono cíclico. Considera una triangulación de $\mathcal{P}$, es decir, la descomposición de $\mathcal{P}$ en tres triángulos disjuntos con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$. Ahora, considera la suma de los inradios de los triángulos en los cuales queda dividido $\mathcal{P}$. Demuestra que esta suma no depende de la triangulación escogida.*

Problema 1.95 Teorema de Casey. *Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ cuatro círculos los cuales son tangentes a una circunferencia Γ, todos ellos tangentes internamente o todos ellos tangentes externamente, y dispuestos en forma cíclica. Denotemos por t_{ij} la tangente externa común a las circunferencias $\mathcal{C}_i$ y $\mathcal{C}_j$. Entonces*

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{41} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

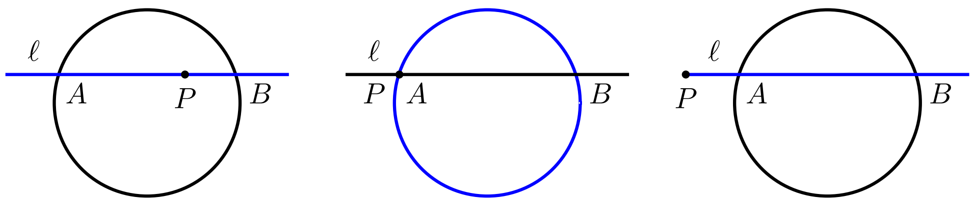
Recíprocamente, si las circunferencias están localizadas de manera que

$$\pm t_{12} \cdot t_{34} \pm t_{23} \cdot t_{41} \pm t_{13} \cdot t_{24} = 0,$$

para alguna combinación de los signos $+$ y $-$, entonces existe una circunferencia la cual toca a todos los círculos, siendo los contactos todos internos o todos externos.

1.8. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

Consideremos un punto P y una circunferencia Ω de centro O y radio r. El número $(OP)^2 - r^2$ se conoce como *la potencia* de P *con respecto a* Ω. Notemos que la potencia de un punto dado P es positiva, cero, o negativa, dependiendo de si el punto se encuentra fuera, sobre, o dentro de la circunferencia. De ahora en adelante no nos preocuparemos por el signo de la potencia, ya que para muchos de los problemas a los que nos enfrentamos en una olimpiada de matemáticas sólo nos interesa el valor absoluto de ésta. Sin embargo, si es importante notar la relación que existe entre la potencia de un punto dado P y el producto de las longitudes de ciertos segmentos sobre las líneas que pasan por P.



Teorema 1.8.1 *Sea Ω una circunferencia de centro O y radio r y sea P un punto en el plano. Si una línea por P interseca a Ω en A y B, entonces el valor absoluto de la potencia de P es igual al producto de las longitudes de los segmentos PA y PB.*

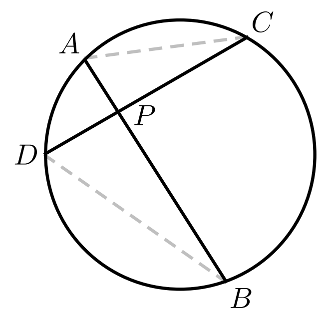
Demostración. Demostraremos el teorema para cada uno de los casos siguientes.

I. El punto P está sobre la circunferencia. Claramente la potencia es cero ya que $OP = r$. Para cada línea por P tenemos que alguno de los segmentos PA o PB, mencionados en el enunciado del teorema, tiene longitud 0, entonces el producto $PA \cdot PB = 0$.

II. El punto P está en el interior de Ω. Sean AB y CD dos cuerdas arbitrarias que pasan por el punto P. Tracemos CA y BD. Tenemos que $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$ porque ambos son ángulos inscritos que intersecan el mismo arco, análogamente $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$, de aquí que el triángulo $\triangle APC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Longrightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

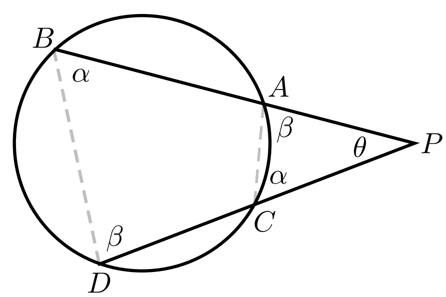
De manera particular, si CD es un diámetro de Ω tenemos lo siguiente: supongamos que el segmento CP contiene al punto O, entonces $CP = CO + OP = r + OP$ y $PD = DO - PO = r - PO$, lo cual muestra que la potencia es constante para todas las cuerdas que pasen por P.



III. El punto P está en el exterior de la circunferencia. Sean PB y PD dos secantes arbitrarias trazadas desde P, las cuales intersecan a la circunferencia, además de en B y D, en los puntos A y C, como se muestra en la figura. Tracemos CA y BD. Tenemos que $\measuredangle ACP = \measuredangle ABD = \alpha$, ya que el cuadrilátero $ABDC$ es cíclico. Por la misma razón, $\measuredangle CAP = \measuredangle BDC = \beta$, de aquí que el triángulo $\triangle APC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Longrightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Como en el caso anterior, consideremos que CD es un diámetro de Ω. De nuevo, es fácil ver que $PC \cdot PD = (PO)^2 - r^2$, es decir, el producto $PA \cdot PB$ es igual a la potencia de P con respecto a Ω. [9] □



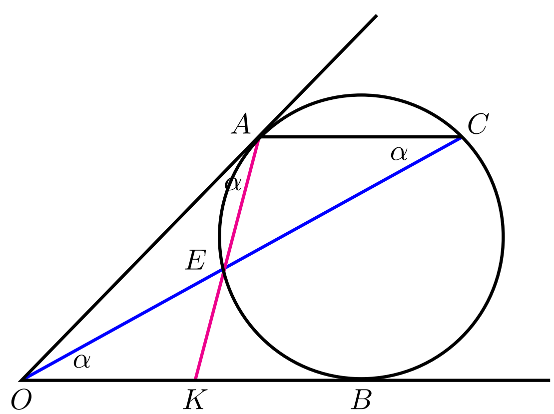
De ahora en adelante, cuando consideremos la potencia de un punto, nos estaremos refiriendo al valor absoluto de ésta. Mediante algunos ejemplos, veremos

[9] Falta demostrar que el valor de la potencia también es igual al cuadrado de la longitud del segmento tangente PM, pero esto se deja como ejercicio.

como la potencia de un punto nos puede ayudar a solucionar algunos problemas en los que aparentemente no tiene relación.

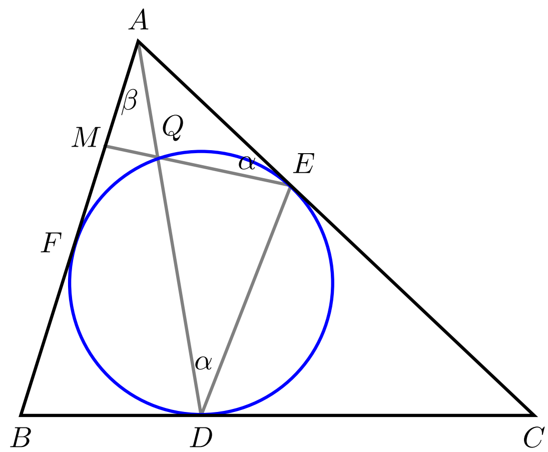
Ejemplo 1.8.1 *Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca sus lados en los puntos A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual interseca a la circunferencia en el punto C. El segmento OC interseca la circunferencia en el punto E. Las líneas AE y OB se intersecan en el punto K. Demuestra que $OK = KB$.*

Demostración. Demostrar que $OK = KB$ es equivalente a demostrar que $OK^2 = KB^2$. Como KB^2 es la potencia del punto K a la circunferencia tenemos que $KB^2 = KE \cdot KA$ (esto se deja como ejercicio). Sólo falta calcular OK^2, y para esto tenemos que $\measuredangle OAK = \measuredangle ACE = \alpha$, ya que ambos ángulos intersecan el arco $\widehat{EA}$; además $\measuredangle EOK = \measuredangle ACE$, por ser AC y OK paralelos. Tenemos entonces que $\triangle EOK \sim \triangle OAK$ de donde obtenemos que $OK^2 = KE \cdot KA$ y como ya habíamos encontrado que $KB^2 = KE \cdot KA$ tenemos que $OK^2 = KB^2$, es decir, $OK = KB$. $\square$



Ejemplo 1.8.2 *La circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB es los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta la circunferencia en un segundo punto Q. Demuestra que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$.*

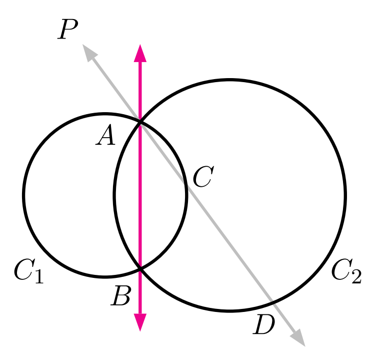
Demostración. De manera análoga a la solución del ejemplo anterior, tenemos que M es el punto medio de AF si y sólo si $\measuredangle MAQ = \measuredangle AEM$ ($\beta = \alpha$).



Por otro lado, sabemos que $\measuredangle EDQ = \measuredangle AEM$ (inscrito y semi-inscrito que intersecan el mismo arco), entonces M será el punto medio de AF si y sólo si $\measuredangle MAQ = \measuredangle EDQ$. Es decir, M es el punto medio de AF si y sólo si $ED \parallel AB$. Pero esto último es cierto si y sólo si $AC = BC$. $\square$

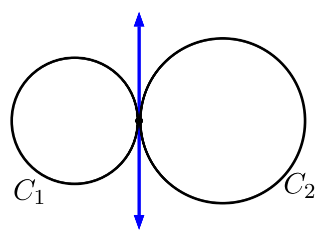
Definición 1.8.1 *Dadas dos circunferencias, consideremos el conjunto de puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas. A este conjunto se le denomina* eje radical*.*

Mostraremos que el eje radical es una línea recta. Consideremos primero el caso cuando las dos circunferencias se cortan en dos puntos:

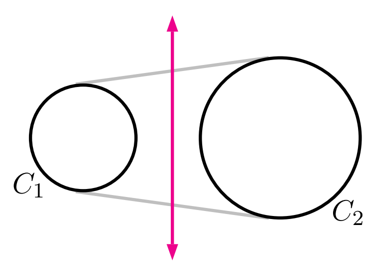


Es muy fácil ver que cualquier punto sobre la línea que pasa por A y B tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias. Pero, ¿cómo sabemos que no hay más puntos, además de los de esta línea, que pertenezcan al eje radical? Como veremos ahora, no existe ningún punto fuera de la recta el cual tenga la misma potencia con respecto a C_1 y C_2. Supongamos que P tiene la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 y consideremos la línea que pasa por P y A. Esta línea interseca a C_1 y C_2 por segunda vez en C y D, respectivamente. Tenemos que la potencia de P con respecto a C_1 es $PA \cdot PC$ y la potencia de P con respecto a C_2 es $PA \cdot PD$, pero $PC \neq PD$, por lo tanto P no pertenece al eje radical.

Si las dos circunferencias son tangentes en un punto entonces el eje radical es la línea tangente que pasa por el punto común:



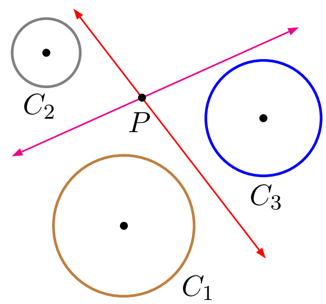
Por otro lado, si las dos circunferencias no se intersecan, se puede probar que el eje radical es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes exteriores comunes[10].



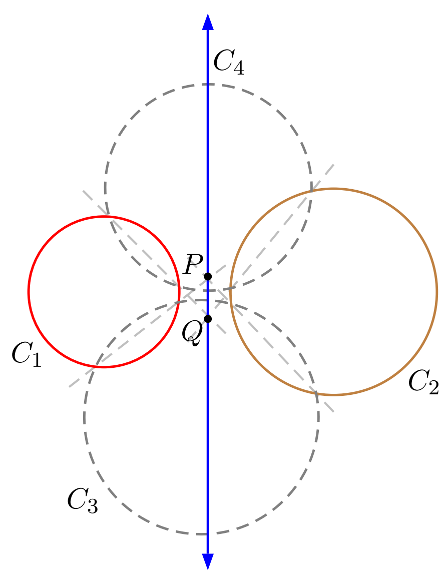
Teorema 1.8.2 *Dadas tres circunferencias cuyos centros no están alineados, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) se intersecan en un punto. Este punto es llamado el* centro radical *de las circunferencias.*

[10] Esto se deja como ejercicio para el lector.

Demostración. Sean C_1, C_2 y C_3 las circunferencias dadas y sea P el punto donde se intersecan los ejes radicales de C_1 y C_2, y C_1 y C_3, respectivamente. De aquí es claro que P tiene la misma potencia con respecto a C_1, C_2 y C_1, C_3, en particular, P tiene la misma potencia con respecto a C_2 y C_3. Se sigue que P pertenece al eje radical de C_2 y C_3. □

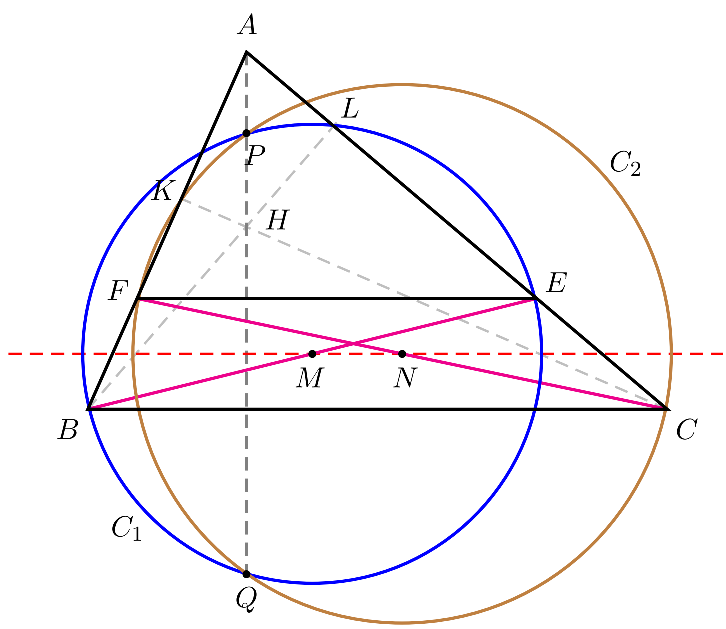


Utilizando este teorema podemos dar una manera de construir el eje radical de dos circunferencias que no se intersecan. Por ejemplo, para encontrar el eje radical de C_1 y C_2 trazamos dos circunferencias (C_3 y C_4) cada una de las cuales intersecte a C_1 y C_2. Tenemos que el centro radical de C_1, C_2 y C_3 es P, y el centro radical de C_1, C_2 y C_4 es Q. Como P y Q tienen la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 tenemos que el eje radical de C_1 y C_2 es la línea que pasa por P y Q.



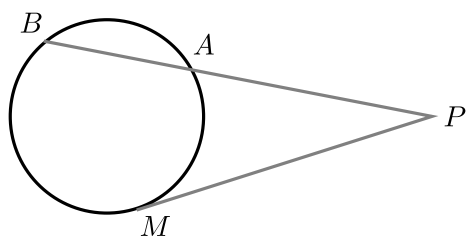
Ejemplo 1.8.3 *Una línea paralela al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ corta a AB en F y a AC en E. Demuestra que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del triángulo $\triangle ABC$ bajada desde el vértice A.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 las circunferencias de diámetros BE y CF, respectivamente. Supongamos que C_1 interseca a AC de nuevo en L y que C_2 interseca a AB de nuevo en K. Sean P y Q los puntos de intersección de estas circunferencias. Debido a que BE es diámetro de C_1 tenemos que $\measuredangle BLE = 90°$, de la misma manera tenemos que $\measuredangle CKF = 90°$, y con esto tenemos que el cuadrilátero $BKLC$ es cíclico. Denotemos la circunferencia circunscrita de $BKLC$ por C_3. Tenemos que la línea BL es el eje radical de C_1 y C_3, además, la línea CK es el eje radical de C_2 y C_3. Tenemos que estos ejes radicales se intersecan en el *ortocentro* del triángulo (el punto donde concurren las alturas, H), y por el Teorema 1.6.2 tenemos que el eje radical de C_1 y C_2 también debe pasar por H. Como el eje radical de C_1 y C_2 es precisamente la línea PQ, tenemos que PQ pasa por H, además, como sabemos que la línea que une los centros de dos circunferencias es perpendicular a su eje radical (esto se deja como ejercicio), tenemos entonces que PQ es perpendicular a MN. Por otro lado, como M y N son puntos medios de BE y CF, además, como $EF \parallel BC$, concluimos que los puntos P y Q están sobre la línea que contiene la altura desde el vértice A. $\square$

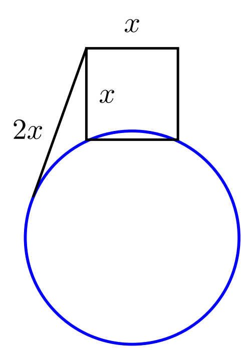


1.8.1. Problemas

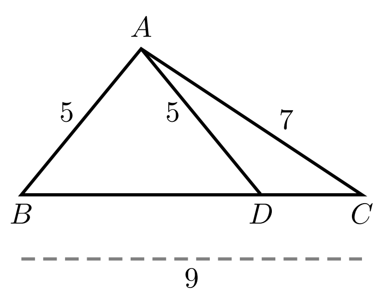
Problema 1.96 *En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersecan la circunferencia en los puntos A, B y M. Demuestra que $PM^2 = PA \cdot PB$.*



Problema 1.97 *En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.*



Problema 1.98 *En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.*



Problema 1.99 *Demuestra que el eje radical de dos circunferencias, donde ninguna de ellas contiene a la otra, es la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos tangentes comunes.*

Problema 1.100 *Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la línea de los centros* [11].

Problema 1.101 *Por un punto sobre el eje radical de dos circunferencias dibujamos secantes a cada una de éstas. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos forman un cuadrilátero cíclico.*

Problema 1.102 *Sea BD la bisectriz del ángulo $\measuredangle ABC$ del triángulo $\triangle ABC$. El circuncírculo del triángulo $\triangle BDC$ interseca a AB en E y el circuncírculo del triángulo $\triangle ABD$ interseca a BC en F. Demuestra que $AE = CF$.*

Problema 1.103 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo arbitrario y sea P un punto fijo en el plano. Las líneas AP, BP y CP intersecan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Consideremos dos circunferencias, una que pasa por A y A_1 y otra que pasa por B y B_1. Sean D y D_1 los extremos de la cuerda común de estas circunferencias. Demuestra que C, C_1, D y D_1 se hallan en una misma circunferencia.*

Problema 1.104 *Una circunferencia de centro O pasa por los vértices A y C de un triángulo $\triangle ABC$ y corta los segmentos AB y BC nuevamente en distintos puntos K y N, respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle KBN$ se cortan exactamente en dos puntos distintos B y M. Demuestra que el ángulo $\measuredangle OMB$ es un ángulo recto.*

Problema 1.105 *Sea C un punto sobre un semicírculo de diámetro AB y sea D el punto medio del arco $\widehat{AC}$. Sea E la proyección del punto D sobre la línea BC y sea F la intersección de la línea AE con el semicírculo. Demuestra que BF bisecta al segmento DE.*

[11] Se llama línea de los centros a la línea que pasa por los centros de dos circunferencias.

Problema 1.106 Teorema de Haruki. *Sean AB y CD dos cuerdas sobre una circunferencia las cuales no se intersecan y sea P un punto variable sobre el arco $\widehat{AB}$, el cual no contiene los puntos C y D. Sean E y F las intersecciones de las cuerdas PC, AB, y PD, AB, respectivamente. Entonces el valor de $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ no depende de la posición del punto P.*

Problema 1.107 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un semicírculo Γ de diámetro AB. Las líneas AC y BD se intersecan en E y las líneas AD y BC en F. La línea EF interseca al semicírculo Γ en G y a la línea AB en H. Demuestra que E es el punto medio del segmento GH si y sólo si G es el punto medio del segmento FH.*

Problema 1.108 *Sea P al punto de intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M, corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD, de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Demuestra que $AT = RC$.*

Problema 1.109 *Demuestra que si una circunferencia interseca los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos D, D'; E, E'; F, F'; respectivamente, entonces*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1.$$

Problema 1.110 *En una circunferencia está trazado el diámetro AB y la cuerda CD perpendicular a AB. Una circunferencia arbitraria es tangente a la cuerda CD y al arco BD. Demuestra que la longitud del segmento tangente a esta circunferencia, trazado a partir del punto A, es igual a AC.*

Problema 1.111 *Sea O el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$. La bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ interseca al lado BC en un punto D. La línea perpendicular a AD, a través de su punto medio M, interseca a la línea AO en un punto N. Demuestra que los puntos B, C, M y N son concíclicos.*

Problema 1.112 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Los puntos M y N son tomados sobre los lados AB y AC, respectivamente. Los círculos con diámetros BN y CM se intersecan en los puntos P y Q. Demuestra que P, Q y el ortocentro H, son colineales.*

Problema 1.113 *Dado un punto P, en el interior del círculo circunscrito a un triángulo $\triangle ABC$, sean D , E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. El triángulo $\triangle DEF$ es denominado el triángulo pedal del punto P. Demuestra que el área del triángulo $\triangle DEF$ se puede calcular como*

$$|DEF| = \frac{(R^2 - d^2)}{4R^2}|ABC|,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ y d es la distancia del punto P al circuncentro de $\triangle ABC$. (Teorema de Euler)
El resultado sigue siendo válido si el punto P está fuera del círculo circunscrito, sólo que en este caso se tiene que

$$|DEF| = \frac{(d^2 - R^2)}{4R^2}|ABC|.$$

Problema 1.114 *Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos sobre una línea (en ese orden). Los círculos con diámetros AC y BD se intersecan en X y Y. La línea XY interseca BC en Z. Sea P un punto sobre la línea XY, distinto de Z. La línea CP interseca el círculo con diámetro AC en C y M, y la línea BP interseca el círculo con diámetro BD en B y N. Demuestra que las líneas AM, DN y XY son concurrentes.*

Problema 1.115 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con ortocentro H y sea W un punto sobre el lado BC. Denotemos por M y N los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. Sea ω_1 el circuncírculo de $\triangle BWN$ y sea X el punto sobre ω_1 el cual está diametralmente opuesto a W. Análogamente, denotemos por ω_2 el circuncírculo de $\triangle CWM$ y sea Y el punto sobre ω_2 el cual está diametralmente opuesto a W. Demuestra que X, Y y H son colineales.*

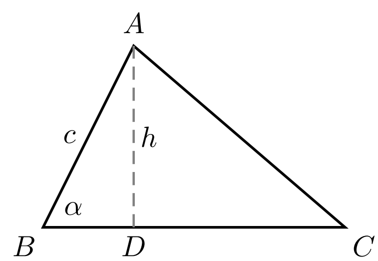
1.9. Areas de triángulos y cuadriláteros

Si en un triángulo conocemos la longitud de un lado y la altura trazada hacia éste, es bien sabido que podemos calcular su área simplemente multiplicando ambas magnitudes y después dividiendo entre dos. Sin embargo, existen otras fórmulas para calcular el área, las cuales en muchas ocasiones resultan más útiles, por ejemplo:

Ejemplo 1.9.1 *En el triángulo $\triangle ABC$, sabemos que $AB = c$, $BC = a$ y $\measuredangle ABC = \alpha$. Entonces*

$$|ABC| = \frac{1}{2}ac \cdot \text{sen}\, \alpha.$$

Demostración. Sea h la longitud de la altura trazada hacia el lado BC. Sabemos que $|ABC| = \frac{1}{2}ah$ y además como $\frac{h}{c} = \text{sen}\, \alpha$, tenemos que $|ABC| = \frac{1}{2}ac \cdot \text{sen}\, \alpha$. □



Además, por la Ley de Senos tenemos que

$$\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C} = 2R,$$

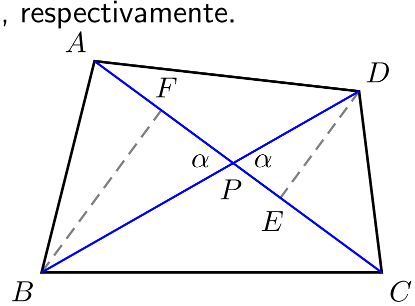
donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Utilizando esto y sustituyéndolo en la expresión anterior tenemos que

$$|ABC| = 2R^2 \cdot \text{sen}\, A \cdot \text{sen}\, B \cdot \text{sen}\, C.$$

Ejemplo 1.9.2 *Consideremos un cuadrilátero convexo $ABCD$ y sea P el punto de intersección de AC y BD. Si sabemos que $\measuredangle APB = \alpha$, entonces*

$$|ABCD| = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \text{sen}\, \alpha.$$

Demostración. Tracemos las perpendiculares desde B y D sobre AC, las cuales intersecan AC en F y E, respectivamente.



Tenemos que

$$|ABCD| = |ABC| + |ADC| = \frac{1}{2}AC \cdot BF + \frac{1}{2}AC \cdot DE$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{AC \cdot BP \cdot \operatorname{sen}\alpha + AC \cdot DP \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{AC(BP + DP) \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \operatorname{sen}\alpha. \ \square$$

Además, si el cuadrilátero tiene alguna propiedad especial, es posible encontrar otras fórmulas para calcular el área.

Ejemplo 1.9.3 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y sean $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ y $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Entonces tenemos que*

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Demostración. Sea $\measuredangle DAB = \alpha$ y sea $x = BD$. Tenemos que

$$|ABCD| = |ABD| + |BCD| = \frac{1}{2}(ad + bc) \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}(ad + bc)\sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha, \\ x^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha, \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2bc+2ad},$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{\frac{(2bc+2ad)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{(2bc+2ad)^2}},$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{\sqrt{(2bc+2ad+b^2+c^2-a^2-d^2)(2bc+2ad-b^2-c^2+a^2+d^2)}}{4},$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2-(a-d)^2][(a+d)^2-(b-c)^2]},$$

$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+d-a)(b+c+a-d)(a+d+c-b)(a+d+b-c)},$$

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-d)(s-b)(s-c)}. \ \square$$

La fórmula anterior es conocida como *fórmula de Brahmagupta*. Cuando el cuadrilátero se degenera en triángulo, obtenemos la conocida *fórmula de Herón*, por ejemplo, si $D = A$ entonces tenemos que

$$|ABC| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s)}.$$

Otro hecho que resulta muy útil en muchos problemas donde aparecen razones de longitudes de segmentos de figuras o razones de áreas es el siguiente:

Lema 1.9.1 *Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes, y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \lambda$ entonces*

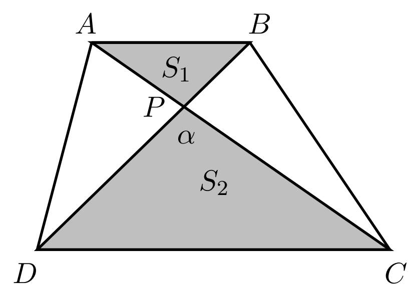
(a) $AB + BC + CA = \lambda(DE + EF + FD)$.

(b) $|ABC| = \lambda^2 \cdot |DEF|$.

Demostración. La demostración del inciso (a) es clara de la proporción de los lados de los triángulos. Para demostrar (b), notemos que si h y h' son las alturas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, trazadas hacia los lados BC y EF, respectivamente, entonces se cumple que $\frac{h}{h'} = \lambda$. Ahora, como $|DEF| = \frac{EF \cdot h'}{2}$ y $|ABC| = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\lambda \cdot EF \cdot \lambda \cdot h'}{2}$, se sigue que

$$\frac{|ABC|}{|DEF|} = \frac{\frac{\lambda^2 \cdot EF \cdot h'}{2}}{\frac{EF \cdot h'}{2}} = \lambda^2. \square$$

Ejemplo 1.9.4 *Las áreas de los triángulos formados por los segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son S_1 y S_2. Hallar el área del trapecio.*



Solución. En el trapecio $ABCD$, sea P el punto de intersección de las diagonales, y sean $|DPC| = S_2$, $|APB| = S_1$ y $\measuredangle DPC = \alpha$. Tenemos que

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \frac{1}{2}\sqrt{(AP \cdot PB \cdot \text{sen}\,\alpha)(DP \cdot PC \cdot \text{sen}\,\alpha)}$$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \frac{1}{2}\sqrt{(AP \cdot DP \cdot \text{sen}\,\alpha)(BP \cdot PC \cdot \text{sen}\,\alpha)}$$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{|APD| \cdot |BPC|}$$

pero como $|APD| = |BPC|$, tenemos que

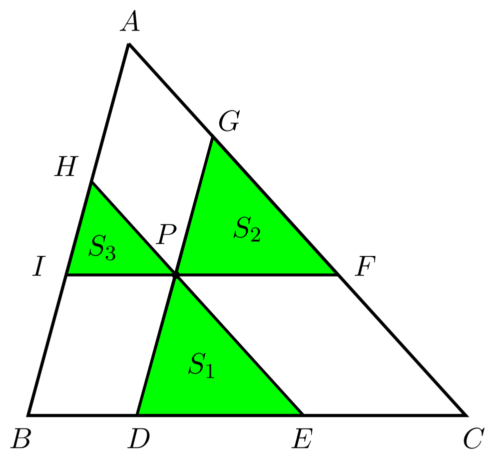
$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = |APD| = |BPC|$$

$\Longrightarrow$

$$|ABCD| = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2. \ \square$$

Ejemplo 1.9.5 *A través de cierto punto tomado dentro del triángulo, se han trazado tres rectas paralelas a sus lados. Estas rectas dividen el área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3. Hallar el área del triángulo dado.*

Solución. Sean P el punto dado y S el área del triángulo $\triangle ABC$. Sean D, E, F, G, H, I los puntos donde estas paralelas intersecan a los lados, como se muestra en la figura siguiente.



Los triángulos $\triangle DEP$, $\triangle FGP$ y $\triangle HIP$ son semejantes al triángulo $\triangle ABC$, además sus lados se relacionan de la siguiente manera:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{PF}{BC} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{IP}{BC} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

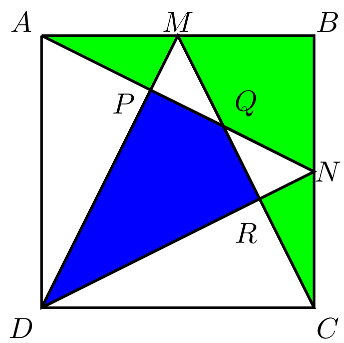
También tenemos que $IP = BD$ y que $PF = EC$, y como $BD + DE + EC = BC$ obtenemos

$$\frac{IP}{BC} + \frac{DE}{BC} + \frac{PF}{BC} = \frac{BD + DE + EC}{BC} = 1 = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}.$$

De aquí obtenemos que $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. $\square$

Ejemplo 1.9.6 *Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC de un cuadrado $ABCD$. Sean P el punto donde AN interseca a DM, Q el punto* *donde AN interseca a CM y R el punto donde CM interseca a DN. Prueba que*

$$|AMP| + |BMQN| + |CNR| = |DPQR|.$$



Solución. La solución a este problema es muy sencilla si consideramos el siguiente resultado conocido como el *Teorema de los tapetes*:

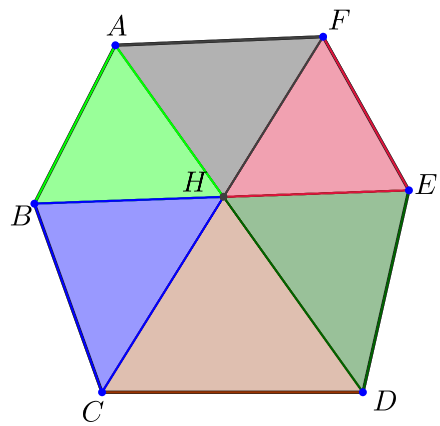
si dos tapetes de áreas S_1 y S_2 se colocan en una región de área $S = S_1 + S_2$, entonces el área doblemente cubierta es igual al área sin cubrir.

Para el problema que estamos analizando en particular, se cumple que la suma de las áreas de los dos triángulos es igual al área del cuadrado. La solución es evidente aplicando el Teorema de los tapetes.

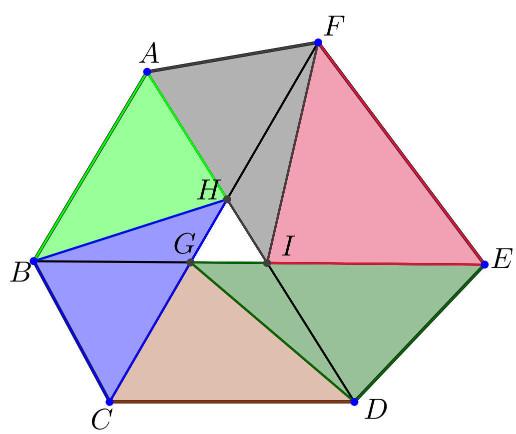
Ejemplo 1.9.7 *En todo hexágono convexo de área 1 podemos escoger tres vértices consecutivos los cuales determinan un triángulo de área menor o igual a $1/6$. Más aún, si no podemos encontrar tres vértices consecutivos del hexágono los cuales determinen un triángulo de área estrictamente menor que $1/6$, entonces las diagonales principales del hexágono son concurrentes y lo dividen en seis triángulos congruentes.*

Solución. Sea $ABCDEF$ un hexágono de área 1. Supongamos primero que las diagonales AD, BE, y CF son concurrentes en un punto H. Notemos que uno de los triángulos $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CDH$, $\triangle DEH$, $\triangle EFH$, o $\triangle FAH$ tiene área a lo más $1/6$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|AHF| \leq 1/6$.

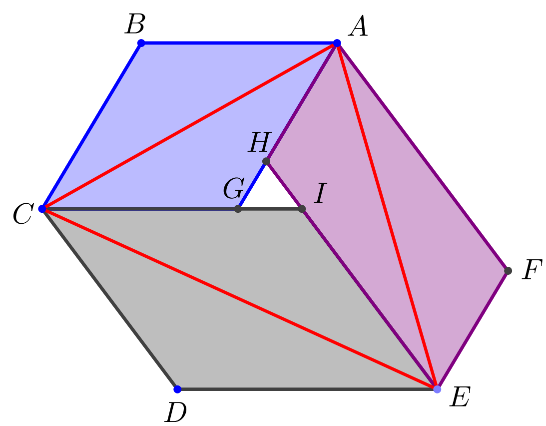
Si $BE \parallel AF$ entonces tenemos que $|ABF| = |AEF| = |AHF| \leq 1/6$. Ahora, si BE no es paralelo a AF entonces tenemos que alguna de $|ABF| < |AHF| \leq 1/6$ ó $AEF| < |AHF| \leq 1/6$ se cumple.



Supongamos ahora que cada dos de los segmentos AD, BE y CF se intersecan en alguno de los puntos G, H y I, como se muestra en la siguiente figura. Consideremos la división del hexágono en los triángulos $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CDG$, $\triangle DEG$, $\triangle EFI$, $\triangle FAI$ y $\triangle GHI$. Claramente, alguno de los seis triángulos enlistados tiene área menor que $1/6$. En cualquier caso, es fácil probar que existe un triángulo cuyos vértices son vértices consecutivos del hexágono y el cual tiene área menor que $1/6$.



Ahora, si no existen tres vértices consecutivos que determinen un triángulo de área menor que $1/6$, entonces las diagonales AD, BE y CF son concurrentes y cada uno de los triángulos $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CDH$, $\triangle DEH$, $\triangle EFH$ y $\triangle FAH$, tienen área $1/6$. Más aún, tenemos que AF y CD son paralelos a BE; AB y DE son paralelos a CF; y BC y EF son paralelos a AD. Se sigue que todos los triángulos $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CDH$, $\triangle DEH$, $\triangle EFH$ y $\triangle FAH$, son congruentes. □

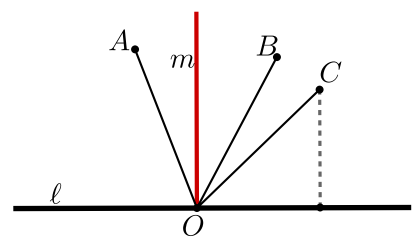


Finalmente, veremos como se puede obtener una solución elegante de un problema difícil el cual trata sobre razones de segmentos. La solución se obtiene mediante un cambio de razones de segmentos por razones de áreas de paralelogramos.

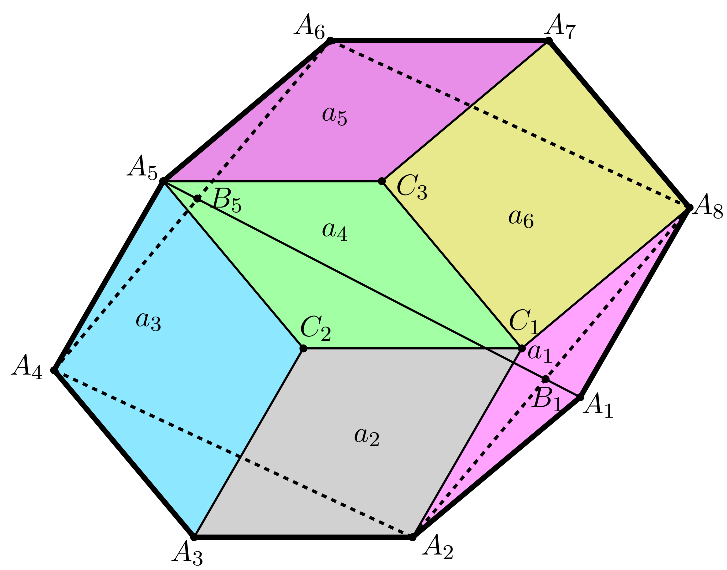
Ejemplo 1.9.8 *Sea $A_1A_2\ldots A_8$ un octágono convexo, es decir, todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Sabemos que todos los lados del octágono tienen la misma longitud y que cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ y $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j. Demuestra que para algún número i, de entre los números 1, 2, 3 y 4, se cumple que*

$$\frac{A_iA_{i+4}}{B_iB_{i+4}} \leq \frac{3}{2}.$$

Solución. Para cada lado del octágono vamos a considerar los tres paralelogramos que se pueden formar con dos de sus lados paralelos a dicho lado y sus otros dos lados paralelos a algún otro lado del octágono. Después, de entre todos esos paralelogramos, vamos a considerar uno de los que tenga menor área (podría haber más de uno con área mínima). Sin pérdida de generalidad, supongamos que el paralelogramo con área mínima tiene base en el lado A_1A_2. Entonces los otros dos lados del paralelogramo, no paralelos a A_1A_2, deben ser paralelos a A_3A_2 ó a A_1A_8. Para ver que esto debe ser así, notemos lo siguiente:



Sean A, B y C, tres puntos de un mismo lado de una línea ℓ y todos ellos a la misma distancia de un punto O en ℓ, como se muestra en la figura. Por O trazamos la línea m perpendicular a ℓ. Tenemos que dos de los puntos deben quedar del mismo lado de m (o alguno de ellos sobre m), supongamos B y C. Entonces, de los tres puntos, el que está a menor distancia de ℓ debe ser A ó C. Es decir, no puede ser B.



Supongamos que $A_2C_1A_8A_1$ es el paralelogramo de área mínima a_1 y consideremos los paralelogramos $A_2A_3C_2C_1$, $A_3A_4A_5C_2$, $C_1C_2A_5C_3$, $C_3A_5A_6A_7$ y

$C_1C_3A_7A_8$, cada uno de ellos con área a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6, respectivamente. Notemos que $|A_6A_7A_8| + |A_2A_3A_4| = |C_1C_2A_5C_3|$ y que $|A_4A_5A_6| = |A_2C_1A_8| = \frac{1}{2}|A_2C_1A_8A_1|$, entonces, no es difícil ver que

$$\frac{A_1A_5}{B_1B_5} = \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6}{a_2 + a_3 + a_5 + a_6} = 1 + \frac{2a_1}{a_2 + a_3 + a_5 + a_6}.$$

De aquí se obtiene que

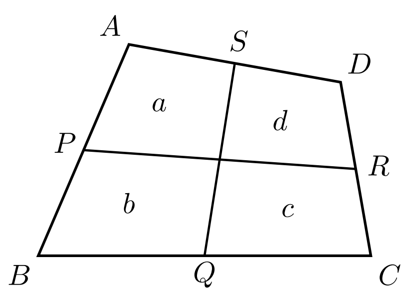
$$\frac{A_1A_5}{B_1B_5} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

1.9.1. Problemas

Problema 1.116 *Tenemos dos triángulos con un vértice A común, los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por A. Demuestra que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice A.*

Problema 1.117 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Se trazan las líneas PR y QS las cuales dividen el cuadrilátero en cuatro cuadriláteros más pequeños cuyas áreas se muestran en la figura. Demuestra que $a + c = b + d$.*



Problema 1.118 *En el trapecio $ABCD$, de bases AB y DC, las diagonales se intersecan en el punto E, el área del $\triangle ABE$ es 72 y el área del $\triangle CDE$ es 50. ¿Cuál es el área del trapecio $ABCD$?*

Problema 1.119 *Demuestra que* $|ABC| = rs$*, donde* r *es el radio de la circunferencia inscrita y* $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$*.*

Problema 1.120 *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero convexo y sean* $AB = a$*,* $BC = b$*,* $CD = c$*,* $DA = d$ *y* $s = \frac{a+b+c+d}{2}$*. Sean además,* α *y* β *dos ángulos opuestos en el cuadrilátero. Demuestra que*

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,(1 + \cos(\alpha + \beta))}.$$

Problema 1.121 *Demuestra que la suma de las distancias, desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero, hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo.*

Problema 1.122 *Sea* $\triangle ABC$ *un triángulo isósceles con* $AB = AC$*. Los puntos* D *y* E *están sobre los lados* AB *y* AC*, respectivamente. La línea que pasa por* B *y paralela a* AC *interseca la línea* DE *en* F*. La línea que pasa por* C *y paralela a* AB *interseca la línea* DE *en* G*. Demuestra que*

$$\frac{|DBCG|}{|FBCE|} = \frac{AD}{AE}.$$

Problema 1.123 *Demuestra que*

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r},$$

donde h_1*,* h_2*,* h_3 *son las alturas del triángulo y* r *es el radio de la circunferencia inscrita.*

Problema 1.124 *Sobre los catetos* AC *y* BC *de un triángulo rectángulo hacia el exterior están construidos los cuadrados* $ACKL$ *y* $BCMN$*. Demuestra que el cuadrilátero acotado por los catetos y las rectas* LB *y* NA *tiene área igual a la del triángulo formado por las rectas* LB*,* NA *y la hipotenusa* AB*.*

Problema 1.125 *Están dados los puntos E, F, G, H, sobre la continuación de los lados AB, BC, CD, DA, de un cuadrilátero convexo $ABCD$, y son tales que $BE = AB$, $CF = BC$, $DG = CD$, $AF = DA$. Demuestra que*

$$|EFGH| = 5 \cdot |ABCD|.$$

Problema 1.126 *En los lados AC y BC del triángulo $\triangle ABC$, hacia el exterior están construidos dos paralelogramos $ACDE$ y $BCFG$. Las prolongaciones de DE y FG se intersecan en el punto H. Sobre el lado AB está construido el paralelogramo $ABML$, cuyos lados AL y BM son iguales y paralelos a HC. Demuestra que*

$$|ABML| = |ACDE| + |BCFG| \ \text{(\textit{Teorema generalizado de Pitágoras})}.$$

Problema 1.127 *En un cuadrilátero convexo $ABCD$, los puntos medios de los lados BC y DA son E y F, respectivamente. Demuestra que*

$$|EDA| + |FBC| = |ABCD|.$$

Problema 1.128 *Por los extremos de la base menor de un trapecio están trazadas dos rectas paralelas que cortan la base mayor. Las diagonales del trapecio y estas rectas dividen el trapecio en siete triángulos y un pentágono. Demuestra que la suma de las áreas de tres triángulos adyacentes a los lados y a la base menor del trapecio, es igual al área del pentágono.*

Problema 1.129 *Sea $ABCD$ un paralelogramo; el punto E se halla en la recta AB; F, en la recta AD (B en el segmento AE; D, en el segmento AF), K es el punto de intersección de las rectas ED y FB. Demuestra que*

$$|ABKD| = |CEKF|.$$

Problema 1.130 *Sea $\mathcal{H}$ un hexágono en cual cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Sea $\mathcal{Q}$ un cuadrilátero inscrito en $\mathcal{H}$ el cual tiene área máxima. Demuestra que*

$$\frac{|\mathcal{Q}|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{2}{3}.$$

Problema 1.131 *Dos círculos C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se intersecan en dos puntos A y B. La tangente común de C_1 y C_2, la cual está más cerca de A, interseca a C_1 en D y a C_2 en E. Demuestra que si la línea DB es tangente a C_2 en B, entonces*

$$\frac{DB}{BE} = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}.$$

Capítulo 2

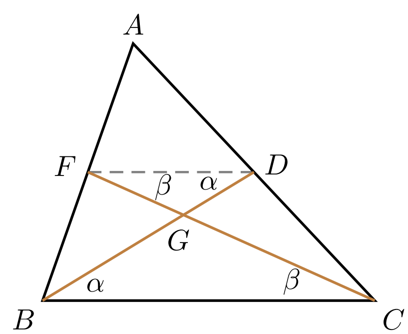
Puntos y rectas notables en el triángulo

2.1. Las medianas y el gravicentro

Dado un triángulo, podemos asociarle varios tipos de líneas las cuales poseen propiedades interesantes e importantes. Quizá la más simple de éstas es la línea que va de un vértice hacia el punto medio del lado opuesto. Esta línea es llamada *mediana* del triángulo. La primer propiedad interesante de las medianas es la siguiente:

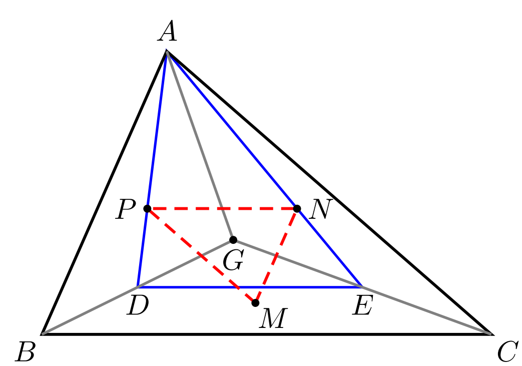
Teorema 2.1.1 *Las medianas en un triángulo concurren en un punto y se dividen por éste en la razón* $2:1$*, a partir de los vértices.*

Demostración. Sean CF y BD dos medianas del triángulo $\triangle ABC$. Llamemos G al punto de intersección de estas dos medianas. Por el Teorema de Tales tenemos que FD es paralelo a BC, de aquí se sigue que $\measuredangle GFD = \measuredangle GCB = \beta$, ya que son ángulos alternos internos. Análogamente $\measuredangle GDF = \measuredangle GBC = \alpha$. Tenemos que el triángulo $\triangle GDF$ es semejante al triángulo $\triangle GBC$ y sus lados están en la razón $1 : 2$. Con esto tenemos que $FG = \frac{1}{2}GC$ y $DG = \frac{1}{2}GB$ y por lo tanto las medianas CF y BD se cortan en el punto G en la razón $2 : 1$. Haciendo un análisis similar se puede llegar a que la mediana que no consideramos se interseca con cualesquiera de las dos medianas anteriores en un punto tal que quedan divididas en la razón $2 : 1$. Por esta razón tenemos que ese punto de intersección debe ser G, y de aquí concluimos que las tres medianas se intersecan en un punto. Tal punto es llamado *centroide* (gravicentro, baricentro, centro de gravedad) del triángulo y éste divide a las medianas en la razón $2 : 1$, a partir de los vértices. □



Ahora usaremos este teorema en la resolución de algunos problemas.

Ejemplo 2.1.1 *Sea G el centroide de un triángulo $\triangle ABC$, y sean M, N y P los centroides de los triángulos $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ y $\triangle AGB$, respectivamente. Demuestra que el triángulo $\triangle MNP$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$.*



Demostración. Sean D y E los puntos medios de BG y CG, respectivamente. Tenemos que DE es paralelo a BC, además, como $AP : PD = AN : NE = 2 : 1$ entonces PN es paralelo a DE y consecuentemente a BC. Análogamente, PM es paralelo a AC y MN es paralelo a AB. Como tenemos que $\triangle MNP$ y $\triangle ABC$ tienen sus lados paralelos, entonces son semejantes. $\square$

Ejemplo 2.1.2 *Del punto M, situado en el interior del $\triangle ABC$, se trazan perpendiculares a los lados BC, AC, AB y en ellas se marcan los segmentos MA_1, MB_1 y MC_1 iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que el punto M es el centro de gravedad del $\triangle A_1B_1C_1$.*

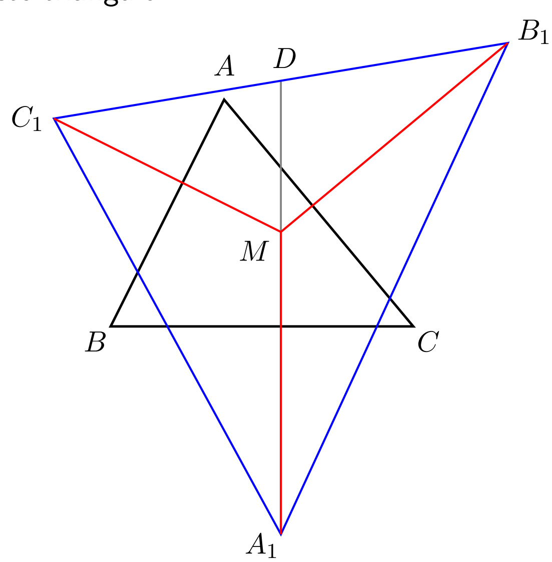
Demostración. Sea D el punto de intersección de la línea A_1M y el segmento C_1B_1. Tenemos que

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1DA_1|}{|B_1DA_1|} = \frac{|C_1DM|}{|B_1DM|} = \frac{|C_1DA_1| - |C_1DM|}{|B_1DA_1| - |B_1DM|},$$

esto es

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1MA_1|}{|B_1MA_1|}.$$

Por otro lado, tenemos que $|C_1MA_1| = |ABC| = |B_1MA_1|$, entonces $C_1D = DB_1$, es decir A_1D es una mediana del triángulo $\triangle A_1B_1C_1$. Análogamente se demuestra que C_1M y B_1M son medianas del triángulo $\triangle A_1B_1C_1$, por lo tanto M es el centroide de éste triángulo. $\square$



Con lo demostrado anteriormente, tenemos que si G es un punto interior de un triángulo $\triangle ABC$, entonces éste será su centroide si y sólo si $|ABM| = |BCM| = |CAM|$.

Ejemplo 2.1.3 *Sea G el centroide de un triángulo $\triangle ABC$. Entonces se cumple que*

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

Demostración. Sean m_a, m_b m_c las longitudes de las medianas desde los vértices A, B y C. Como sabemos que $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ y $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, tenemos que

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2).$$

Se sigue que

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2). \qquad \square$$

La fórmula utilizada en esta demostración se deja como ejercicio.

2.1.1. Problemas

Problema 2.1 *Demuestra que las medianas dividen el triángulo en seis partes de áreas iguales.*

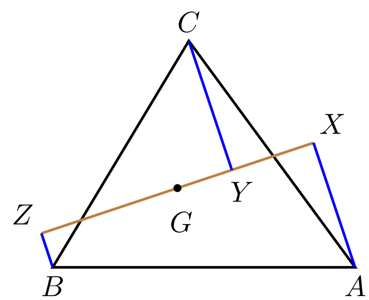
Problema 2.2 *Demuestra que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas de un triángulo dado, es igual a $\frac{3}{4}$ del área del triángulo dado.*

Problema 2.3 *Los lados de un triángulo son a, b y c. Demuestra que la longitud de la mediana m_a, trazada hacia el lado BC, se calcula por la fórmula*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Problema 2.4 *Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.*

Problema 2.5 *En un triángulo $\triangle ABC$ se dibuja una línea que pasa por el centroide de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la intersecan en los puntos que se muestran en la figura siguiente. Demuestra que $CY = AX + BZ$.*



Problema 2.6 *En un cuadrilátero convexo definiremos una mediana como la línea que une un vértice con el centroide del triángulo formado por los tres vértices restantes. Demuestra que las cuatro medianas en un cuadrilátero se intersecan en un punto y que además se dividen por éste en la razón $3:1$.*

Problema 2.7 *En un triángulo $\triangle ABC$ con medianas AD, BE, y CF, sea $m = AD + BE + CF$, y sea $s = AB + BC + CA$. Demuestra que*

$$\frac{3}{2}s > m > \frac{3}{4}s.$$

Problema 2.8 *Demuestra que si en un triángulo se cumple que*

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$$

entonces éste es un triángulo rectángulo.

Problema 2.9 *En los lados CA y CB del triángulo $\triangle ABC$, fuera de él se construyen los cuadrados CAA_1C_1 y CBB_1C_2. Demuestra que la mediana del triángulo $\triangle CC_1C_2$ trazada por el vértice C es perpendicular al lado AB e igual a la mitad de su longitud.*

Problema 2.10 *En los lados del triángulo, fuera de él, están construidos los triángulos equiláteros* $\triangle ABC_1$, $\triangle BA_1C$ *y* $\triangle CAB_1$. *Demuestra que los centroides de los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle A_1B_1C_1$ *coinciden.*

Problema 2.11 Teorema de Leibniz. *Supongamos que* M *es un punto arbitrario del plano,* G *el centroide del triángulo* $\triangle ABC$. *Entonces se cumple la igualdad*

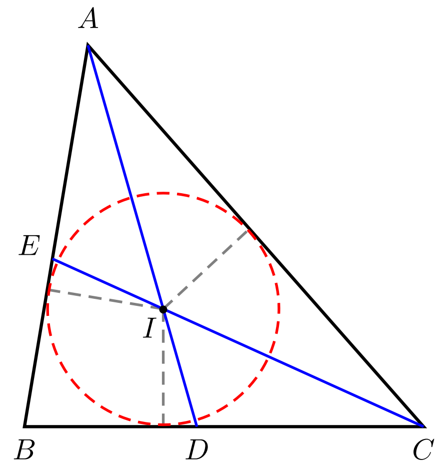
$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Problema 2.12 *Consideremos el triángulo* $\triangle ABC$. *Sea* E *un punto sobre la mediana desde el vértice* C. *Una circunferencia a través de* E *toca al lado* AB *en* A *e interseca a* AC *de nuevo en* M. *Otra circunferencia a través de* E *toca a* AB *en* B *e interseca a* BC *de nuevo en* N. *Demuestra que el circuncírculo del triángulo* $\triangle CMN$ *es tangente a las dos circunferencias anteriores.*

2.2. Las bisectrices y el incentro

La recta que estudiaremos en esta sección tiene muchas propiedades interesantes. Esta recta es la *bisectriz* (interior) de un ángulo y se define como el conjunto de puntos en el interior del ángulo los cuales equidistan de los lados de éste. Es muy sencillo ver que efectivamente este conjunto de puntos es una línea recta y que además ésta divide al ángulo en dos ángulos de la misma magnitud. De la misma manera que lo hicimos en la sección anterior, la primera propiedad que veremos es sobre la concurrencia de las tres bisectrices interiores de un triángulo.

Teorema 2.2.1 *Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo concurren en un punto, el cual es conocido como* incentro *y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*



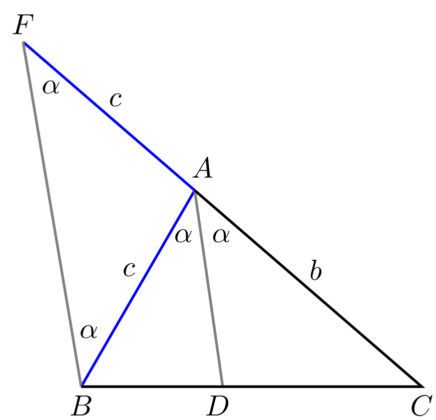
Demostración. Sean D y E los puntos donde las bisectrices internas de los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCA$ cortan a los lados BC y AB, y sea I el punto de intersección de los segmentos AD y CE. Como AD bisecta al $\measuredangle BAC$ entonces I equidista de los lados AB y AC; además como I también pertenece al segmento CE, el cual bisecta al $\measuredangle BCA$, entonces I equidista de los lados BC y AC. Como I equidista de los lados AB y BC entonces la bisectriz del $\measuredangle ABC$ también pasa por el punto I, por lo que las tres bisectrices concurren en este punto. Es claro que podemos trazar una circunferencia que sea tangente a los tres lados del triángulo y que tenga como centro al punto I. $\square$

Ejemplo 2.2.1 *Sea D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ de un triángulo corta al lado BC, y sean a, b y c los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que*

$$BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Demostración. Un truco muy bonito y el cual puede ser muy útil en la mayoría de los problemas donde tenemos una suma de distancias, es el construir esa distancia. Por ejemplo, en nuestro problema necesitamos construir la distancia $b+c$. Prolonguemos CA hasta un punto F de tal manera que $AF = AB = c$, tenemos entonces que el triángulo $\triangle FAB$ es un triángulo isósceles. Sea $\measuredangle BAC = 2\alpha$, como $\measuredangle BFA + \measuredangle ABF = 2\alpha$ tenemos que $\measuredangle BFA = \measuredangle ABF = \alpha$, esto implica que FB es paralelo a AD. Ahora, por el Teorema de Tales tenemos que

$$\frac{BD}{FA} = \frac{BC}{FC} \Longrightarrow BD = \frac{BC \cdot FA}{FC} = \frac{ac}{b+c}. \quad \square$$

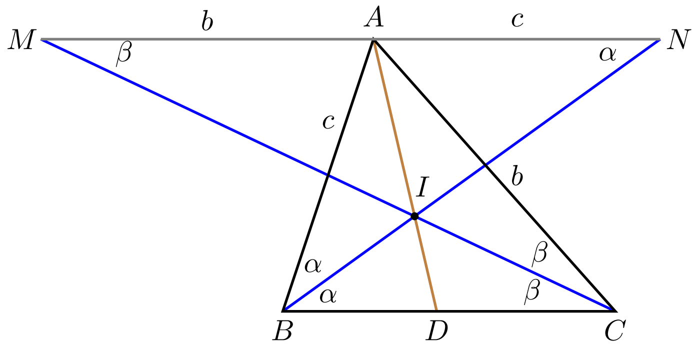


Ejemplo 2.2.2 *Sean a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, de un triángulo $\triangle ABC$. Sean I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

Demostración. Por A trazamos una paralela a BC. Las bisectrices de $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ intersecan a esta paralela en N y M, respectivamente. Como $\measuredangle AMC = \measuredangle ACM = \beta$ tenemos $AM = AC = b$. Análogamente, $AN = AB = c$. Además, tenemos que $\triangle IMN \sim \triangle ICB$, esto implica que

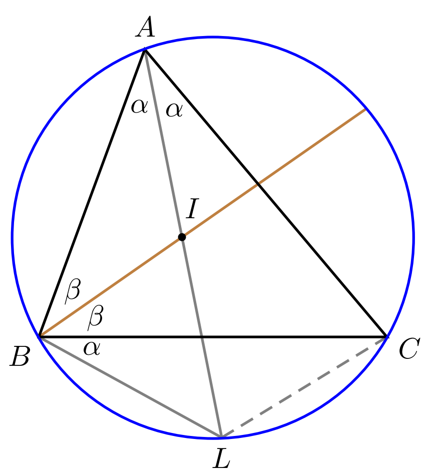
$$\frac{AI}{ID} = \frac{MN}{BC} = \frac{b+c}{a}. \quad \square$$



El resultado del siguiente ejemplo tiene una gran utilidad en la solución de problemas donde intervienen simultáneamente la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.

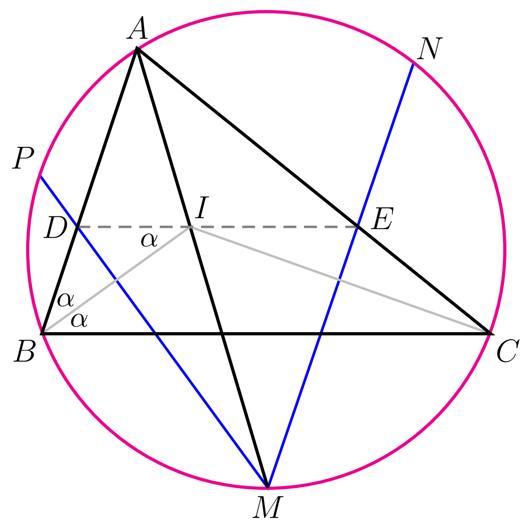
Ejemplo 2.2.3 *Sea I el incentro de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$ está sobre la línea AI.*

Demostración. Sea L el punto donde la bisectriz del $\measuredangle A$ interseca al circuncírculo, entonces L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$. Para probar esto basta demostrar que $LB = LI = LC$. Tenemos que $LB = LC$, por ser cuerdas de arcos iguales. Por otro lado, tenemos que $\measuredangle BIL = \measuredangle BAI + \measuredangle ABI = \alpha + \beta$, además tenemos que $\measuredangle CBL = \measuredangle CAL = \alpha$ y con esto llegamos a que $\measuredangle IBL = \alpha + \beta$. Hemos desmostrado entonces, que el triángulo $\triangle BIL$ es isósceles y con esto tenemos que $LB = LI = LC$. $\square$



Ejemplo 2.2.4 *Sean M, N, y P, los puntos medios de los arcos BC, CA y AB, respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$. MP y MN intersecan en D y E a los lados AB y AC. Demuestra que DE es paralela a BC y que pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

Demostración. Sea I el incentro del triángulo. Usando el resultado del ejemplo anterior, tenemos que $PB = PI$ y $MB = MI$. Con esto tenemos que MP es perpendicular a BI la mediatriz de BI, lo que implica que $BD = DI$ y $\measuredangle DBI = \measuredangle DIB = \measuredangle IBC$, es decir, DI es paralela a BC. Análogamente, se demuestra que EI es paralela a BC. Por lo tanto, DE es paralela a BC y pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$. □



2.2.1. Problemas

Problema 2.13 *Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.*

Problema 2.14 *Sea I el incentro de un triángulo $\triangle ABC$. Sea $\measuredangle BAC = \alpha$.*

Demuestra que

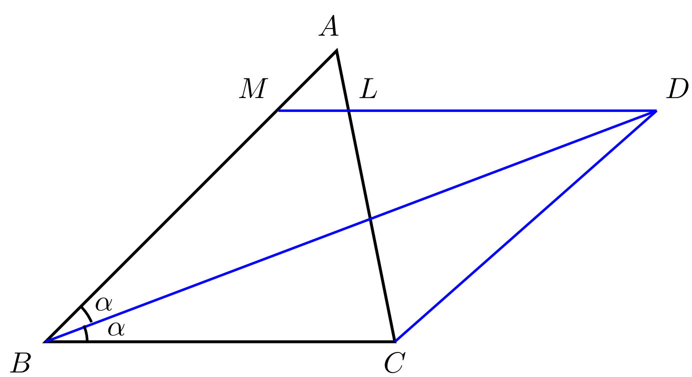
$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Problema 2.15 *El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia con centro O. Demuestra que*

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ.$$

Problema 2.16 *Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ se halla en la circunferencia dada.*

Problema 2.17 *La bisectriz interior de $\measuredangle B$ y la bisectriz exterior de $\measuredangle C$ de un $\triangle ABC$ se intersecan en D. A través de D se traza una línea paralela a BC la cual interseca AC en L y AB en M. Si las longitudes de LC y MB son 5 y 7, respectivamente, encuentra la longitud de LM.*



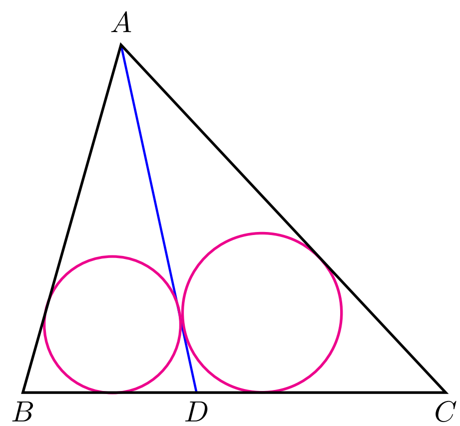
Problema 2.18 *En un triángulo $\triangle ABC$, sean E y D puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente. BF bisecta el $\measuredangle ABD$, y CF bisecta $\measuredangle ACE$. Demuestra que $\measuredangle BEC + \measuredangle BDC = 2\measuredangle BFC$.*

Problema 2.19 *Sea r el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C. Sean $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$.*

Demuestra que

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Problema 2.20 *Sea D un punto en el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los incírculos de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son tangentes entre sí, si y sólo si, D es el punto de tangencia del incírculo del triángulo $\triangle ABC$.*



Problema 2.21 *Sobre la base AC del triángulo isósceles $\triangle ABC$ se toma un punto M de manera que $AM = a$, $MC = b$. En los triángulos $\triangle ABM$ y $\triangle CBM$ están inscritas circunferencias. Encuentra la distancia entre los puntos de tangencia del lado BM con estas circunferencias.*

Problema 2.22 *Sea AD la bisectriz del $\measuredangle BAC$ de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Problema 2.23 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea D el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle BCA$ interseca al lado AB. Si $CD = \ell, CB = a, CA = b$ y 2α es la medida del ángulo $\measuredangle BCA$, demuestra que*

$$\ell = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}{a+b}.$$

Problema 2.24 *La bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ interseca al lado BC en un punto D y al circuncírculo en un punto L. Sean $\ell_D = AD$ y $\ell_L = AL$. Demuestra que $\ell_D \cdot \ell_L = b \cdot c$.*

Problema 2.25 *Sean a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$. Sean I el incentro y G el gravicentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que IG es paralelo a BC si y sólo si $2a = b + c$.*

Problema 2.26 *Las bisectrices de los ángulos A y B del triángulo $\triangle ABC$ intersecan los lados BC y CA en los puntos D y E, respectivamente. Si se cumple que $AE + BD = AB$, determina el ángulo C.*

Problema 2.27 *En un triángulo $\triangle ABC$, $\measuredangle BAC = 60°$ y las bisectrices BB' y CC' se intersecan en I, donde B' está sobre AC y C' está sobre AB. Demuestra que $IB' = IC'$.*

Problema 2.28 *Demuestra que las cuatro proyecciones del vértice A del triángulo $\triangle ABC$ sobre las bisectrices exteriores e interiores de los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son colineales.*

Problema 2.29 *En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N, de tal manera que*

$$BM : MC = AN : ND = AB : CD.$$

Demuestra que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.

Problema 2.30 *En los rayos AB y CB del triángulo $\triangle ABC$ están trazados los segmentos AM y CN de tal manera que $AM = CN = p$, donde p es el semiperímetro del triángulo (B se halla entre A y M, así como entre C y N). Sea K el punto de la circunferencia circunscrita el cual es diametralmente opuesto a B. Demuestra que la perpendicular trazada desde K sobre MN pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 2.31 *Sea BC el diámetro de una circunferencia Γ que tiene centro O. Sea A un punto de Γ tal que $0^\circ < \measuredangle AOB < 120^\circ$. Sea D el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a C. La paralela a DA que pasa por O interseca a AC en J. La perpendicular a OA por su punto medio interseca a Γ en E y F. Prueba que J es el incentro del triángulo ΔCEF.*

Problema 2.32 *El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$, cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos D, E y F, respectivamente. Demuestra que*

(a) $|DEF| \geq |ABC|$

(b) $DE + EF + FA \geq AB + BC + CA$

(c) $AD + BE + CF > AB + BC + CA$

Problema 2.33 *Dado el triángulo $\triangle ABC$, se traza una línea l paralela al lado AB la cual pasa por el vértice C. La bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ interseca el lado BC en D y a l en E. La bisectriz del ángulo $\measuredangle ABC$ interseca el lado AC en F y a l en G. Si $GF = DE$, demuestra que $AC = BC$.*

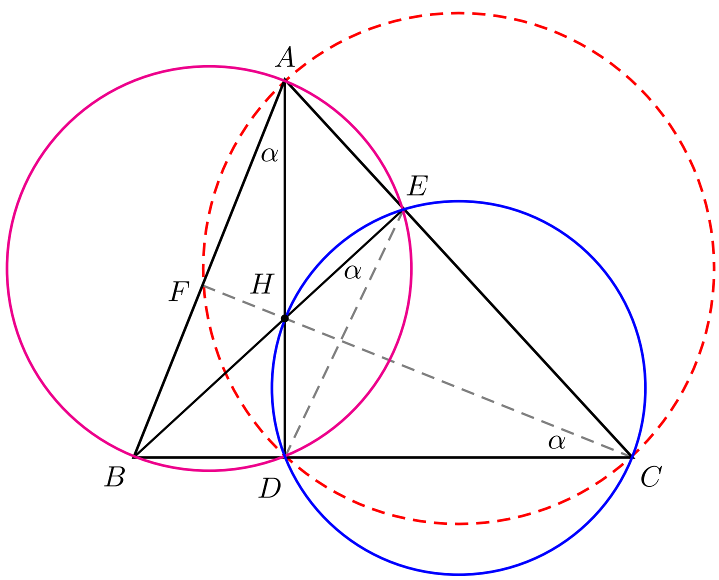
Problema 2.34 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea I el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\measuredangle BEI = 45^\circ$. Determinar todos los posibles valores de $\measuredangle CAB$.*

2.3. Las alturas y el ortocentro

En esta sección analizaremos las propiedades de las alturas del triángulo. Recordemos que la *altura* de un triángulo es la línea perpendicular a un lado trazada desde el vértice opuesto a este lado. Como en las anteriores líneas que hemos analizado, también se cumple:

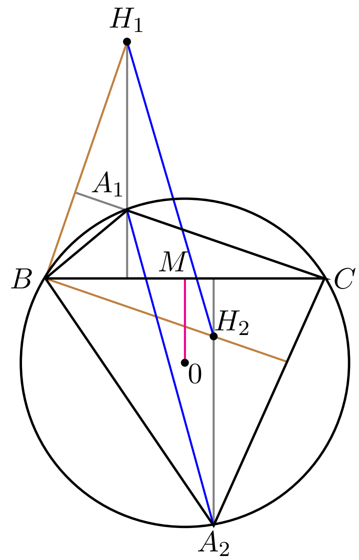
Teorema 2.3.1 *Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.*

Demostración. En el triángulo $\triangle ABC$ sean D y E los pies de las alturas sobre los lados BC y AC, respectivamente, y sea H el punto de intersección de AD y BE. Se traza la línea CH la cual interseca al lado AB en el punto F. Para demostrar que CF es una altura, bastará con demostrar que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico, porque así de esta manera el $\measuredangle AFC$ sería igual al $\measuredangle ADC = 90°$. Para esto, como sabemos que $\measuredangle HDC = 90° = \measuredangle HEC$ entonces tenemos que el cuadrilátero $HDCE$ es cíclico. De aquí se sigue que $\measuredangle HED = \measuredangle HCD = \alpha$. Por otro lado, el cuadrilátero $BDEA$ también es cíclico ya que $\measuredangle BDA = 90° = \measuredangle BEA$, entonces $\measuredangle BAD = \measuredangle BED = \alpha$. Ahora, como $\measuredangle BAD = \measuredangle FCB = \alpha$, entonces se concluye que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico y por lo tanto CF es una altura del triángulo $\triangle ABC$. El punto H es llamado *ortocentro* del triángulo.
□



Ejemplo 2.3.1 *Dos triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$ estan inscritos en un círculo y tienen el lado BC en común. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$, respectivamente. Demuestra que el segmento H_1H_2 es igual y paralelo al segmento A_1A_2.*

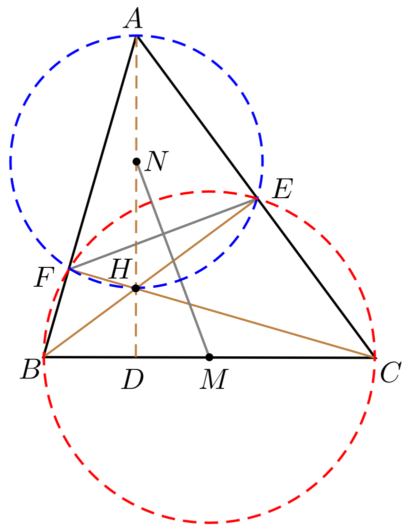
Demostración. Sean O el centro del círculo y M el punto medio de BC. Sabemos que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del centro de la circunferencia hacia el lado opuesto a ese vértice[1], con esto tenemos que $H_1A_1 = 2 \cdot OM$ y $H_2A_2 = 2 \cdot OM$, esto implica que $H_1A_1 = H_2A_2$ y además como son paralelas, podemos concluir que $H_1A_1A_2H_2$ es un paralelogramo. $\square$



Ejemplo 2.3.2 *Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ y sea H su ortocentro. Sea N el punto medio de AH y sea M el punto medio de BC. Demuestra que NM es perpendicular a FE.*

Demostración. Sabemos que los cuadriláteros $AFHE$ y $FBCE$ son cíclicos y sus centros son N y M, respectivamente. Además, la cuerda FE es común a sus circunferencias. Como ya vimos que la cuerda común de dos circunferencias es perpendicular a la línea de sus centros, tenemos que $NM \perp FE$. $\square$

[1]Este resultado es bastante útil. Su demostración se deja como ejercicio en la siguiente sección.



2.3.1. Problemas

Problema 2.35 *Demuestra que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.*

Problema 2.36 *Sea AD la altura de el triángulo $\triangle ABC$, H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.*

Problema 2.37 *Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide una altura, es el mismo para las tres alturas.*

Problema 2.38 *Sea H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los circuncírculos de los cuatro triángulos $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle HAC$ y $\triangle HAB$, tienen todos el mismo radio.*

Problema 2.39 *Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico*[2].

[2] El *triángulo órtico* es el formado por los pies de las alturas.

Problema 2.40 *Sea H el ortocentro de el triángulo $\triangle ABC$. En la recta CH se toma un punto K tal que $\triangle ABK$ es un triángulo rectángulo. Demuestra que*

$$|ABK| = \sqrt{|ABC| \cdot |ABH|}$$

.

Problema 2.41 *El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$, cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos D, E y F, respectivamente. Sea I el incentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que I es el ortocentro del triángulo $\triangle DEF$.*

Problema 2.42 *Sea AD la altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$. Sean X y Y los puntos medios de las otras dos alturas, H el ortocentro y M el punto medio de BC. Demuestra que el circuncírculo de $\triangle DXY$ pasa por H y por M. También, demuestra que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DXY$ son semejantes.*

Problema 2.43 *Sea l una recta que pasa por el ortocentro de un triángulo. Demuestra que las rectas simétricas a l, con respecto a los lados del triángulo, concurren en un punto.*

Problema 2.44 *Sean E y F puntos sobre los lados BC y CD, respectivamente, de un cuadrado $ABCD$. Sean M y N las intersecciones de AE y AF con BD, y sea P la intersección de MF con NE. Si $\measuredangle EAF = 45°$, demuestra que AP es perpendicular a EF.*

Problema 2.45 *Sea $ABCD$ un rectángulo y sea P un punto sobre su circuncírculo, diferente de los vértices del rectángulo. Sea X, Y, Z y W las proyecciones de P sobre las líneas AB, BC, CD, y DA, respectivamente. Demuestra que uno de los puntos X, Y, Z ó W es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.*

Problema 2.46 *AD, BE y CF son las alturas de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. K y M son puntos en los segmentos DF y EF, respectivamente. Demuestra que si los ángulos $\measuredangle MAK$ y $\measuredangle CAD$ son iguales, entonces AK bisecta el ángulo $\measuredangle FKM$.*

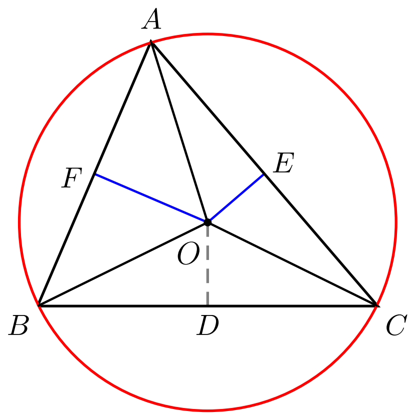
Problema 2.47 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo no isósceles. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C interseca a AB en P y a BC en Q. La bisectriz del ángulo $\angle ABC$ interseca a la línea HN en R, donde H es el ortocentro y N el punto medio de AC. Demuestra que el cuadrilátero $BRPQ$ es cíclico.*

2.4. Las mediatrices y el circuncentro

Consideremos un segmento fijo AB. Ahora consideremos el conjunto de puntos que equidistan de los puntos A y B. Sean M el punto medio de AB y P uno de los puntos de tal conjunto. Dado que $PA = PB$ y $AM = MB$, tenemos que $PM \perp AB$. De esta manera podemos observar que el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento AB es una línea perpendicular a AB por su punto medio. Esta línea se llama *mediatriz* del segmento. Primeramente demostramos que:

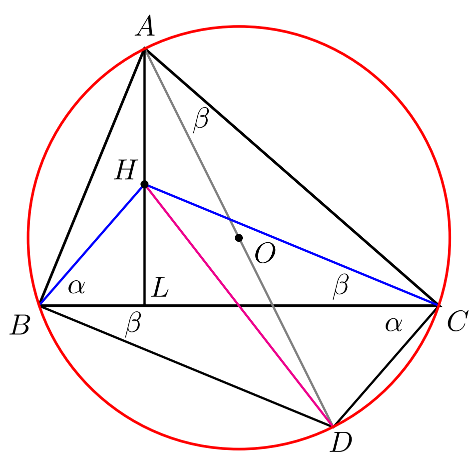
Teorema 2.4.1 *Las mediatrices de los tres lados de un triángulo se intersecan en un punto. El punto de concurrencia es el centro de la circuferencia circunscrita al triángulo y es llamado* circuncentro.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo, D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, y AB, respectivamente. Trazamos las mediatrices de los lados AB y AC las cuales se intersecan en el punto O. Tenemos que $AO = BO$, por definición de mediatriz, y de la misma manera $AO = CO$. Como $BO = CO$ entonces DO es mediatriz del lado BC, por lo que las tres mediatrices se intersecan en un punto el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. $\square$



Ejemplo 2.4.1 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro y O el circuncentro. Sea D el punto donde la línea AO interseca al circuncírculo. Demuestra que HD bisecta el lado BC.*

Demostración. Tenemos que $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACD = 90°$, entonces $\beta = \measuredangle CAD = 90° - \measuredangle ADC = 90° - \measuredangle ABC = \measuredangle HCB$ y como $\measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \beta$, tenemos que HC es paralela a BD. Por otro lado, $\alpha = \measuredangle BCD = \measuredangle BAD = \measuredangle BAC - \beta$, y además como $\measuredangle BAL = 90° - \measuredangle ABC = \beta$, tenemos que $\measuredangle HBC = \measuredangle LAC = \measuredangle BAC - \beta = \alpha$, entonces HB es paralela a CD. Tenemos entonces que $HBDC$ es un paralelogramo y por lo tanto, sus diagonales se bisectan. $\square$



2.4.1. Problemas

Problema 2.48 *En un triángulo equilátero $\triangle ABC$, el punto K divide el lado AC en la razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en la razón $1:2$. Demuestra que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 2.49 *Si s, r y R son el semiperímetro, el inradio y el circunradio de un triángulo $\triangle ABC$, demuestra que $abc = 4srR$.*

Problema 2.50 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H, O y M, el ortocentro, el circuncentro y el punto medio del lado BC, respectivamente. Demuestra que AH es el doble de OM.*

Problema 2.51 *Sean M y N las proyecciones del ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$ sobre las bisectrices interior y exterior del ángulo $\measuredangle B$. Demuestra que la línea MN bisecta al lado AC.*

Problema 2.52 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea H el ortocentro, O el circuncentro, sea AL la bisectriz de el $\measuredangle BAC$. Demuestra que AL bisecta el $\measuredangle HAO$.*

Problema 2.53 *Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ y sean H y O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. La línea AO interseca a CF en el punto P. Si $FP = HE$, demuestra que $AB = BC$.*

Problema 2.54 *En un triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz del ángulo $\measuredangle A$ interseca al lado BC en U. Demuestra que la mediatriz de AU, la perpendicular a BC por U y el circundiámetro a través de A son concurrentes.*

Problema 2.55 *En un triángulo $\triangle ABC$, sean H y O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Sea M el punto medio de AB. Sea H_1 el reflejado de H con respecto a C y sea C_1 el reflejado de C con respecto a M. Demuestra que C_1, O y H_1 están alineados.*

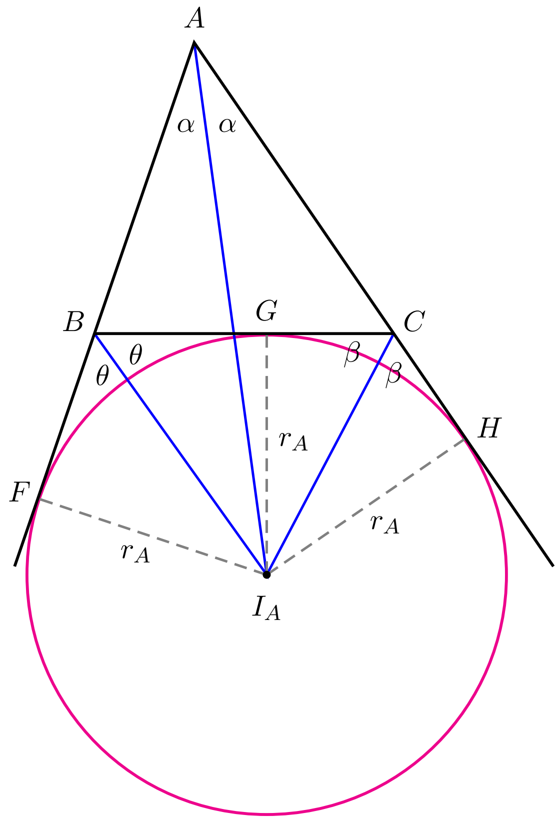
Problema 2.56 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$. Sean H y O el ortocentro y el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Demuestra que H, O y D son colineales.*

Problema 2.57 *A través del ortocentro H de un triángulo $\triangle ABC$, se traza una paralela a AB la cual interseca BC en D. También por H se traza una paralela a AC la cual interseca a BC en E. Las perpendiculares a BC en D y E intersecan a AB y AC en D' y E', respectivamente. Demuestra que $D'E'$ interseca al circuncírculo en los puntos B' y C' los cuales son diametralmente opuestos a los vértices B y C, respectivamente.*

Problema 2.58 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El círculo con diámetro BC interseca los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se intersecan en R. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $\triangle BMR$ y $\triangle CNR$ tienen un punto común sobre el lado BC.*

2.5. Circunferencias exinscritas

Dado un triángulo existen 4 circunferencias que son tangentes a sus lados. Una de éstas, la cual vimos anteriormente, es la circunferencia inscrita, la cual tiene contacto con los lados en el interior. Sin embargo, si permitimos que las circunferencias tengan contacto con las prolongaciones de los lados, entonces tenemos tres posibilidades más. Estas circunferencias tienen contacto con uno de los lados en su interior y con los dos lados restantes en sus prolongaciones, y se les conoce con el nombre de *circunferencias exinscritas*. Veamos como se determinan:



Sea I_A el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle C$. Como I_A pertenece a la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$, entonces equidista de los lados AB y AC, pero como también pertenece a la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle C$ entonces equidista de los lados BC y AC. Lo anterior quiere decir que el punto I_A equidista de los lados AB y BC, esto es, que la bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle B$ pasa por I_A, por lo tanto la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle A$ y las bisectrices exteriores de los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ concurren en un punto, al cual se le llama el *excentro* con respecto al vértice A y es denotado comúnmente como I_A. Sean F, G, y H los pies de las perpendiculares desde I_A hacia los lados AB, BC, y CA. Consideremos la distancia I_AG como radio e I_A como centro y trazemos una circunferencia la cual es tangente a AB, BC, y CA en los puntos F, G, y H. Esta circunferencia es precisamente la circunferencia exinscrita del lado BC. La distancia $I_A G$ es el *exradio* y lo denotaremos como r_A.

Ejemplo 2.5.1 *Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$ y sea r_A el radio de la circunferencia exinscrita del $\triangle ABC$, con respecto al lado a. Demuestra que*

$$\frac{r}{r_A} = \frac{s-a}{s}$$

donde s es el semiperímetro del triángulo.

Demostración. En la figura anterior tenemos que $AF = AH$, además $AF + AH = AB + BG + GC + CA = 2s$, entonces $AH = AF = s$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |ABC| &= |AFI_A H| - |BFI_A HC| \\ &= |AFI_A H| - 2|BI_A C| \\ &= sr_A - ar_A \\ &= (s-a)r_A, \end{aligned}$$

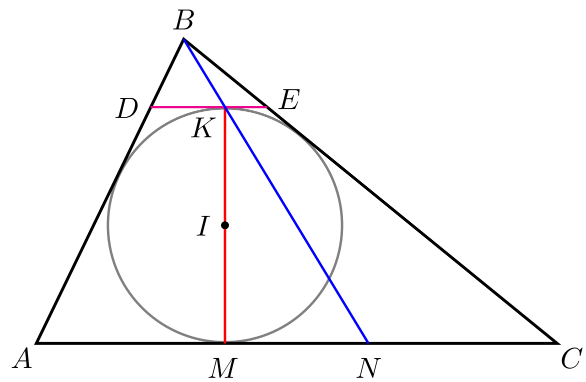
y como $|ABC| = sr$, entonces

$$(s-a)r_A = sr,$$

de donde obtenemos la igualdad deseada. □

Ejemplo 2.5.2 *El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Entonces se cumple que $AM = NC$.*

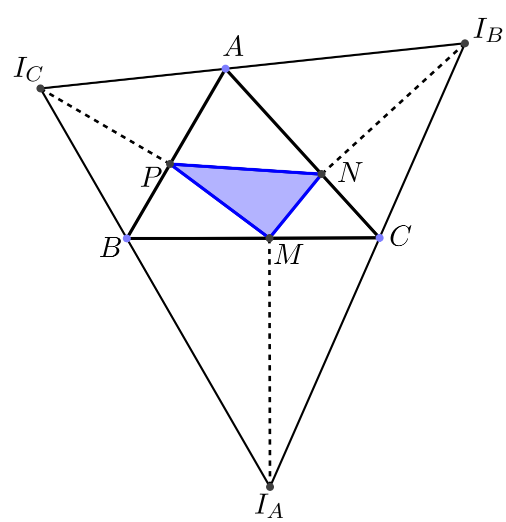
Demostración. Por K trazamos la recta DE paralela a AC. El triángulo $\triangle BDE \sim \triangle BAC$. Tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ es la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle BDE$ (respectiva al lado DE), entonces N es el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle ABC$ con el lado AC. Tenemos que $BC + CN = s$, lo cual implica que $NC = s - a$, y como sabemos que $AM = s - a$, concluimos que $AM = NC$. □



Ahora probaremos que el área de un triángulo dado se puede obtener como la media geométrica de un par de triángulos asociados a éste.

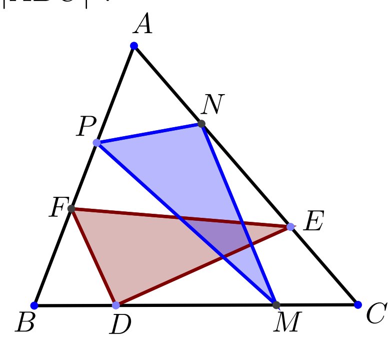
Teorema 2.5.1 *Sean I_A, I_B e I_C los excentros de un triángulo $\triangle ABC$ y sean M, N y P los puntos de contacto entre los círculos exinscritos y los lados correspondientes de $\triangle ABC$. Entonces*

$$|I_A I_B I_C| \cdot |MNP| = |ABC|^2.$$

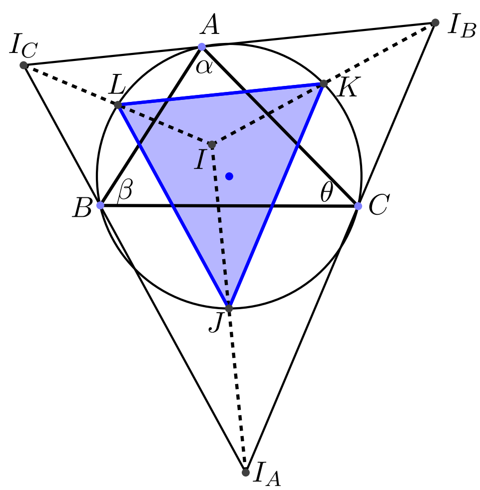


Demostración. Sean D, E y F los puntos de contacto del incírculo de $\triangle ABC$ con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea I el incentro de $\triangle ABC$ y sea J el punto donde las rectas ortogonales a BC, CA y AB, a través de M, N y

P, concurren. No es difícil ver que la anterior concurrencia es cierta, simplemente apliquemos el Teorema de Carnot (Teorema 1.5.3) con los puntos M, N y P. Después, observemos que el circuncentro O de $\triangle ABC$ es el punto medio del segmento IJ (esto se deja como ejercicio al lector), entonces, por el Teorema de Euler (Problema 1.110) tenemos que $|DEF| = |MNP|$. Podemos entonces considerar el triángulo $\triangle DEF$ en lugar del triángulo $\triangle MNP$ y demostraremos que $|I_A I_B I_C| \cdot |DEF| = |ABC|^2$.



Sean J, K y L los puntos donde los segmentos II_A, II_B e II_C, respectivamente, intersecan al circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Es fácil probar que J, K y L son los puntos medios de los segmentos II_A, II_B e II_C, respectivamente, entonces $\triangle I_A I_B I_C$ es homotético a $\triangle JKL$ con razón de homotecia igual a 2 y centro de homotecia en I.



Si dividimos el triángulo $\triangle JKL$ en tres triángulos desde O (el cual siempre está siempre en el interior del triángulo $\triangle DEF$) obtenemos que

$$\begin{aligned} |JKL| &= |KOL| + |LOJ| + |JOK| \\ &= \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\beta}{2} + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta}{2} \\ &= \frac{\rho^2}{2}\left(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta\right), \end{aligned}$$

donde ρ es el circunradio de $\triangle ABC$. Se sigue que el área de $\triangle I_A I_B I_C$ es

$$|I_A I_B I_C| = 2\rho^2(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta).$$

Como el área de $\triangle DEF$ es

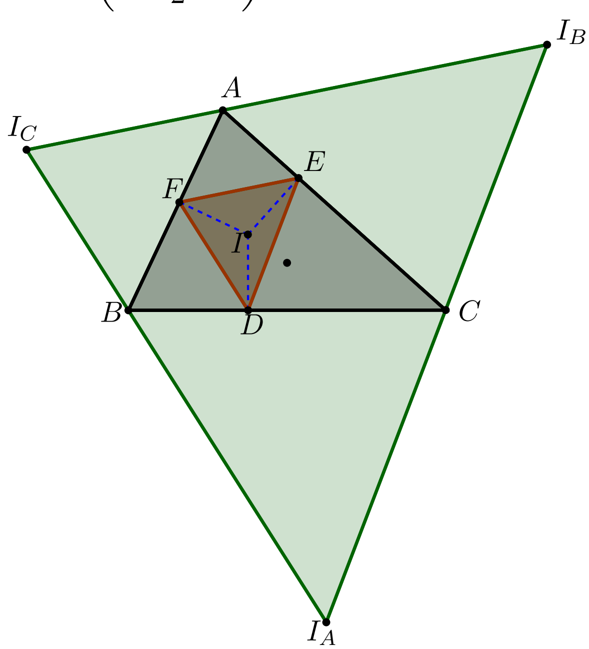
$$|DEF| = \frac{r^2(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta)}{2},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |I_A I_B I_C| \cdot |DEF| &= \rho^2 r^2(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= r^2(\rho\operatorname{sen}\alpha + \rho\operatorname{sen}\beta + \rho\operatorname{sen}\theta)^2. \end{aligned}$$

Ahora, por la Ley de Senos en $\triangle ABC$, finalmente obtenemos que

$$|I_A I_B I_C| \cdot |DEF| = r^2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = |ABC|^2. \qquad \square$$



2.5.1. Problemas

Problema 2.59 *Demuestra que el triángulo* $\triangle ABC$ *es el triángulo órtico del triángulo* $\triangle I_A I_B I_C$.

Problema 2.60 *Demuestra que*

$$|ABC| = (s-a)r_A = (s-b)r_B = (s-c)r_C.$$

Problema 2.61 *Demuestra que*

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}.$$

Problema 2.62 *Sea* D *un punto sobre el lado* BC *de un triángulo* $\triangle ABC$ *de modo que los círculos exinscritos de* $\triangle ABD$ *y* $\triangle ADC$*, con respecto al vértice* A*, son congruentes. Demuestra que* $AD = \sqrt{s(s-a)}$.

Problema 2.63 *Dado un triángulo* $\triangle ABC$*, sea* S *el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto del incírculo con los lados del triángulo. Ahora, sea* S_A *el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita (con respecto al vértice* A*) con los lados del triángulo. De manera similar definimos* S_B *y* S_C*. Demuestra que*

$$\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} = \frac{1}{S}.$$

Problema 2.64 *Demuestra que*

$$\tan\left(\frac{\measuredangle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Problema 2.65 *Demuestra que*

$$\tan\left(\frac{\measuredangle A}{2}\right)\tan\left(\frac{\measuredangle B}{2}\right) = \frac{r}{r_C}.$$

Problema 2.66 *Dado un $\triangle ABC$, por su vértice C pasan $n-1$ rectas CM_1, CM_2, ... , CM_{n-1} que lo dividen en n triángulos menores $\triangle ACM_1$, $\triangle M_1CM_2$, ..., $\triangle M_{n-1}CB$ (los puntos M_1, M_2, ..., M_{n-1} están sobre el lado AB). Supóngase que $r_1, r_2, ..., r_n$ y $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ denotan, respectivamente, los radios de los círculos inscritos de esos triángulos y los círculos exinscritos que se encuentran dentro del ángulo $\measuredangle C$ de cada triángulo. Sean r y ρ los radios de los círculos inscrito y exinscrito del propio triángulo $\triangle ABC$. Probar que*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot ... \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

Problema 2.67 *Sea $ABCD$ un trapecio isósceles, con AB paralelo a CD. La circunferencia inscrita del triángulo $\triangle BCD$ interseca CD en E. Sea F el punto sobre la bisectriz interna del ángulo $\measuredangle DAC$, tal que $EF \perp CD$. El circuncírculo del triángulo $\triangle ACF$ interseca la línea CD en C y G. Demuestra que el triángulo $\triangle AFG$ es isósceles.*

Problema 2.68 *En un paralelogramo $ABCD$ se trazan las circunferencias de centros O y O' y radios R y R' exinscritas a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$, relativas a los lados AD y CD, respectivamente.*

(a) Demuestra que las circunferencias son tangentes a BD en un mismo punto F

(b) Demuestra que D es el ortocentro del triángulo $\triangle OBO'$.

(c) Demuestra que $FB \cdot FD = R \cdot R'$

Problema 2.69 *En un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interna del ángulo $\measuredangle A$ interseca la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ en A_1. Los puntos B_1 y C_1 son definidos de manera semejante. Sea A_0 el punto de intersección de la línea AA_1 con las bisectrices externas de los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$. Los puntos B_0 y C_0 se definen de manera semejante. Demuestra que*

(a) $|A_0B_0C_0| = 2|AC_1BA_1CB_1|$

(b) $|A_0B_0C_0| \geq 4|ABC|$

Capítulo 3

Temas selectos de Geometría

3.1. Teoremas de Ceva y Menelao

En esta sección veremos un par de teoremas que resultan de gran utilidad cuando tratamos con problemas sobre líneas concurrentes o puntos colineales. Estos teoremas son los conocidos *Teorema de Ceva* y *Teorema de Menelao*. Cada uno de ellos tiene una doble utilidad, ya que podemos aplicarlos ya sea para demostrar que ciertas líneas son concurrentes (ciertos puntos son colineales), o una vez que sabemos que ciertas líneas son concurrentes (puntos colineales) queremos obtener información sobre éstas.

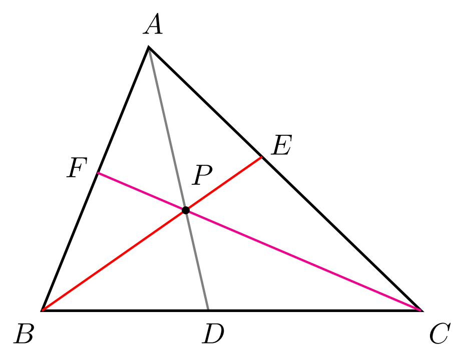
Antes de enunciar los teoremas mencionados, introducimos el término *ceviana*. Decimos que dado un triángulo, una línea que pasa por alguno de sus vértices es una ceviana.

Teorema 3.1.1 Teorema de Ceva. *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E y F puntos sobre las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, las cevianas*

AD, BE y CF concurren si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Demostración. Demostraremos el teorema para el caso en que las cevianas intersectan a los lados en el interior de estos, como se muestra en la figura.



Supongamos primero que las líneas AD, BE y CF son concurrentes en un punto P. Notemos que

$$\frac{|ABP|}{|APC|} = \frac{|ABD| - |BPD|}{|ADC| - |DPC|} = \frac{BD}{DC},$$

análogamente obtenemos,

$$\frac{|CBP|}{|ABP|} = \frac{CE}{EA} \text{ y } \frac{|APC|}{|CBP|} = \frac{AF}{FB}.$$

De esto obtenemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{|APC|}{|CBP|} \cdot \frac{|ABP|}{|APC|} \cdot \frac{|CBP|}{|ABP|} = 1.$$

Supongamos ahora que los puntos D, E y F cumplen que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \qquad (1)$$

Supongamos además que las líneas AD, BE y CF no son concurrentes. Consideremos el punto P donde se intersectan las líneas BE y CF y supongamos que la línea AP intersecta al lado BC en un punto D'. Dado que AD', BE y CF son concurrentes, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}.$$

De aquí se sigue que $D' = D$, ya que dada una razón sólo puede haber un punto que divida un segmento en esa razón. □

Observación 3.1.1 *El signo positivo en 1 tiene verdadera importancia cuando se trabaja con segmentos dirigidos. Convencionalmente se considera que al dividir dos segmentos con el mismo sentido el resultado es positivo, así mismo, el resultado se considera negativo si los segmentos tienen sentido contrario. Sin embargo, para fines prácticos, el signo no importará, pero si debemos tomar en cuenta que esto significa que las tres razones son positivas o bien dos de ellas son negativas. Geométricamente esto significa que las tres cevianas intersectan a los lados en el interior o bien dos de ellas lo hacen en el exterior de los segmentos.*

Ahora enunciamos, sin demostración, el Teorema de Menelao. La demostración es análoga a la del Teorema de Ceva, sin embargo es importante mencionar que el valor -1 en este caso significa que uno de los puntos o bien los tres, están en el exterior de los segmentos.

Teorema 3.1.2 Teorema de Menelao. *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E y F, puntos sobre las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, D, E y F son colineales si y sólo si*

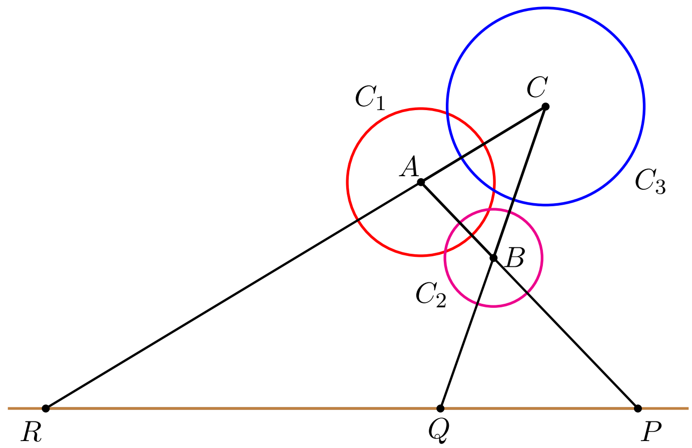
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

Ejemplo 3.1.1 *Sean C_1, C_2 y C_3 tres circunferencias de centros A, B y C, y radios a, b y c, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos donde se intersectan las tangentes externas comunes de C_1 y C_2, C_2 y C_3, y C_3 y C_1, respectivamente. Demuestra que P, Q y R son colineales.*

Demostración. Observemos lo siguiente:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

Entonces se cumplen las hipótesis del Teorema de Menelao para el triángulo $\triangle ABC$ con los puntos P, Q y R sobre los lados AB, BC y CA, respectivamente. Se sigue que los puntos P, Q y R son colineales. $\square$



Como se mencionó al principio de ésta sección, los Teoremas de Ceva y de Menelao también puede ser utilizados para obtener información sobre líneas concurrentes o puntos colineales.

Ejemplo 3.1.2 *Sea P un punto sobre la mediana AD de un triángulo $\triangle ABC$. Sean M y N los puntos donde los rayos CP y BP intersectan a los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que $MN \parallel BC$.*

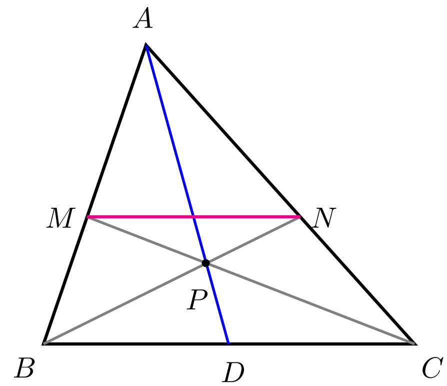
Demostración. Dado que las líneas AD, BN y CM son concurrentes, podemos aplicar el Teorema de Ceva y obtenemos que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Además, como $\frac{BD}{DC} = 1$ se sigue que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{CN}{NA} = 1,$$

lo que implica que MN es paralelo a BC. $\square$



Finalmente en esta sección, enunciamos las versiones trigonométricas de los Teoremas de Ceva y Menelao.

Teorema 3.1.3 versión trigonométrica del Teorema de Ceva. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean sean D, E y F puntos sobre las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Denotemos como $\alpha_1 = \measuredangle BAD$, $\alpha_2 = \measuredangle DAC$, $\beta_1 = \measuredangle CBE$, $\beta_2 = \measuredangle EBA$, $\theta_1 = \measuredangle ACF$ y $\theta_2 = \measuredangle FCB$. Entonces, las líneas AD, BE y CF concurren si y sólo si*

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{\text{sen}\beta_1}{\text{sen}\beta_2} \cdot \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = 1.$$

Teorema 3.1.4 versión trigonométrica del Teorema de Menelao. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean sean D, E y F puntos sobre las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Denotemos como $\alpha_1 = \measuredangle BAD$, $\alpha_2 = \measuredangle DAC$, $\beta_1 = \measuredangle CBE$, $\beta_2 = \measuredangle EBA$, $\theta_1 = \measuredangle ACF$ y $\theta_2 = \measuredangle FCB$. Entonces, los puntos D, E y F son colineales si y sólo si*

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{\text{sen}\beta_1}{\text{sen}\beta_2} \cdot \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = -1.$$

Estos pueden obtenerse de las versiones con razones de longitudes de segmentos, simplemente aplicando el Teorema Generalizado de la Bisectriz , el cual se obtiene fácilmente aplicando la Ley de Senos a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$.

Teorema 3.1.5 *Sea D un punto en la línea BC que contiene al lado BC del triángulo $\triangle ABC$ y sean $\alpha = \measuredangle BAD$ y $\beta = \measuredangle DAC$. Entonces se cumple que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

3.1.1. Problemas

Problema 3.1 *Utilizando el teorema de Ceva demuestra que*

(a) Las medianas de un triángulo concurren.

(b) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo son concurrentes.

(c) Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Problema 3.2 *Si D, E, F son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$ con los lados BC, CA, AB, respectivamente, demuestra que AD, BE, CF son concurrentes*[1].

Problema 3.3 *Sean D, E, F, los puntos de los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$, tales que D esté en la mitad del perímetro a partir de A, E en la mitad a partir de B, y F en la mitad a partir de C. Demuestra que AD, BE, CF son concurrentes*[2].

Problema 3.4 *Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en un círculo. Demuestra que las diagonales AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Problema 3.5 *Sean X y X' los puntos de un segmento rectilíneo MN simétricos con respecto al punto medio de MN. Entonces X y X' se llaman un par de*

[1] Este punto de concurrencia es llamado el punto de *Gergonne* del triángulo

[2] Este punto de concurrencia se llama punto de *Nagel* del triángulo

puntos isotómicos *del segmento* MN. *Demuestra que si* D *y* D', E *y* E', F *y* F' *son puntos isotómicos de los lados* BC, CA, AB *del triángulo* $\triangle ABC$, *y si* AD, BE, CF *son concurrentes, entonces* AD', BE', CF' *también son concurrentes.*

Problema 3.6 *Sean* OX *y* OX' *rayos que pasan por el vértice* O *del ángulo* $\measuredangle MON$ *simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo* $\measuredangle MON$. *Entonces* OX *y* OX' *se llaman un par de* rectas isogonales *para el ángulo* $\measuredangle MON$. *Demuestra que si* AD *y* AD', BE *y* BE', CF *y* CF', *son cevianas isogonales para los ángulos* A, B, C *del triángulo* $\triangle ABC$, *y si* AD, BE, CF *son concurrentes, entonces* AD', BE', CF' *también son concurrentes.*

Problema 3.7 *Sean* AD, BE, CF *tres cevianas concurrentes del triángulo* $\triangle ABC$, *y sea la circunferencia que pasa por* D, E, F *tal que corte a los lados* BC, CA, AB *nuevamente en* D', E', F'. *Demuestra que* AD', BE', CF' *son concurrentes.*

Problema 3.8 *Demuestra que las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.*

Problema 3.9 *Dos paralelogramos* $ACBD$ *y* $A'CB'D'$ *tienen un ángulo común en* C. *Demuestra que* DD', $A'B$, AB' *son concurrentes.*

Problema 3.10 *Sea* A *la proyección del centro de una circunferencia sobre una recta dada* l. *Consideremos los puntos* B *y* C *en* l *de manera que* $AB = AC$. *Por* B *y* C *se trazan dos secantes arbitrarias a la circunferencia las cuales la cortan en los puntos* P, Q *y* M, N, *respectivamente. Supongamos que las rectas* NP *y* MQ *cortan la recta* l *en los puntos* R *y* S. *Demuestra que* $RA = AS$.

Problema 3.11 *Sea* $ABCD$ *un paralelogramo y* P *un punto cualquiera. Por* P *trácense rectas paralelas a* BC *y a* AB *hasta que corten a* BA *y a* CD *en* G *y* H, *y a* AD *y* BC *en* E *y* F. *Demuestra que las rectas diagonales* EG, HF, DB *son concurrentes.*

Problema 3.12 *Si se construyen los triángulos equiláteros* $\triangle BCA'$, $\triangle CAB'$, $\triangle ABC'$ *exteriormente sobre los lados* BC, CA, AB *del triángulo* $\triangle ABC$, *demuestra que* AA', BB', CC' *son concurrentes en un punto* P.

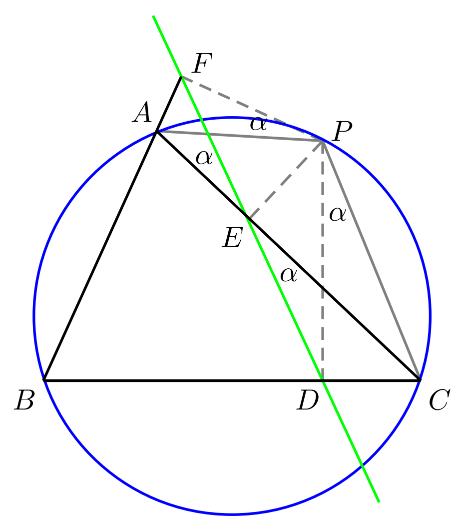
3.2. Teoremas de Euler y Simson

En esta sección veremos tres resultados clásicos en geometría Euclidiana: *la Línea de Simson, la Línea de Euler y la Circunferencia de los 9 puntos.* Estos tres teoremas, además de la gran belleza que poseen, se pueden demostrar de manera muy sencilla utilizando argumentos desarrollados en las primeras secciones del presente libro.

3.2.1. Línea de Simson

Teorema 3.2.1 Línea de Simson. *Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo. Entonces, los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo son colineales.*

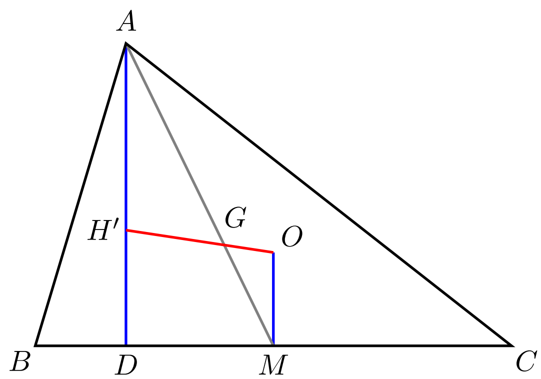
Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo y sean D, E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Tenemos que los cuadriláteros $PABC$, $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos. Además, como $\measuredangle PAF = \measuredangle PCD$ tenemos que $\measuredangle APF = \measuredangle CPD = \alpha$. Ahora, utilizando que los cuadriláteros $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos tenemos que $\measuredangle AEF = \measuredangle APF = \alpha$ y $\measuredangle CED = \measuredangle CPD = \alpha$. Con esto, hemos probado que los puntos D, E y F son colineales. $\square$



3.2.2. Línea de Euler

Teorema 3.2.2 Línea de Euler. *Sean H, G y O el ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo. Entonces H, G y O son colineales y se cumple que $HG : GO = 2 : 1$.*

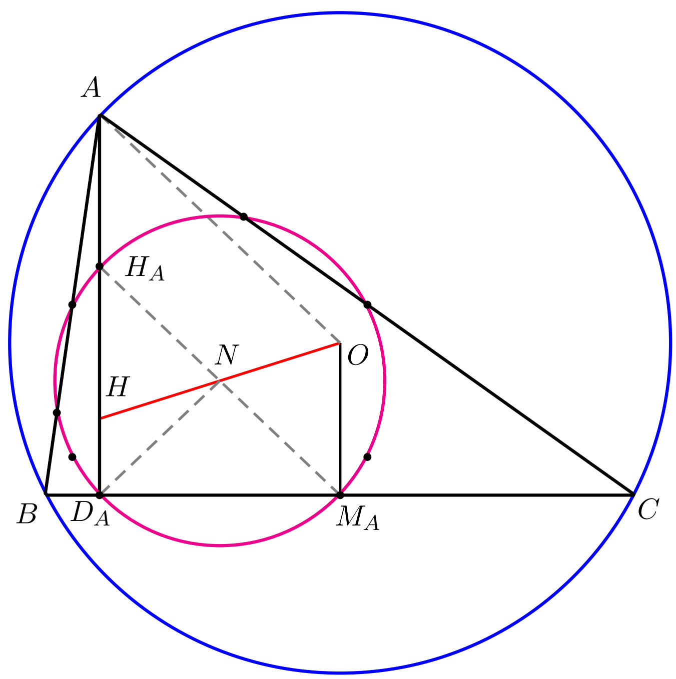
Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo dado y sea M el punto medio del lado BC. Consideremos un punto H' sobre el rayo OG de tal manera que $H'G = 2{\cdot}GO$. Sabemos además que $AG = 2{\cdot}GM$ y como $\measuredangle AGH' = \measuredangle MGO$, tenemos que los triángulos $\triangle AGH'$ y $\triangle MGO$ son semejantes y sus lados están en razón $2 : 1$. Con esto, tenemos que AH' es paralela a OM y por lo tanto, perpendicular a BC. Análogamente, se demuestra que $BH' \perp AC$ y que $CH' \perp AB$, por lo tanto, $H' = H$ es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Concluimos que H, G y O están alineados y que $HG : GO = 2 : 1$. $\square$



3.2.3. Circunferencia de los nueve puntos

Teorema 3.2.3 Circunferencia de los 9 puntos. *Consideremos los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos 9 puntos están sobre una misma circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro, y su diámetro es igual al circunradio del triángulo.*

Demostración. Sean H_A, D_A, M_A, el punto medio de AH, el pie de la altura desde A, el punto medio de BC, respectivamente. De manera análoga se definen H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C. Sea N el punto medio de HO. Sabemos que $AH = 2 \cdot OM_A$, entonces $H_AH = OM_A$ y además, como H_AH y OM_A son paralelas, tenemos que H_A, N y M_A son colineales. También sabemos que $ND_A = NH_A = NM_A$, además, $NH_A = \frac{1}{2}OA = R$, donde R es el circunradio del triángulo $\triangle ABC$. Con esto tenemos que los puntos H_A, D_A y M_A están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Análogamente se demuestra que H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Por lo tanto, los puntos H_A, D_A, M_A, H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C están sobre una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$ con centro en el punto medio de OH. □



3.2.4. Problemas

Problema 3.13 *Demuestra que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, es equivalente a la* *mitad del arco entre estos puntos.*

Problema 3.14 *Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo $\triangle ABC$. La recta perpendicular a BC, la cual pasa por P, corta por segunda vez a la circunferencia en el punto M. Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto P, es paralela a la recta AM.*

Problema 3.15 *Demuestra que la proyección del lado AB de un triángulo $\triangle ABC$ sobre la recta de Simson que corresponde a un punto P, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto P sobre los lados AC y BC.*

Problema 3.16 *¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?*

Problema 3.17 *Sea K un punto simétrico al circuncentro de un triángulo $\triangle ABC$, con respecto al lado BC. Demuestra que la línea de Euler en el triángulo $\triangle ABC$ divide el segmento AK por la mitad.*

Problema 3.18 *Sea P un punto interior a un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, tal que los ángulos $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$. Demuestra que las líneas de Euler en los triángulos $\triangle APB$, $\triangle BPC$ y $\triangle CPA$ se cortan en un punto.*

Problema 3.19 *Demuestra que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.*

Problema 3.20 *Demuestra que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la Circunferencia de los Nueve Puntos del triángulo.*

Problema 3.21 *Sean H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$, D el punto medio del lado BC y P uno de los puntos de intersección de la recta HD con el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que D es el punto medio de HP.*

Problema 3.22 *En un triángulo $\triangle ABC$, sean BD la altura, BM la mediana, y P y Q las proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle B$. Demuestra que los puntos D, M, P y Q están sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\triangle ABC$.*

3.3. Las simedianas

Las líneas que analizaremos en esta sección quizá son un poco menos populares que las vistas en el Capítulo 2. Sin embargo, los resultados concernientes con ellas resultan de gran utilidad al resolver problemas en los cuales es necesario probar que alguna línea divide por la mitad algún segmento. Estas líneas llevan el nombre de *simedianas* y son definidas de la siguiente manera:

Definición 3.3.1 *Una recta simétrica a la mediana de un triángulo, con respecto a la bisectriz del mismo ángulo del cual parte la mediana, se llama* simediana.

Lema 3.3.1 *Sean l y m dos líneas* isogonales *(que forman ángulos iguales con respecto a la bisectriz del ángulo) con respecto al ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo $\triangle ABC$. Sean P y Q, puntos sobre l y m, respectivamente. Entonces las distancias desde P hacia AB y AC son inversamente proporcionales a las respectivas distancias desde Q hacia AB y AC.*

Demostración. Sean x e y las distancias desde P hacia AB y AC, respectivamente; y sean r y s las distancias desde Q hacia AB y AC, respectivamente. Sean también, D y E los pies de las perpendiculares desde P y sean F y G los pies de las perpendiculares desde Q como se muestra en la figura. Para demostrar el lema basta con probar que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Para esto, tenemos que $\triangle ADP \sim \triangle AQG$ y con esto

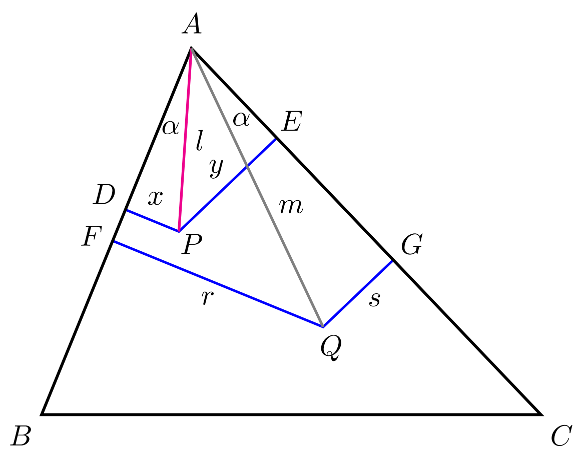
$$\frac{DP}{QG} = \frac{AP}{AQ},$$

también, como $\triangle APE \sim \triangle AQF$ tenemos que

$$\frac{PE}{FQ} = \frac{AP}{AQ},$$

entonces

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}. \ \square$$



Tenemos ahora el siguiente teorema, el cual resulta de gran utilidad al trabajar con simedianas:

Teorema 3.3.1 *Supongamos que la simediana que parte del vértice A del triángulo $\triangle ABC$ corta a BC en el punto K. Entonces se cumple que*

$$\frac{BK}{KC} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2}.$$

Demostración. Sea M el punto medio del lado BC y sean x, y, r y s perpendiculares a los lados AB y AC como se muestra en la figura. Sabemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{|ABK|}{|AKC|} = \frac{AB \cdot x}{AC \cdot y}.$$

Por otro lado, de la igualdad $|ABM| = |AMC|$ tenemos que

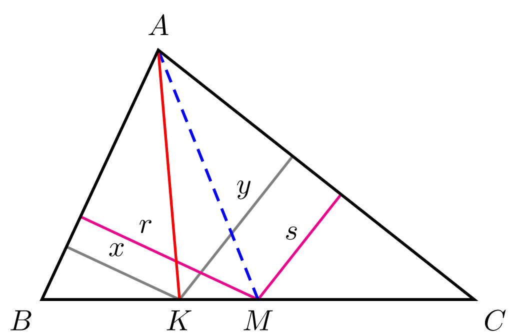
$$\frac{s}{r} = \frac{AB}{AC}.$$

Además, por el lema anterior tenemos que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Con esto tenemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2}. \quad \square$$



Ahora, ya estamos listos para demostrar el siguiente teorema sobre concurrencia de las simedianas:

Teorema 3.3.2 *Las tres simedianas de un triángulo concurren en un punto llamado* punto simediano

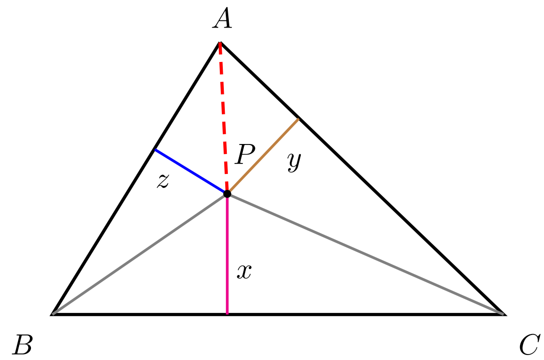
Demostración. Sea P el punto donde las simedianas desde los vértices B y C se intersecan. Sean x, y y z las longitudes de las perpendiculares desde P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Del razonamiento en la demostración anterior tenemos que

$$\frac{z}{x} = \frac{AB}{BC} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} = \frac{BC}{AC}.$$

Multiplicando ambas expresiones tenemos que

$$\frac{z}{y} = \frac{AB}{AC},$$

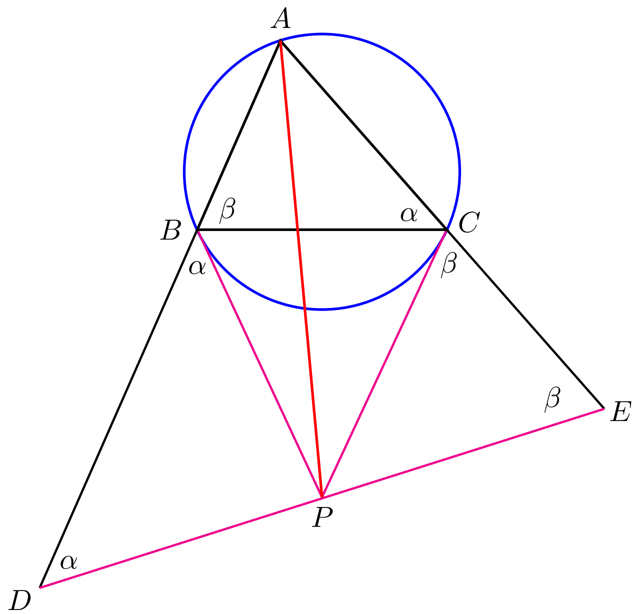
lo que significa que el punto P pertenece a la simediana desde el vértice A. $\square$



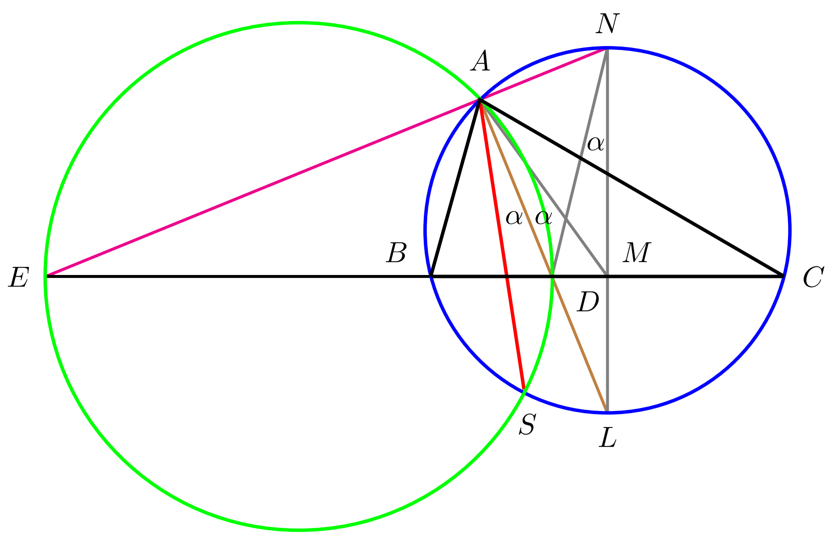
Ahora daremos una caracterización de la simediana de un triángulo, la cual en muchas ocasiones resulta ser de gran utilidad cuando interviene el circuncírculo del triángulo.

Ejemplo 3.3.1 *Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos B y C se intersecan en un punto P. Entonces tenemos que AP es la simediana del lado BC.*

Demostración. Por P trazamos una línea de manera que intersecte a la línea AB en un punto D tal que $DP = BP$. Esta misma línea interseca a la línea AC en un punto E. Como $\measuredangle PBD = \measuredangle ACB = \alpha$, tenemos que $\measuredangle BDP = \alpha$, lo cual implica que $BDEC$ es un cuadrilátero cíclico. Entonces, $\measuredangle CEP = \measuredangle ABC = \measuredangle PCE = \beta$, es decir, $\triangle CPE$ es isósceles. Como $BP = PC$, tenemos que $DP = PE$, es decir, AP es la mediana del triángulo $\triangle ADE$ y como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ tenemos que AP es la simediana del triángulo $\triangle ABC$ trazada hacia el lado BC. $\square$



Ejemplo 3.3.2 *Demuestra que las cuerdas comunes de la circunferencia circunscrita con las* circunferencias de Apolonio *de un triángulo dado son simedianas de este triángulo.*



Demostración. Sabemos que la circunferencia de Apolonio del vértice A pasa por los pies de las bisectrices exterior e interior del mismo vértice. Sea E el pie de la bisectriz exterior y sea D el pie de la bisectriz interior, además, sea L el punto donde la bisectriz interior interseca a la circunferencia circunscrita. Desde L trazemos la perpendicular a BC, la cual interseca BC en el punto M y a la circunferencia circunscrita en N. La línea ND interseca de nuevo al circuncírculo en un punto S. Sabemos que el cuadrilátero DMNA es cíclico, entonces $\measuredangle DNM = \measuredangle DAM = \alpha$, además $\measuredangle SAL = \measuredangle SNL = \alpha$. Con esto tenemos que AS es simediana del triángulo $\triangle ABC$, sólo falta probar que el cuadrilátero $AESD$ es cíclico. Para esto, tenemos que $\measuredangle EAS = 90° - \alpha$ y como $\measuredangle EDS = \measuredangle MDN = 90° - \alpha$, tenemos que $AESD$ es cíclico. Con esto hemos probado que AS es la cuerda común de la circunferencia de Apolonio y la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$. □

3.3.1. Problemas

Problema 3.23 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea D el punto donde la simediana, trazada hacia el lado BC, interseca al circuncírculo de éste. Demuestra que la línea CB es simediana del triángulo $\triangle ADC$.*

Problema 3.24 *Sean P y Q dos puntos sobre el segmento BC de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ de manera que $\measuredangle PAB = \measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$. Sean M y N los puntos sobre AP y AQ, respectivamente, los cuales cumplen que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Prueba que BM y CN se intersecan sobre la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 3.25 *Sean M y N las proyecciones de los vértices B y C de un triángulo $\triangle ABC$ sobre la bisectriz interior del ángulo $\measuredangle BAC$. La paralela a AB por M y la paralela a AC por N se intersecan en un punto P. Demuestra que AP es simediana del triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 3.26 *El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Los pies de las perpendiculares desde D hacia las líneas AB, BC, CA, son P, Q, R, respectivamente. Demuestra que las bisectrices de las ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CDA$ se intersecan sobre la línea AC si y sólo si $RP = RQ$.*

Problema 3.27 *La tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ por el punto A interseca a la línea BC en un punto P. Se traza la otra tangente a la circunferencia desde P y ésta la interseca en un punto Q. Demuestra que AQ es simediana del triángulo $\triangle ABC$.*

Problema 3.28 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo $\measuredangle CMD$ es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo $\measuredangle AKB$ es recto y que*

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

Problema 3.29 *Un hexágono convexo $ABCDEF$ está inscrito en una circunferencia de tal manera que $AB = CD = EF$ y las diagonales AD, BE y CF concurren en un punto. Sea P el punto de intersección de AD y CE. Demuestra que*

$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2.$$

Problema 3.30 *Sea N el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ trazadas por los puntos B y C. Sea M un punto en la circunferencia de tal manera que AM es paralelo a BC y sea K el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demuestra que KA divide BC por la mitad.*

Problema 3.31 *Desde un punto A exterior a una circunferencia están trazadas las tangentes AM y AN. También desde A se traza una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L. Trazamos una recta arbitraria l paralela a AM. Supongamos que KM y LM cortan l en los puntos P y Q. Demuestra que la recta MN divide el segmento PQ por la mitad.*

Problema 3.32 *La recta ℓ es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en ℓ pasa por A y corta ℓ en los puntos C y D. Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N. Demuestra que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.*

Problema 3.33 *Dos circunferencias se intersecan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.*

Problema 3.34 *Sea AD una altura de un triángulo $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y AC en K y L, respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersecan en un punto M. Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.*

Problema 3.35 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que $\measuredangle B > 90^\circ$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Demuestra que $\measuredangle BCF = \measuredangle ACD$.*

Problema 3.36 *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC < 90^\circ$. La recta por D y el punto medio de BC interseca a la recta AB en un punto E. Demuestra que $\measuredangle BEC = \measuredangle DAC$.*

Problema 3.37 *Se considera el triángulo $\triangle ABC$ y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita. Demuestra que*

$$\frac{BE}{CD} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2}.$$

Problema 3.38 *Las tangentes en B y C al circuncírculo de un triángulo $\triangle ABC$ se cortan en X. Sea M el punto medio de BC. Demuestra que*

$$\measuredangle BAM = \measuredangle CAX \quad \text{y} \quad \frac{AM}{AX} = \cos\left(\measuredangle BAC\right).$$

Problema 3.39 *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y su cincuncírculo Ω, denotaremos con A' el punto de intersección de las tangentes a Ω en B y C. Definimos B' y C' de manera similar.*

(a) Demuestra que las líneas AA', BB' y CC' concurren.

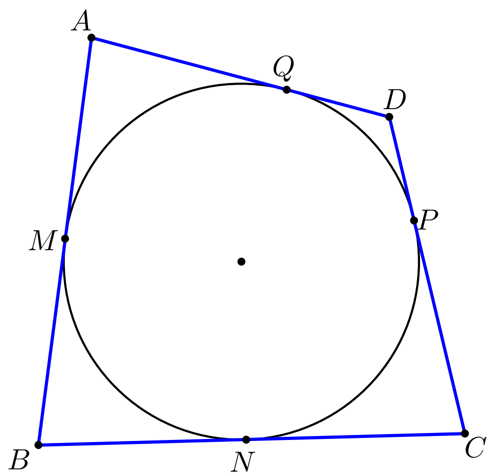
(b) Sea K el punto de concurrencia en (a) y sea G el centroide del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que KG es paralela a BC, si y sólo si $2a^2 = b^2 + c^2$, donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$.

3.4. Polígonos circunscritos a una circunferencia

Del mismo modo que vimos que no todo cuadrilátero tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia, se puede ver que no todo cuadrilátero posee una circunferencia inscrita, es decir, una circunferencia que sea tangente a sus cuatro lados al mismo tiempo. En el caso que un cuadrilátero si tenga una circunferencia inscrita diremos que el cuadrilátero es *circunscrito.* De manera similar al caso de los cuadriláteros cíclicos, los cuadriláteros circunscritos gozan de muchas propiedades interesantes que los distinguen del resto de los cuadriláteros.

El siguiente teorema nos proporciona un criterio sencillo para saber si un cuadrilátero es circunscrito.

Teorema 3.4.1 *El cuadrilátero $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita si y sólo si $AB + CD = BC + AD$.*



Demostración. Supongamos primero que el cuadrilátero posee una circunferencia inscrita y sean M, N, P y Q los puntos de tangencia de los lados del cuadrilátero con la circunferencia, como se muestra en la figura. Dado que $AQ = AM$, $QD = DP$, $PC = CN$ y $NB = BM$, tenemos que

$$AD + BC = AQ + QD + BN + NC = AM + DP + MB + CP = AB + DC.$$

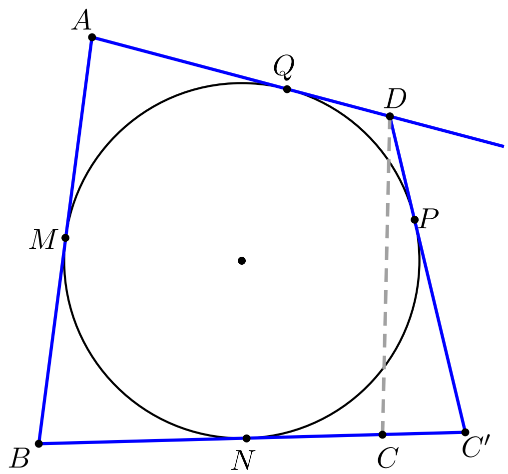
Ahora, supongamos que se cumple que

$$AB + CD = BC + AD \tag{3.1}$$

pero que no existe una circunferencia que sea tangente a los cuatro lados del cuadrilátero. Consideremos la circunferencia Γ que es tangente a AB, AD y BC. Sea C' el punto en el rayo BC el cual cumple que DC' es tangente a la circunferencia Γ. Tenemos entonces que

$$AB + C'D = BC' + AD, \tag{3.2}$$

entonces, restando (3.2) de (3.1) obtenemos que $CD - C'D = BC - BC'$, es decir, $|CD - C'D| = CC'$. Esto último contradice la desigualdad del triángulo en el triángulo $\triangle DC'C$, entonces debe cumplirse que $C' = C$. Concluimos que Γ debe ser tangente a todos los lados del cuadrilátero $ABCD$. $\square$

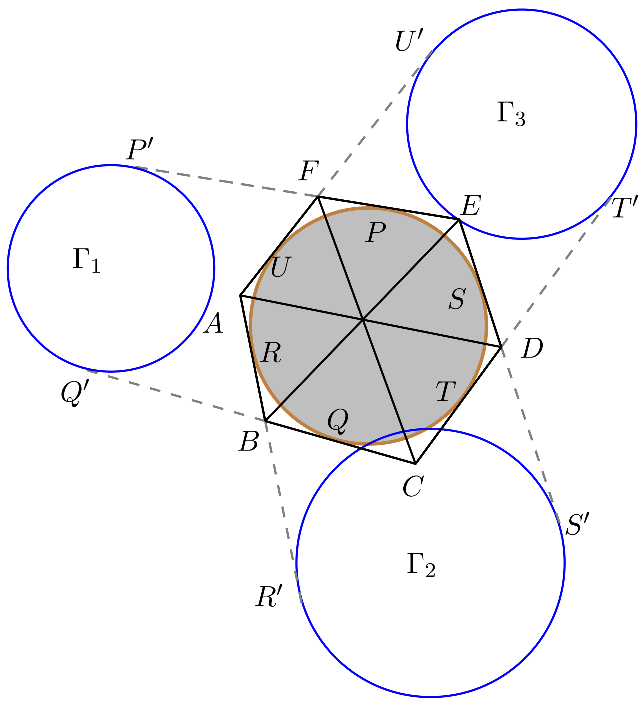


Ejemplo 3.4.1 *(Teorema de Brianchon). Si un hexágono convexo posee una circunferencia inscrita, entonces las diagonales principales son concurrentes.*

Demostración. Sea $ABCDEF$ el hexágono dado y sean R, Q, T, S, P y U, los puntos en los cuales la circunferencia toca a los lados AB, BC, CD, DE, EF y FA, respectivamente. Prolongamos los segmentos EF, CB, AB, ED, CD y AF (como se muestra en la figura siguiente) hasta los puntos P', Q', R', S', T' y U', de manera que

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'.$$

Sea Γ_1 la circunferencia tangente a las líneas PP' y QQ' en los puntos P' y Q', sea Γ_2 la circunferencia tangente a RR' y SS' en los puntos R' y S' y sea Γ_3 la circunferencia tangente a TT' y UU' en los puntos T' y U'. Como $AR = AU$ y $RR' = UU'$, tenemos que $AR' = AU'$; además, como $DT = DS$ y $TT' = SS'$ tenemos que $DT' = DS'$. De lo anterior se sigue que A y D están sobre el eje radical de Γ_2 y Γ_3, es decir, la línea AD es el eje radical de Γ_2 y Γ_3. Análogamente, se demuestra que la línea BE es el eje radical de Γ_1 y Γ_2, y que la línea CF es el eje radical de Γ_1 y Γ_3. Como los ejes radicales de tres circunferencias son concurrentes, tenemos entonces que las líneas AD, BE y CF concurren. $\square$



Como corolario del Teorema de Brianchon se obtiene el siguiente resultado el cual es interesante en sí mismo.

Corolario 3.4.1 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito y sean M y N los puntos de contacto de dos lados opuestos con la circunferencia inscrita. Entonces AC, BD y MN concurren.*

3.4.1. Problemas

Problema 3.40 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito. Prueba que los círculos inscritos en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son tangentes entre sí.*

Problema 3.41 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito. La longitud del segmento tangente a la circunferencia desde A es igual a x y la longitud del segmento tangente a la circunferencia desde C es igual a y. Demuestra que la razón en que la diagonal BD divide a la diagonal AC es $x : y$.*

Problema 3.42 *Las diagonales de un trapecio circunscrito de bases AD y BC se intersecan en un punto O. Los radios de los círculos inscritos en los triángulos $\triangle AOD$, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ y $\triangle COD$, son iguales a r_1, r_2, r_3 y r_4, respectivamente. Prueba que*

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}.$$

Problema 3.43 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito y sea ℓ una línea la cual divide el perímetro y el área de $ABCD$ a la mitad. Prueba que ℓ pasa por el centro de la circunferencia inscrita en $ABCD$.*

Problema 3.44 *Sean $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito, P el punto de intersección de las rectas AB y CD, Q, el punto de intersección de las rectas AD y BC. Demuestra que el ortocentro del triángulo formado por las rectas PQ, AC y BD coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $ABCD$.*

Problema 3.45 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito con diagonales de longitudes $AC=u$ y $BD=v$. Sean a, b, c y d las longitudes de las tangentes desde los vértices A, B, C y D. Demuestra que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si*

$$\frac{u}{v}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Problema 3.46 *Demuestra que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia de radio R y a su vez está circunscrito a una circunferencia de radio r, y d es la distancia entre los centros, entonces*

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

Problema 3.47 *Sea N el punto de intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero circunscrito $ABCD$. Las longitudes de las perpendiculares desde N hacia los lados AB, BC, CD y DA son a, b, c y d, respectivamente. Demuestra que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Problema 3.48 *En un cuadrilátero convexo $ABCD$, los rayos BA y CD se intersecan en P, y los rayos BC y AD se intersecan en Q. Sea H la proyección de D sobre PQ. Demuestra que existe un círculo inscrito en $ABCD$ si y sólo si los incírculos de los triángulos $\triangle ADP$ y $\triangle CDQ$ son visibles desde H bajo el mismo ángulo.*

Problema 3.49 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB \neq BC$. Denotemos por ω_1 y ω_2 los incírculos de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$. Supongamos que existe un círculo ω inscrito en el ángulo $\measuredangle ABC$, tangente a las extensiones de los segmentos AD y CD. Demuestra que las tangentes comunes externas de ω_1 y ω_2 se intersecan sobre ω.*

Problema 3.50 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con los lados BC y AD no paralelos. Supongamos que existe un punto E en el lado BC de tal manera que los cuadriláteros $ABED$ y $AECD$ son circunscritos. Demuestra que existe un punto F en el lado AD de tal manera que los cuadriláteros $ABCF$ y $BCDF$ son circunscritos si y sólo si AB es paralelo a CD.*

Capítulo 4

Algunas estrategias en Geometría

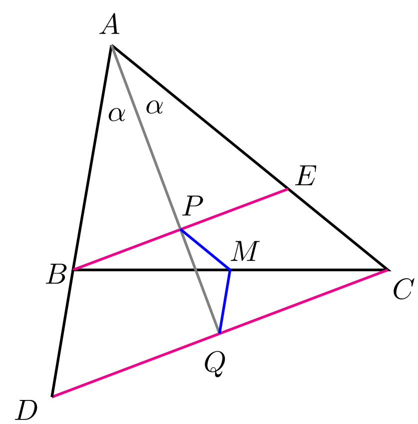
El objetivo en este capítulo es mostrar como algunos trazos pueden simplificar la solución de un problema que aparentemente es complicado. De hecho, algunas veces el trazo dibujado nos muestra cuál es el camino hacia la solución (o al menos uno de los caminos). Al principio, muchos de estos trazos pueden parecer artificiales y como decimos comúnmente *sacados de la manga*, sin embargo, hay ciertos grupos de problemas para los cuales el mismo tipo de construcción resulta muy útil. Es por esto que en este capítulo se ha tratado de mostrar algunas de estas estrategias y se han agrupado algunos problemas que se resuelven con esas mismas estrategias. Esto, con la finalidad de que se logre cierta familiaridad con los *trucos* y dejen de ser eso precisamente y se conviertan en *técnicas* rutinarias. De lograr este objetivo, se habrá logrado el verdadero objetivo del libro completo. Como última recomendación quizá debería decir lo siguiente: *recordemos que ninguna idea está aislada de las demás, es decir, si combinamos varias estrategias las posibilidades de éxito serán mayores.*

4.1. Prolongar segmentos

La primer *estrategia* o *truco* que veremos es la *prolongación de segmentos*. Algunas veces al prolongar ciertos segmentos podemos encontrar algunos detalles que nos facilitan la solución del problema al que nos estamos enfrentando:

Ejemplo 4.1.1 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea ℓ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$. Sean P y Q puntos sobre ℓ de manera que BP y CQ son perpendiculares a ℓ. Si M es el punto medio de BC, demuestra que $MP = MQ$.*

Demostración. Prolongamos BP y CQ hasta que intersecten a AC y AB en E y D, respectivamente. Sabemos que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ADC$ son isósceles, entonces $BD = EC$. Como P y M son puntos medios de los segmentos BE y BC, respectivamente, tenemos que PM es paralela a EC y además $PM = \frac{1}{2}EC$. Análogamente, tenemos que $MQ = \frac{1}{2}BD$ y con esto tenemos que $PM = MQ$. □



En ocasiones nos conviene prolongar los segmentos hasta obtener una longitud, la cual es mencionada en el problema:

Ejemplo 4.1.2 *Sean a, b y c los lados BC, CA y AB, de un triángulo $\triangle ABC$. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

Demostración. Observemos que la longitud $b + c$ aparece en la igualdad que queremos demostrar, entonces, prolongamos el rayo CA hasta el punto E de tal manera que $EA = AB = c$. Así, hemos construido el segmento $EC = b + c$. Como el triángulo $\triangle EAB$ es isósceles, tenemos que $\measuredangle BEA + \measuredangle EBA = 2\alpha = \measuredangle BAC$. Se sigue que EB es paralela a AD. Aplicando el Teorema de la Bisectriz al triángulo $\triangle ADC$ tenemos que

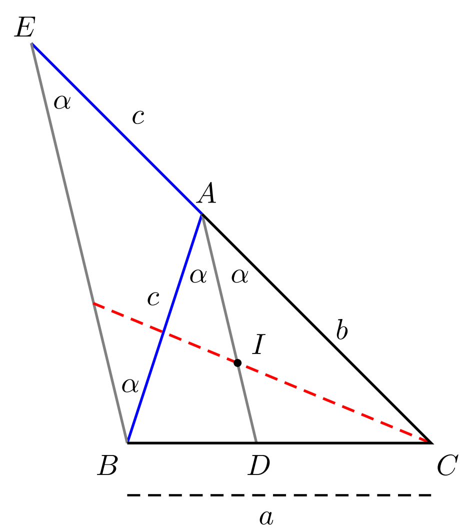
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD},$$

además

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EC}{BC} = \frac{b+c}{a}.$$

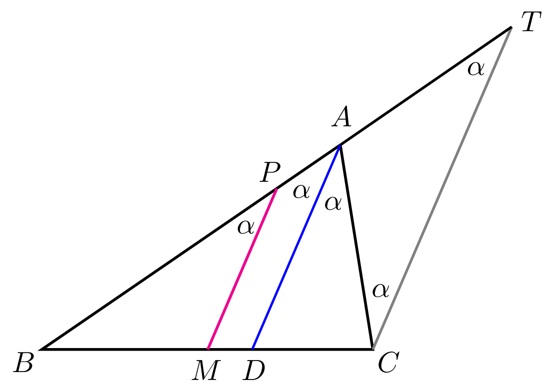
Por lo tanto

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}. \quad \square$$



Ejemplo 4.1.3 *Dado un triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $AB > AC$. Sea M el punto medio de BC. La bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC en el punto D. Por M se traza una línea la cual corta al lado AB en el punto P. Si $BP = PA + AC$, demuestra que MP es paralela a AD.*

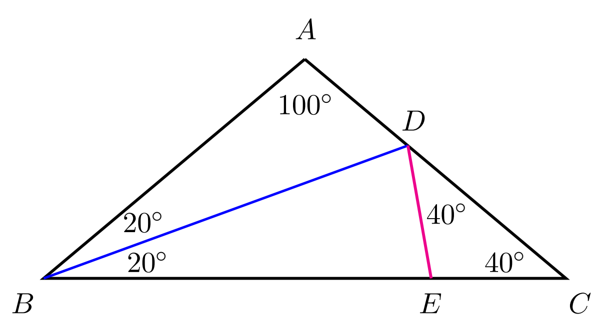
Demostración. Prolongamos el lado BA hasta el punto T de manera que $AT = AC$. Sea $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \alpha$. Como el triángulo $\triangle TAC$ es isósceles tenemos que $\measuredangle ATC + \measuredangle ACT = \measuredangle BAC = 2\alpha$, entonces $\measuredangle ATC = \measuredangle ACT = \alpha$. De lo anterior, tenemos que CT es paralela a AD, además, como $BP = PA + AC = PA + AT = PT$ tenemos que PM es paralela a TC y por lo tanto paralela a AD. □



También puede ocurrir que resulte más útil considerar un punto en el interior de un segmento de tal manera que se nos forme algún triángulo isósceles:

Ejemplo 4.1.4 *En un triángulo $\triangle ABC$ se cumple que $\measuredangle BAC = 100°$ y $AB = AC$. Se elige un punto D en el lado AC de modo que $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$. Demuestra que $AD + DB = BC$.*

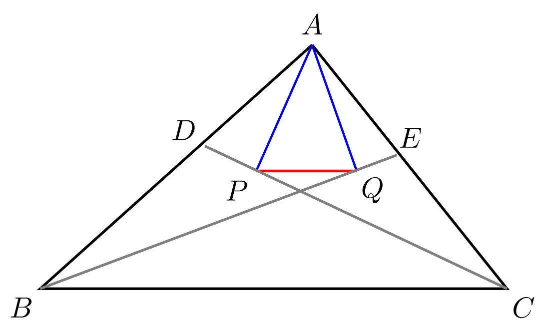
Demostración. Consideremos un punto E sobre BC de tal manera que $BE = BD$. Como $\measuredangle BED = \measuredangle ECD + \measuredangle EDC = 80°$ tenemos que $\measuredangle EDC = 40°$, entonces $DE = EC$. Basta probar que $AD = DE$. Como tenemos que el cuadrilátero $ABED$ es cíclico y $\measuredangle ABD = \measuredangle EBD = 20°$, entonces $AD = DE$ y así $BD + AD = BD + DE = BE + EC = BC$. □



4.1.1. Problemas

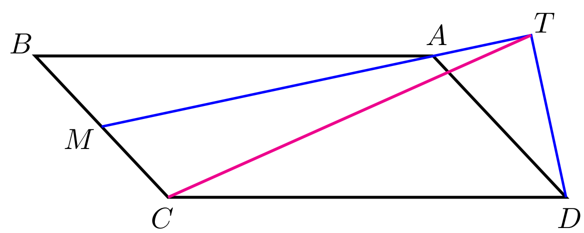
Problema 4.1 *Lo mismo que en el ejemplo 3.1.1 pero ahora ℓ es una línea arbitraria que pasa por el vértice A.*

Problema 4.2 *En un triángulo $\triangle ABC$ se trazan las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$ y éstas intersecan los lados AC y AB en los puntos E y D, respectivamente. Consideramos los puntos P y Q sobre las líneas CD y BE, respectivamente, de manera que $AP \perp CD$ y $AQ \perp BE$. Demuestra que PQ es paralelo a BC.*



Problema 4.3 *En un triángulo escaleno $\triangle ABC$ se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestra que $\measuredangle EMD = \measuredangle DMF$.*

Problema 4.4 *En un paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio de BC. DT es dibujada desde D y perpendicular a MA, como se muestra en la figura. Demuestra que $CT = CD$.*



Problema 4.5 *En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro, O el circuncentro, sea AL la bisectriz de el ángulo $\measuredangle BAC$. Demuestra que AL bisecta el $\measuredangle HAO$.*

Problema 4.6 *Sea XY una cuerda de longitud constante la cual se desliza sobre un semicírculo. Sea M el punto medio de la cuerda, C y D las proyecciones de los puntos X y Y sobre el diámetro AB. Prueba que el triángulo $\triangle MCD$ es isósceles y nunca cambia su forma.*

Problema 4.7 *En un triángulo $\triangle ABC$, se tiene que $AB > AC$. La bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle BAC$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en E. Sea F la proyección de E sobre la línea AB. Demuestra que $2AF = AB - AC$.*

Problema 4.8 *Está dada la circunferencia Ω. Desde un punto exterior P se trazan dos líneas tangentes a Ω las cuales la tocan en A y B. También por P se traza una secante ℓ a Ω. Desde el centro de Ω se traza una recta perpendicular a ℓ la cual corta a Ω en el punto K y a ℓ en C (el segmento BK corta a ℓ). Demuestra que BK bisecta el ángulo $\measuredangle ABC$.*

Problema 4.9 *Sea M un punto sobre el arco $\widehat{CB}$ (el cual no contiene a A) de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero $\triangle ABC$. Demuestra que $BM + CM = AM$.*

Problema 4.10 *Sobre los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Sea D el punto medio del lado BC. Demuestra que $PM = 2 \cdot AD$.*

Problema 4.11 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\measuredangle BCA = 60°$ y $AC < BC$. El punto D está sobre el lado BC y cumple que $BD = AC$. El lado AC es extendido hasta el punto E de manera que $AC = CE$. Demuestra que $AB = DE$.*

Problema 4.12 *En el triángulo $\triangle ABC$ con $AB > AC$, D es el punto medio del lado BC; E está sobre el lado AC. Los puntos P y Q son los pies de las perpendiculares desde B y E a la línea AD. Demuestra que $BE = AE + AC$ si y sólo si $AD = PQ$.*

Problema 4.13 *Una circunferencia tiene su centro en el lado AB de un cuadrilá-tero cíclico $ABCD$. Los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Demuestra que $AD + BC = AB$.*

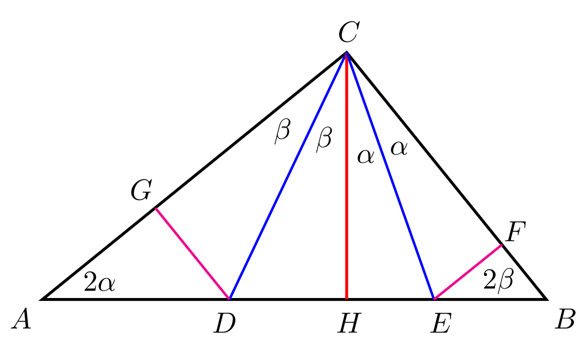
Problema 4.14 *El ángulo $\measuredangle BAC$ es el menor de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$. Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T. Demuestra que $AU = TB + TC$.*

Problema 4.15 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea AP la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con P sobre BC, y sea BQ la bisectriz de $\measuredangle ABC$ con Q sobre CA. Se sabe que $BAC = 60°$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos el triángulo $\triangle ABC$?*

4.2. Trazar perpendiculares y paralelas

En muchas ocasiones, al trazar una perpendicular o una paralela a algún segmento, obtenemos triángulos que poseen propiedades útiles en la solución de un problema.

Problema 4.16 *Sean E y D puntos sobre la hipotenusa AB de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en C. Los puntos F y G están sobre los lados CB y CA de tal manera que $BD = BC$, $AE = AC$, $EF \perp BC$, y $DG \perp AC$. Demuestra que $DE = EF + DG$.*



Demostración. Se traza la perpendicular a AB desde C y supongamos que ésta interseca a AB en H. Sean $\measuredangle CAB = 2\alpha$ y $\measuredangle ABC = 2\beta$. Como el triángulo $\triangle CAE$ es isósceles tenemos que $\measuredangle CEA = 90° - \alpha$, por lo que $\measuredangle HCE = \alpha$. Por suma de ángulos en el triángulo $\triangle ABC$ obtenemos que $\measuredangle ECB = \alpha$. Además, tenemos que el cuadrilátero $CHEF$ es cíclico y como $\measuredangle HCE = \measuredangle ECF = \alpha$, se sigue que $HE = EF$. Análogamente se obtiene que $GD = DH$, por lo tanto, $DE = EF + DG$. □

Ejemplo 4.2.1 *En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N, de tal manera que $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Demuestra que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.*

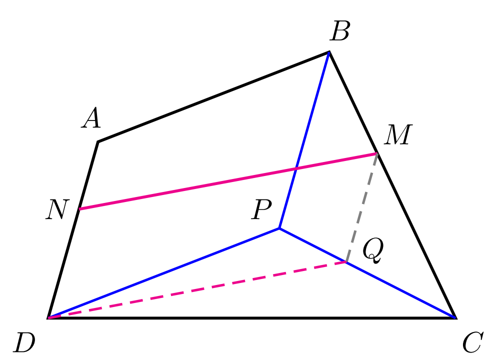
Demostración. Por B y D se trazan paralelas a AD y AB, respectivamente, las cuales se intersecan en el punto P. Por M se traza un paralela a BP la cual interseca a PC en el punto Q. Tenemos que

$$\frac{MQ}{BP} = \frac{CM}{CB} = \frac{DN}{DA}$$

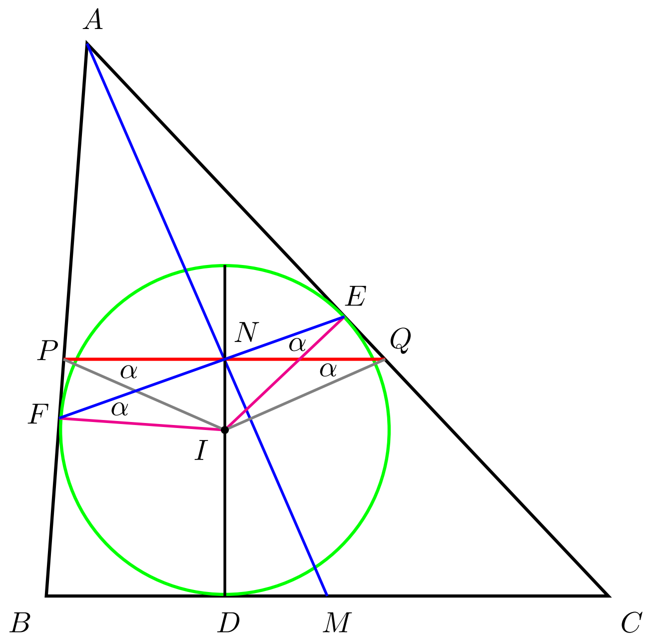
y como $BP = AD$ entonces $MQ = ND$, además MQ es paralelo a ND y con esto tenemos que $NMQD$ es un paralelogramo. También tenemos que

$$\frac{PQ}{QC} = \frac{BM}{MC} \Longrightarrow \frac{PQ}{QC} = \frac{AB}{DC} = \frac{DP}{DC}.$$

Por el Teorema de la Bisectriz tenemos que DQ bisecta el ángulo $\measuredangle PDC$ y como NM es paralela a DQ, concluimos que NM es paralela a la bisectriz del ángulo formado por las rectas AB y DC. □



Ejemplo 4.2.2 *El incírculo del triángulo $\triangle ABC$ toca los lados AB, BC y CA en los puntos F, D y E, respectivamente. El diámetro del incírculo, el cual pasa por el punto D, interseca al segmento EF en el punto N. Demuestra que la línea AN divide al lado BC por la mitad.*



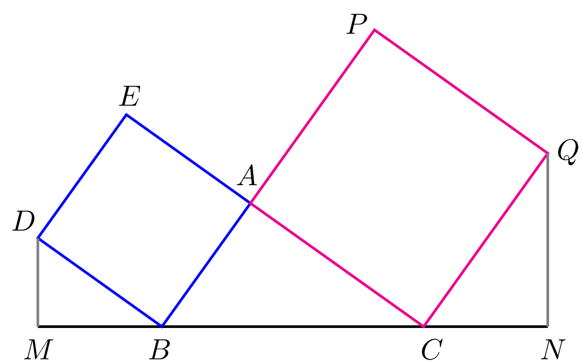
Demostración. Por N trazamos el segmento PQ paralelo a BC, como se muestra en la figura. Bastará entonces demostrar que el triángulo $\triangle PIQ$ es isósceles. Como ID es perpendicular a BC (I es el incentro del triángulo) tenemos que $\measuredangle DNP = \measuredangle DNQ = 90°$, además, como los ángulos $\measuredangle IFP$ e $\measuredangle IEQ$ también son rectos, tenemos que los cuadriláteros $IFPN$ e $INEQ$ son cíclicos. De aquí obtenemos que $\measuredangle IPN = \measuredangle IFN = \alpha$ e $\measuredangle IQN = \measuredangle IEN = \alpha$, es decir, $\measuredangle IPN = \measuredangle IQN = \alpha$. Esto implica que el triángulo $\triangle PIQ$ es isósceles. Lo cual queríamos demostrar. □

4.2.1. Problemas

Problema 4.17 *En un triángulo $\triangle ABC$, la altura CE es extendida hasta G de tal manera que $EG = AF$, donde AF es la altura trazada hacia BC. Una línea a través de G y paralela a AB interseca CB en H. Demuestra que $HB = AB$.*

Problema 4.18 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Tomando como diámetros los lados del cuadrilátero y con centro en los puntos medios de éstos, se construyen cuatro circunferencias. Demuestra que estas cuatro circunferencias cubren completamente al cuadrilátero.*

Problema 4.19 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Se construyen los cuadrados $ABDE$ y $CAPQ$ como se muestra en la figura siguiente. Se trazan las perpendiculares DM y QN hacia el lado BC. Demuestra que $DM + QN = BC$.*



Problema 4.20 *En un triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $AB = AC$, se extiende CB a través de B hasta un punto P. Una línea desde P, paralela a la altura BF, interseca AC en D. Se dibuja PE perpendicular a AB. Demuestra que $BF + PE = PD$.*

Problema 4.21 *Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Demuestra que $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.*

Problema 4.22 *Un trapecio $ABCD$, con AB paralelo a CD, tiene sus diagonales AC y BD mutuamente perpendiculares. Demuestra que*

$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

Problema 4.23 *Sea O un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ con lados de longitud a. Las líneas AO, BO y CO intersecan los lados en los puntos A_1, B_1 y C_1. Demuestra que $OA_1 + OB_1 + OC_1 < a$.*

Problema 4.24 *Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Desde P se bajan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Encuentra*

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}.$$

Problema 4.25 *Los lados opuestos de un hexágono $ABCDEF$ son paralelos. Si $BC-EF=ED-AB=AF-CD>0$, demuestra que todos los ángulos de $ABCDEF$ son iguales.*

Problema 4.26 *Se toma un punto P en el interior de un rectángulo $ABCD$ de tal manera que $\measuredangle APD+\measuredangle BPC=180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\measuredangle DAP$ y $\measuredangle BCP$.*

Problema 4.27 *Sean MN, PQ, RS tres segmentos iguales en los lados de un triángulo equilátero. Demuestra que en el triángulo formado por las líneas QR, SM y NP, los segmentos QR, SM y NP, son proporcionales a los lados en los que están contenidos.*

Problema 4.28 *En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales AC y BD son perpendiculares y los lados opuestos AB y DC no son paralelos. El punto P, intersección de las mediatrices de AB y DC, está en el interior del cuadrilátero $ABCD$. Demuestra que los vértices de $ABCD$ están en una misma circunferencia si y sólo si los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ tienen áreas iguales.*

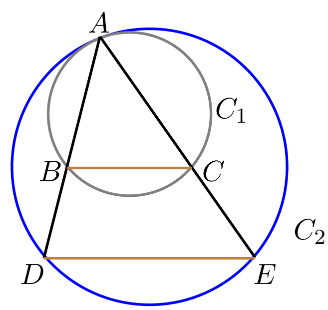
Problema 4.29 *Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C y R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle FAB$, $\triangle BCD$ y $\triangle DEF$, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono. Demuestra que*

$$R_A+R_C+R_E \geq \frac{p}{2}.$$

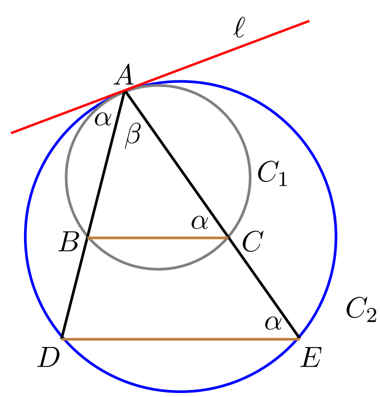
4.3. Trazar tangentes y cuerdas comunes

Cuando tenemos dos circunferencias tangentes, ya sea la tangencia interior o exterior, en ocasiones es muy útil trazar la línea tangente a las dos circunferencias la cual pasa por el punto común de ellas:

Ejemplo 4.3.1 *Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes en el punto A, como se muestra en la figura. A partir del punto A se trazan dos rectas las cuales intersecan a C_1 y C_2 en los puntos B, C, D y E como se muestra en la figura. Demuestra que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes.*



Demostración. Sea ℓ la tangente común a C_1 y C_2 por el punto A, y sea α el ángulo formado por ℓ y AD. De esta manera se han formado dos ángulos semi-inscritos que intersecan los arcos $\widehat{BA}$ y $\widehat{DA}$ en C_1 y C_2, respectivamente. Como los ángulos $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle AED$ intersecan los arcos $\widehat{BA}$ y $\widehat{DA}$, tenemos que $\measuredangle ACB = \measuredangle AED = \alpha$. De aquí se sigue que $BC \parallel DE$, por lo tanto, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes. $\square$



Un trazo que podríamos considerar obligatorio es el siguiente: siempre que tengamos dos circunferencias que se cortan en dos puntos, debemos trazar *la cuerda común*.

Ejemplo 4.3.2 *Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se han trazado los segmentos AC y AD, cada uno de los cuales, siendo cuerda de una circunferencia, es tangente a la segunda circunferencia. Demuestra que $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.*

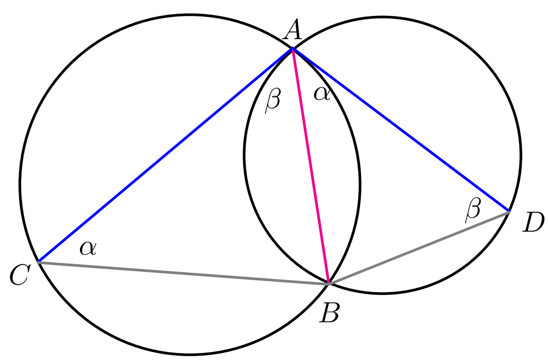
Demostración. Trazamos la cuerda común AB. Con esto obtenemos que $\measuredangle ACB = \measuredangle DAB = \alpha$, ya que ambos ángulos intersecan el arco $\widehat{AB}$ en la primer circunferencia. Análogamente, obtenemos que $\measuredangle ADB = \measuredangle CAB = \beta$. Con estas dos igualdades de ángulos obtenemos que los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle DAB$ son semejantes. Tenemos entonces que

$$\frac{AC}{DA} = \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB}.$$

De aquí se deriva que:

$$\left(\frac{AC}{DA}\right)^2 = \frac{AB \cdot CB}{DB \cdot AB} = \frac{CB}{DB},$$

de donde se obtiene fácilmente la igualdad deseada. □



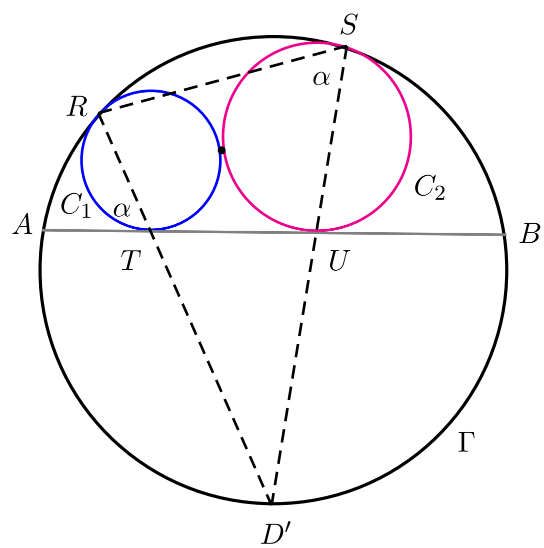
Ejemplo 4.3.3 *Sean C_1 y C_2 dos circunferencias las cuales son tangentes exteriormente en un punto I, y sea Γ una circunferencia la cual es tocada internamente por C_1 y C_2 en los puntos R y S, respectivamente. Sea AB la cuerda de*

Γ la cual es tangente exterior a C_1 y C_2 en T y U, respectivamente. La tangente común en I a C_1 y C_2 interseca a Γ en C y D, con C sobre el mismo lado de AB que I.

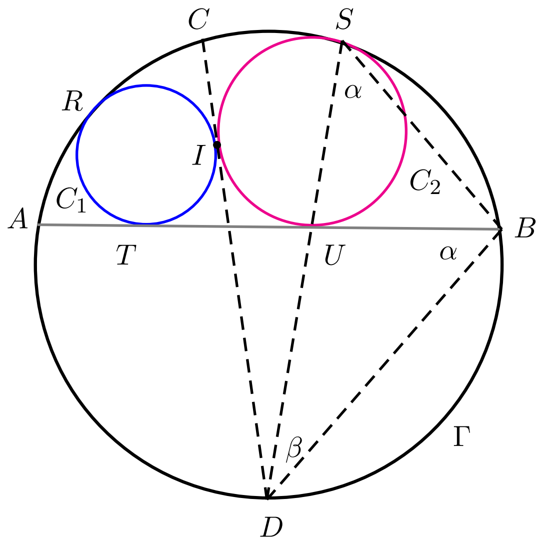
(a) Demuestra que los puntos R, T, D son colineales.

(b) Demuestra que I es el incentro del triángulo $\triangle ABC$.

Demostración. Sea D' el punto medio del arco $\widehat{BA}$, y observemos que el punto D está sobre el eje radical de C_1 y C_2. Entonces bastará con demostrar que D' tiene la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 y así de esta manera coincidirá con D. Por el resultado del problema 3.3.3 tenemos que R, T y D' son colineales, asímismo, S, U y D' son colineales. Observemos que $\measuredangle RTA = \frac{\widehat{AR}+\widehat{BD'}}{2} = \frac{\widehat{AR}+\widehat{D'A}}{2} = \measuredangle RSD'$, se sigue entonces que el cuadrilátero $RTUS$ es cíclico. Por potencia del punto D' con respecto a la circunferencia circunscrita a $RTUS$ obtenemos que $D'T \cdot D'R = D'U \cdot D'S$. Esto a su vez implica que D' tiene la misma potencia con respecto a C_1 y C_2, por lo que concluimos que $D' = D$.



Ahora, para el inciso (b) recordemos que para que I sea el incentro del triángulo $\triangle ABC$ es suficiente que se cumpla que $DI = DB = DA$. Notemos que $\measuredangle BSD = \measuredangle ABD = \alpha$, ya que intersecan arcos de la misma longitud. Tenemos entonces que los triángulos $\triangle DSB$ y $\triangle DBU$ son semejantes. De aquí se obtiene que $DU \cdot DS = DB^2$, que es precisamente la potencia de D con respecto a C_2. Recordemos además que la potencia de D con respecto a C_2 es también DI^2, por lo tanto, $DB = DI$. $\square$

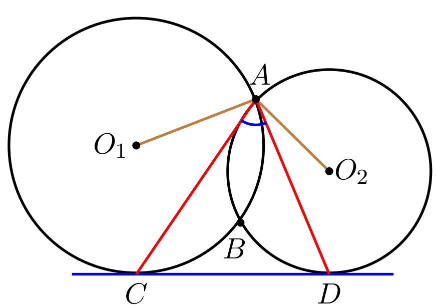


4.3.1. Problemas

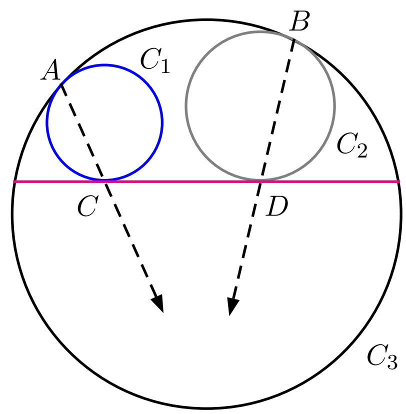
Problema 4.30 *Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\measuredangle BAC = 90°$.*

Problema 4.31 *Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersecan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que*

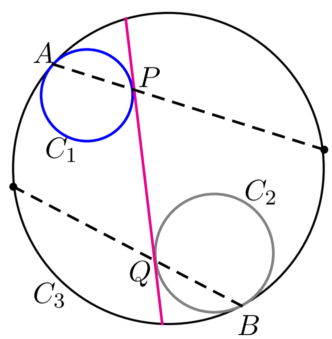
$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle O_1AO_2.$$



Problema 4.32 *Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiormente a C_3 en los puntos A y B, respectivamente. Se traza una tangente exterior común a C_1 y C_2 la cual toca a las circunferencias en los puntos C y D, respectivamente. Demuestra que las rectas AC y BD se intersecan en un punto sobre la circunferencia C_3.*



Problema 4.33 *Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiormente a la circunferencia C_3 en los puntos A y B, como se ve en la figura. La tangente interior común a C_1 y C_2 toca a estas circunferencias en P y Q, respectivamente. Demuestra que las rectas AP y BQ intersecan a la circunferencia C_3 en puntos diametralmente opuestos.*



Problema 4.34 *Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 están dentro de la circunferencia Γ, y son tangentes a Γ en puntos distintos M y N, respectivamente. La circunferencia Γ_1 pasa por el centro de la circunferencia Γ_2. La recta que pasa por los*

dos puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2 corta a Γ en los puntos A y B. Las rectas MA y MB cortan a Γ_1 en los puntos C y D, respectivamente. Demuestra que CD es tangente a Γ_2.

Problema 4.35 *Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en M y N. Sea l la tangente común a Γ_1 y Γ_2 tal que M está más cerca de l que N. La recta l es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a l que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se intersecan en E; las rectas AN y CD se intersecan en P; las rectas BN y CD se intersecan en Q. Demuestra que $EP = EQ$.*

Problema 4.36 *Sean S_1 y S_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2, respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2 más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2; C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM que pasa por B. Demuestra que M, D y C están alineados.*

Problema 4.37 Teorema de Thébault. *Sean AD y BC dos cuerdas de una circunferencia Γ las cuales se intersecan en un punto K. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que son tangentes a Γ por el interior y a los pares de segmentos AK, BK y AK, CK, respectivamente. Sean I, I_1, I_2 los centros de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$, de Γ_1 y Γ_2. Demuestra que I_1, I e I_2 son colineales.*

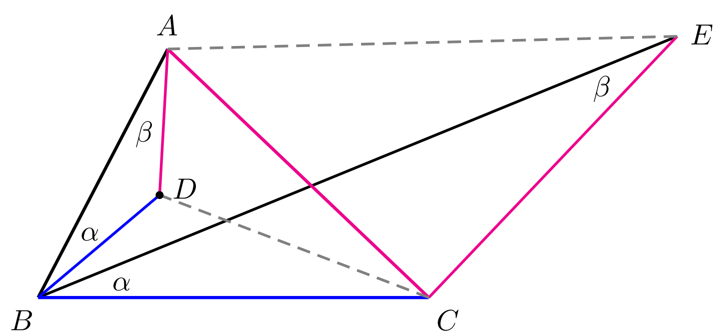
4.4. Construir un ángulo

Al igual que se hizo con segmentos, en ocasiones conviene construir un ángulo el cual es mencionado en el problema. En el siguiente ejemplo queda clara esta idea:

Ejemplo 4.4.1 *Se escoge un punto D en el interior de un triángulo escaleno $\triangle ABC$ de tal manera que el ángulo $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90^\circ$ y $AC \cdot BD =$*

$AD \cdot BC$. Encuentra
$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

Demostración. Se traza el segmento CE de la misma longitud que AC y de tal manera que CE es perpendicular a AC (aquí hemos formado el ángulo $\measuredangle ACB + 90°$). Tenemos que $\measuredangle BCE = \measuredangle BDA$, además $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{EC}$ lo cual implica que $\triangle ABD \sim \triangle EBC$. Por otro lado, como $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$ y $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}$ tenemos que
$$\triangle ABE \sim \triangle DBC \Longrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}.$$
Esto a la vez implica que
$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}AC}{CD} \Longrightarrow \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}. \ \square$$



Ejemplo 4.4.2 *En un triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $\measuredangle BCA$ es obtuso y $\measuredangle BAC = 2 \cdot \measuredangle ABC$. La línea a través de B y perpendicular a BC interseca a la línea AC en D. Sea M el punto medio de AB. Entonces $\measuredangle AMC = \measuredangle BMD$.*

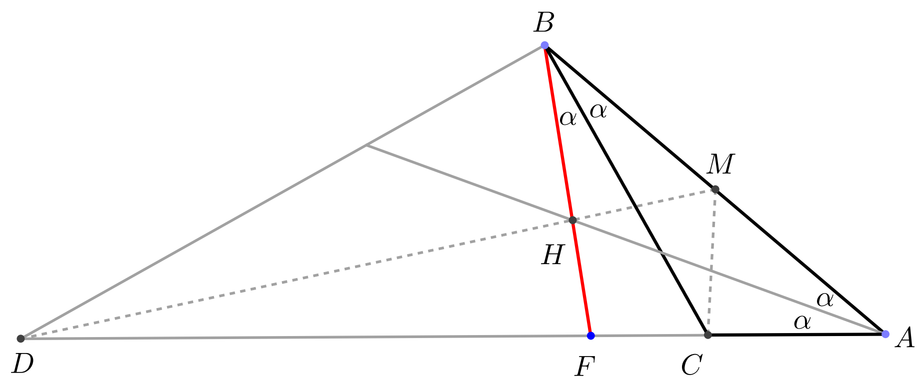
Demostración. Sea $\alpha = \measuredangle ABC$. Construiremos el ángulo $2 \cdot \measuredangle ABC$, para esto, consideremos el punto F sobre la línea CD de manera que $\measuredangle CBF = \alpha$. sea H el punto donde la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ interseca al segmento BF. Dado que $\measuredangle DBC = 90°$ tenemos que BD es bisectriz exterior del ángulo $\measuredangle DBF$, entonces se cumple que $\frac{FD}{DA} = \frac{BF}{BA}$. Por otro lado, por el Teorema de la bisectriz en el triángulo $\triangle ABF$ con la bisectriz AH tenemos que $\frac{BH}{HF} = \frac{AB}{AF}$. De todo esto se sigue que

$$\frac{BH}{HF} \cdot \frac{FD}{DA} \cdot \frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AF} \cdot \frac{BF}{AB},$$

además, como $BF = AF$ tenemos que

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} = 1.$$

Entonces, por el Teorema de Menelao, tenemos que D, H y M son colineales. Se sigue que $\measuredangle HMB = \measuredangle DMB = \measuredangle CMA$. $\square$



4.4.1. Problemas

Problema 4.38 *Encuentra el valor del lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.*

Problema 4.39 *Sea AD la mediana del triángulo $\triangle ABC$. Sabemos que $\measuredangle DAC + \measuredangle ABC = 90°$. Halla el $\measuredangle BAC$ si se sabe que $AB \neq AC$.*

Problema 4.40 *Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Se sabe que $\measuredangle BAM = \frac{1}{2}\measuredangle MAC$. Se extiende AM a través de M hasta un punto D de tal manera que $\measuredangle ABD = 90°$. Demuestra que*

$$AC = \frac{1}{2}AD.$$

Problema 4.41 *En el triángulo $\triangle ABC$, $AB = AC$ y $\measuredangle BAC = 80°$. En el interior del triángulo se toma el punto M de tal manera que $\measuredangle MBC = 30°$ y $\measuredangle MCB = 10°$. Halla el ángulo $\measuredangle AMC$.*

Problema 4.42 *Sean P y Q puntos en el interior de un triángulo $\triangle ABC$ tales que $\measuredangle PAB = \measuredangle QAC$ y $\measuredangle PBA = \measuredangle QBC$. Encuentra*

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC}.$$

Problema 4.43 *Sea P un punto interior al triángulo $\triangle ABC$ tal que $\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$. Sean D y E los incentros de los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle APC$, respectivamente. Demuestra que AP, BD y CE son concurrentes.*

Problema 4.44 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea AP la bisectriz de $\measuredangle BAC$ con P sobre BC, y sea BQ la bisectriz de $\measuredangle ABC$ con Q sobre CA. Se sabe que $BAC = 60°$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$?*

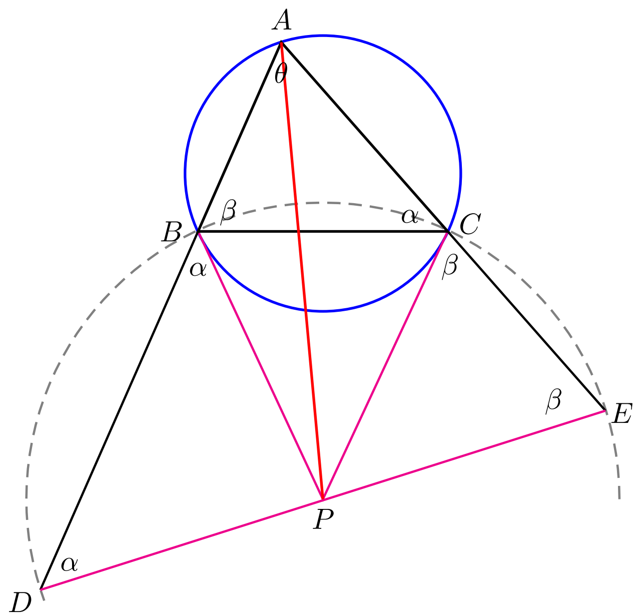
4.5. Circunferencias auxiliares

En algunos problemas, trazar la circunferencia que pasa por algunos de los puntos puede ser útil, ya que de este modo aparecen más puntos sobre esa circunferencia los cuales nos dan información útil para descubrir una solución.

Ejemplo 4.5.1 *Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos B y C se intersecan en un punto P. Entonces tenemos que AP es la simediana del lado BC.*

Demostración. Tracemos la circunferencia con centro en P y radio BP y consideremos los puntos D y E donde ésta interseca a las líneas AB y AC. Sean $\measuredangle BAC = \theta$, $\measuredangle ABC = \beta$ y $\measuredangle ACB = \alpha$, entonces tenemos que $\measuredangle BPD = 180° - 2\alpha$, $\measuredangle BPC = 180° - 2\theta$ y $\measuredangle CPE = 180° - 2\beta$. Se sigue que $\measuredangle BPD +$

$\measuredangle BPC + \measuredangle CPE = 540^\circ - 2(\alpha + \theta + \beta) = 180^\circ$, es decir, los puntos D, P y E son colineales. Ahora, como $\measuredangle BDE = \measuredangle ACB = \alpha$, tenemos que $BDEC$ es un cuadrilátero cíclico. Dado que $DP = PE$, tenemos que AP es la mediana del triángulo $\triangle ADE$ y como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, pero tienen diferente orientación, tenemos que AP es la simediana del triángulo $\triangle ABC$ trazada hacia el lado BC. □



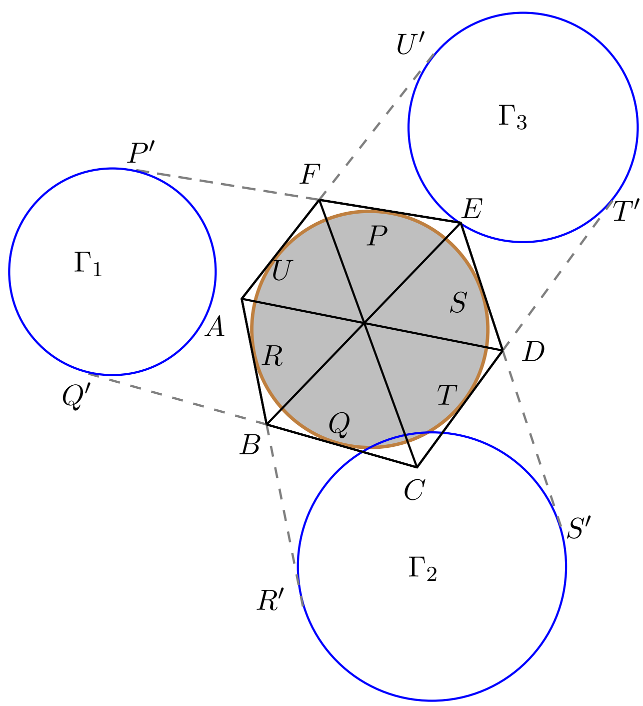
Aunque la siguiente demostración ya fue analizada previamente, la incluimos en esta sección ya que es un ejemplo muy representativo de cómo trazando circunferencias auxiliares se pueden desarrollar demostraciones elegantes.

Ejemplo 4.5.2 *(Teorema de Brianchon). Si un hexágono convexo posee una circunferencia inscrita, entonces las diagonales principales son concurrentes.*

Demostración. Sea $ABCDEF$ el hexágono dado y sean R, Q, T, S, P y U, los puntos en los cuales la circunferencia toca a los lados AB, BC, CD, DE, EF y FA, respectivamente. Prolongamos los segmentos EF, CB, AB, ED, CD y AF (como se muestra en la figura siguiente) hasta los puntos P', Q', R', S', T' y U', de manera que

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'.$$

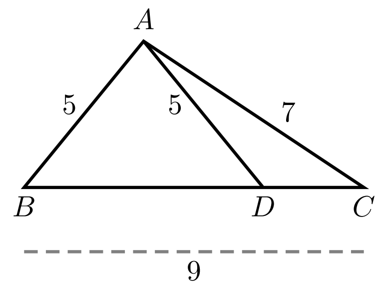
Sea Γ_1 la circunferencia tangente a las líneas PP' y QQ' en los puntos P' y Q', sea Γ_2 la circunferencia tangente a RR' y SS' en los puntos R' y S' y sea Γ_3 la circunferencia tangente a TT' y UU' en los puntos T' y U'. Como $AR = AU$ y $RR' = UU'$, tenemos que $AR' = AU'$; además, como $DT = DS$ y $TT' = SS'$ tenemos que $DT' = DS'$. De lo anterior se sigue que A y D están sobre el eje radical de Γ_2 y Γ_3, es decir, la línea AD es el eje radical de Γ_2 y Γ_3. Análogamente, se demuestra que la línea BE es el eje radical de Γ_1 y Γ_2, y que la línea CF es el eje radical de Γ_1 y Γ_3. Como los ejes radicales de tres circunferencias son concurrentes, tenemos entonces que las líneas AD, BE y CF concurren. □



Problema 4.45 Teorema de Haruki. *Sean AB y CD dos cuerdas sobre una circunferencia las cuales no se intersecan y sea P un punto variable sobre el arco $\widehat{AB}$, el cual no contiene los puntos C y D. Sean E y F las intersecciones de las cuerdas PC, AB, y PD, AB, respectivamente. Entonces el valor de $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ no depende de la posición del punto P.*

Problema 4.46 *En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$.*

Encuentra $\frac{BD}{DC}$.



Problema 4.47 *Sea M el punto medio del arco $\widehat{BC}$, el cual contiene al vértice A, de la circunferencia circunscrita a un triángulo $\triangle ABC$. Supongamos $AB > AC$ y sea D la proyección de M sobre AB. Demuestra que $BM = MA + AC$.*

Problema 4.48 *Demuestra que si la altura y la mediana, trazadas desde uno de los vértices de un triángulo escaleno, se encuentran dentro del triángulo y forman con sus lados laterales ángulos iguales, dicho triángulo es rectángulo.*

Problema 4.49 *Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ de manera que AD bisecta el ángulo $\measuredangle BAC$. Demuestra que*

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC.$$

Problema 4.50 *La bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo $\triangle ABC$ interseca al lado BC en L y al circuncírculo en N. Sean K y M las proyecciones de L sobre los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que $|ABC| = |AKNM|$.*

Problema 4.51 *Sea $\mathcal{P} = P_1, P_2, ..., P_{1997}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo P_1 el centro del círculo. Para cada $k = 1, ..., 1997$ sea x_k la distancia de P_k al punto de P más próximo a P_k y distinto de P_k. Demostrar que*

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{1997})^2 \leq 9.$$

Capítulo 5

Sugerencias para los problemas propuestos

En este capítulo encontrarás sugerencias que pueden ser útiles en la demostración y/o solución de algunos de los problemas. Siéntete libre de enviar tus críticas, comentarios, sugerencias, etc... En fin, todo aquéllo que pueda ayudar a mejorar la claridad de exposición y comprensión del contenido del libro. Todo comentario será bienvenido y considerado con mucho agradecimiento de mi parte. Mis correos electrónicos son los siguientes:

jeronimo@cimat.mx y jesusjero@hotmail.com

Sugerencias para los problemas del Capítulo 1.

Problema 1.2 Prolonga BP hasta intersectar al segmento AC y considera los triángulos que se forman.

Problema 1.4 Sea M el punto medio del lado CD. Observa que el triángulo $\triangle AMD$ es equilátero.

Problema 1.5 Considera primero el caso de un cuadrilátero. Divídelo en triángulos trazando las diagonales desde uno de los vértices. Aplica lo mismo para el caso general.

Problema 1.6 Si una de las líneas corta a la circunferencia en los puntos A, B y la otra en los puntos C, D, traza una de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y usa la igualdad de ángulos alternos internos, que en este caso son inscritos.

Problema 1.7 Si ℓ es la línea tangente a la circunferencia en el punto A y el ángulo semi-inscrito se forma con ℓ y la secante AB, traza la cuerda CB paralela a ℓ y utiliza el resultado del problema anterior.

Problema 1.8 Sean A, B, C, D los puntos de división de la circunferencia considerados en el orden de las manecillas del reloj y sean M, N, P, Q los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$, respectivamente. Demuestre que MP es perpendicular a NQ.

Problema 1.9 Traza la cuerda AB y observa los ángulos semi-inscritos que se forman.

Problema 1.10 Traza la recta tangente común de las circunferencias y considera el punto donde ésta intersecta al segmento BC.

Problema 1.12 Traza un diámetro el cual pase por uno de los vértices del lado en cuestión y traza el segmento que une el otro vértice del lado con el otro extremo del diámetro trazado.

Problema 1.13 Observa que CD es tangente al círculo con centro en B y radio BC, utiliza el ángulo semi-inscrito que se forma.

Problema 1.14 Observa que la medida del ángulo $\measuredangle ACB$ no depende de la elección del punto C. Después prueba que la medida del arco $\widehat{ED}$ es constante.

Problema 1.15 Observa que los triángulos $\triangle AO_1C$ y $\triangle AO_2D$ son isósceles y que O_1C y O_2C son perpendiculares a CD.

Problema 1.16 Traza la cuerda BE. Observa que el triángulo $\triangle BEC$ es rectángulo y utiliza los ángulos semi-inscritos.

Problema 1.17 Traza la línea ℓ tangente a la circunferencia en el punto M, prolonga el segmento RQ hasta que intersecte a ℓ en un punto T. Después utiliza las igualdades entre ángulos inscritos y semi-inscritos.

Problema 1.18 Completa el paralelogramo $ABCD$ con los vértices considerados en ese orden, y prolonga los segmentos b, c y d, hasta que intersecten al lado AD del paralelogramo.

Problema 1.19 Sean P y Q los puntos donde LC y AM intersectan a BD. Traza una recta paralela a LC a través del punto B y utiliza el Teorema de Tales para probar que $BP = PQ$. De manera análoga prueba que $DQ = QP$.

Problema 1.20 Sea T un punto tal que $ABTD$ es un paralelogramo y sean P y Q los puntos medios de los lados BT y DT. Prueba que PM debe ser paralelo a TC, lo cual es una contradicción.

Problema 1.21 Traza líneas paralelas a BQ a través de M y a través del punto medio del segmento AP. Considera los puntos donde estas paralelas intersectan a AC.

Problema 1.22 Por B y N traza paralelas a AD.

Problema 1.24 Utiliza el resultado del problema anterior.

Problema 1.25 Observa que el cuadrilátero formado por los puntos medios de las diagonales y por los dos puntos medios de los lados es un paralelogramo.

Problema 1.26 Utiliza la semejanza de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$.

Problema 1.27 Observa las igualdades de ángulos entre los ángulos semi-inscritos y los ángulos inscritos que se forman. De ahí se obtiene la semejanza de los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle ADB$.

Problema 1.28 Prolonga el segmento AD, más allá del punto D, hasta un punto X de manera que se cumpla que $AX = 2 \cdot AD$. Después, demuestre que los triángulos $\triangle ACX$ y $\triangle APM$ son congruentes.

Problema 1.29 Utiliza las semejanzas de los triángulos $\triangle AHE \sim \triangle EBC$ y $\triangle FGC \sim FBA$.

Problema 1.30 Considera los segmentos que unen los puntos medios de las bases del trapecio con el punto de intersección de las diagonales. Después, usa semejanza para ver que estos segmentos forman ángulos iguales con respecto a alguna de las diagonales.

Problema 1.31 Traza por D el segmento DE' paralelo a BC con E' en el lado AC. Sea N el punto medio de DE'. Por el problema anterior tenemos que M, N y el punto de intersección de CD con BE', son colineales. También se puede ver que A es colineal con M y N. De aquí es fácil deducir que $E' = E$.

Problema 1.35 Prolonga los segmentos AD y BC hasta que se intersecten para formar un triángulo rectángulo.

Problema 1.37 Considera dos lados adyacentes del paralelogramo y los centros de los cuadrados contruídos sobre ellos. Con estos dos centros y el vértice en común de estos dos lados, se obtienen los vértices de un triángulo. Considera los otros tres triángulos formados así de esta manera. Prueba que esos triángulos son congruentes. Observa los ángulos que forman entre sí sus lados respectivos.

Problema 1.38 Sea P el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero. De la semejanza $\triangle APD \sim \triangle KPB$ se obtiene la relación $\frac{AP}{PK} = \frac{PD}{PB}$. De manera análoga se obtiene $\frac{BP}{PM} = \frac{PC}{AP}$. Al multiplicar estas dos igualdades se obtiene la conclusión del problema.

Problema 1.39 Sea N el punto medio del segmento AM. Prueba que el triángulo $\triangle BNP$ es semejante al triángulo $\triangle BAM$ y al triángulo $\triangle BMH$. Utiliza además que NP es paralelo a AH.

Problema 1.40 Demuestra que los triángulos $\triangle B_2A_1C$ y $\triangle A_2B_1C$ son congruentes y observa que sus lados respectivos forman ángulo de $90°$ entre sí.

Problema 1.41 Prueba que los triángulos $\triangle MBE$ y $\triangle NFC$ son semejantes. Los lados correspondientes son paralelos.

Problema 1.42 Sean P y Q los puntos de intersección de los pares de líneas NE,AB y BC, ME. Por el Teorema de Tales tenemos que $\frac{PN}{PE} = \frac{NB}{BM}$ y $\frac{QE}{MQ} = \frac{NB}{BM}$. De esto se obtiene que $PN \cdot MQ = PE \cdot QE$. De manera anaáloga se obtiene que $PA \cdot QC = PB \cdot BQ$. Ahora utiliza que $BPEQ$ es un paralelogramo. De aquí se puede concluir fácilmente que los triángulos $\triangle NPA$ y $\triangle CQM$ son semejantes.

Problema 1.43 Sean M sobre BC de manera que $BM = \frac{1}{2}MC$ y sea N el punto sobre Γ el cual es colineal con A y M. Sea P el punto medio del lado BC. Demuestra que los triángulos $\triangle ABM$ y $\triangle NPM$ son semejantes. Utiliza el criterio de semejanza $\ell\ell a$ para triángulos no acutángulos.

Problema 1.44 Demuestra que los triángulos $\triangle RBT$ e $\triangle IBS$ son semejantes. Para hacer esto utiliza que $BM \cdot BK = BT \cdot BI$.

Problema 1.45 Sean A, B y C los vértices del triángulo. Si el ángulo $\measuredangle ACB \neq 90°$ entonces considera el punto A' tal que $\measuredangle A'CB = 90°$. Luego demuestra que $A' = A$.

Problema 1.47 Traza la altura desde A sobre el lado BC y aprovecha todos los triángulos rectángulos que se forman.

Problema 1.48 Observa que el punto de tangencia de las circunferencias y los dos centros, son colineales.

Problema 1.49 Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la longitud de AB es 2. Deespués calcula las longitudes de los segmentos BT y TA. Verifica que los segmentos BT, TA y AB cumplen el Teorema de Pitágoras.

Problema 1.51 Por C traza la línea paralela a AB y sea T el punto donde ésta corta a la circunferencia. Después observa que el triángulo $\triangle TBD$ es rectángulo y que $TB = AC$.

Problema 1.52 Sea T un punto sobre la línea CD de manera que $AT \parallel BD$. Observa que $ABDT$ es un paralelogramo.

Problema 1.53 Utiliza el Lema 1.5.1.

Problema 1.56 Sean X y Y los puntos donde los rayos PA y PB intersectan la línea DC, y sea T sobre DC tal que $BT \parallel PX$. Observa que $BC^2 = TC \cdot CY = XD \cdot CY$. Después utiliza la semejanza de $\triangle PAB$ con $\triangle PXY$.

Problema 1.57 Utiliza el Teorema de Carnot.

Problema 1.58 Utiliza el Teorema de Carnot.

Problema 1.59 Sea I el incentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que $IN^2 - IM^2 = KN^2 - KM^2$.

Problema 1.60 Sean O y r el centro y radio de la circunferencia dada. Observa que $MO^2 - MA^2 = r^2$.

Problema 1.62 Prueba que los triángulos $\triangle RQP$ y $\triangle SQP$ son semejantes.

Problema 1.63 Observa la igualdad de los ángulos $\measuredangle AQR = \measuredangle RPQ$.

Problema 1.64 Observa que $\triangle MCB \sim \triangle DAB$.

Problema 1.65 Utiliza las igualdades de ángulos en los cuadriláteros cíclicos $ABCE$ y $BADF$.

Problema 1.66 Sea T el punto donde se intersectan las circunferencias circunscritas de los triángulos $\triangle APN$ y $\triangle BMP$. Demuestra que los puntos C, N, M y T, son concíclicos.

Problema 1.67 Recuerda que la línea que une los centros de dos circunferencias que se cortan en dos puntos, es ortogonal a la cuerda común de éstas.

Problema 1.68 Utiliza el Teorema de Miquel dos veces, para dos ternas de triángulos.

Problema 1.69 Sea X el punto de Miquel del triángulo $\triangle ABC$ con respecto a los puntos M, N y P. Demuestra que los puntos A', B', C', T' y X son concíclicos. Conviene demostrar esto para dos cuartetas de puntos, en cada una de las cuales esté incluido el punto X.

Problema 1.71 Traslada el triángulo $\triangle APD$ de manera que el vértice A se vaya al vértice B y el vértice D se vaya al vértice C. Tenemos que el punto P se traslada en el punto P'. Aprovecha que el cuadrilátero $BPCP'$ es cíclico.

Problema 1.72 Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado y sea T el punto donde se intersectan sus diagonales. Consideremos el par de cuadrados opuestos $ADMN$ y $BXYC$, y sean O_1 y O_2 sus centros. Observa que los cuadriláteros $ATDO_1$ y BO_2CT son cíclicos.

Problema 1.73 Observa que el cuadrilátero $MKDC$ es cíclico, de lo cual se sigue que $\measuredangle KDM = \measuredangle KCM$.

Problema 1.75 Observa que el cuadrilátero $PBQR$ es cíclico y que $\measuredangle QPR = 45°$.

Problema 1.76 Sea P el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y sea M el punto donde la perpendicular a AD desde P intersecta al lado BC. Prueba que $\measuredangle MPB = \measuredangle MBP$. Después, utiliza el hecho que dice: el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

Problema 1.77 Sea $ABCD$ el cuadrilátero, sean M y N los puntos medios de AB y DC, respectivamente, y sea T el punto de intersección de las diagonales. Usando el resultado del Problema 1.75, demuestra que $MTNO$ es un paralelogramo.

Problema 1.79 Sea O el centro de la circunferencia. Observa que los puntos P, A, C, O y B son concíclicos. Demuestra que $\measuredangle BCO = \measuredangle OBA$.

Problema 1.80 Sea M la intersección de OC y AE, y sea N la intersección de DE y BC. Demuestra que $CMNE$ es un cuadrilátero cíclico, de donde se obtiene que $MN \parallel AB$.

Problema 1.81 Sea M la intersección de BE y CD, y sea O el centro de la circunferencia. Demuestra que $PAMB$ es un cuadrilátero cíclico y con esto se obtiene que P, A, M, O y B son concíclicos.

Problema 1.82 La demostración es idéntica a la demostración del Teorema de la Línea de Simson. Puedes ver esta demostración en el Capítulo 4.

Problema 1.83 Demuestra que $\triangle IDJ$ es semejante al triángulo $\triangle BAC$. Con esto, después demuestra que $AMJD$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 1.84 Este problema está resuelto en el Ejemplo 4.2.1.

Problema 1.85 Recuerda que $ACMD$ es un cuadrilátero cíclico, de aquí se obtiene que $\measuredangle ABD = \measuredangle ACM$. Luego demuestra que $AKBN$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 1.86 Observa que $PJCQ$ es cíclico ya que $\measuredangle PQJ = \measuredangle PCJ = \measuredangle ABP$. Entonces $PJ \parallel AC$ si y sólo si $PJCQ$ es un trapecio isósceles.

Problema 1.87

Problema 1.88 Utiliza que $LB = LC = LI$ y el Teorema de Ptolomeo.

Problema 1.90 Demuestra y utiliza la semejanza de los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle ADC$.

Problema 1.92 Aplica el Teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero $ACDE$.

Problema 1.93 Sean $\measuredangle ACB = \alpha$ y $\measuredangle ACD = \beta$. Utiliza que $\frac{x}{y} = \frac{AD}{AC}$ y $\frac{x}{z} = \frac{AB}{AC}$.

Problema 1.94 Utiliza el resultado del Ejemplo 1.7.2 y el comentario que se menciona después de su demostración.

Problema 1.95 Consideremos dos circunferencias Γ_A y Γ_B de centros O_A y O_B y radios r_a y r_B, tangentes interiormente a una circunferencia dada Γ, de radio r, en los puntos A y B, respectivamente. Una línea tangente exterior común a Γ_A y Γ_B hace contacto con éstas en los puntos S y T, respectivamente. Los rayos $\overrightarrow{AS}$ y $\overrightarrow{BT}$ se intersectan sobre un punto M en Γ (ver Ejemplo 4.3.3 (a) o el Problema 4.29), de manera que la línea tangente a Γ por M es paralela a ST. Observa que los triángulos $\triangle MST$ y $\triangle MBA$ son semejantes, de ahí se obtiene que

$$\left(\frac{BA}{ST}\right)^2 = \frac{MB \cdot MA}{MS \cdot MT} = \frac{OA}{OO_A} \cdot \frac{OB}{OO_B},$$

es decir,

$$AB = \frac{r}{\sqrt{(r - r_A)(r - r_B)}} \cdot ST.$$

De aquí la demostración de la primera parte del Teorema de Casey se obtiene fácilmente aplicando el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABCD$, donde A, B, C y D son los puntos de contacto de las circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ con Γ.

Problema 1.97 Sean A, B, C, D los vértices del cuadrado nombrados en el sentido de las manecillas del reloj y sea M el punto de tangencia mostrado en la figura del problema. Prolonga el segmento AD hasta que intersecte de nuevo a la circunferencia en el punto T. Usa la potencia de A con respecto a la cirunferencia y el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle DTC$.

Problema 1.98 Traza la circunferencia con centro en A y radio AB. Utiliza la potencia desde C.

Problema 1.102 Sean C_1 y C_2 las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BDC$. Calcula la potencia de A con respecto a C_2 y la potencia de C con respecto a C_1. Utiliza también el Teorema de la Bisectriz.

Problema 1.103 Observa que la línea DD_1 pasa por P, es decir, P es el centro radical de las tres circunferencias.

Problema 1.104 Sea T el punto donde se intersectan la línea AC y la línea KN. Es fácil ver que T es el centro radical de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BKN$, $\triangle ABC$, y a la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ACNK$. Por el Teorema de Miquel tenemos que $TMNC$ es un cuadrilátero cíclico. Utiliza la potencia desde B y T con respecto a algunas de las circunferencias.

Problema 1.105 Primero demuestra que DE es tangente al círculo. Después, usa el mismo razonamiento que en el Ejemplo 1.8.1.

Problema 1.107 Como el cuadrilátero $DECF$ es cíclico, tenemos que $HE \cdot HF = HG^2$.

Problema 1.108 Sea Ω la circunferencia que pasa por P y es tangente a DC en M. Como M es punto medio de DC, calculando a potencia desde D y C con respecto a Ω, tenemos que $DQ \cdot DP = CR \cdot CP$, de donde se obtiene que $\frac{DQ}{CR} = \frac{CP}{DP}$. Ahora calcula $\frac{SB}{TA}$ usando que $ST \parallel AB$.

Problema 1.110 Sean S y T los puntos de tangencia de la circunferencia con el arco $\widehat{BD}$ y la cuerda CD, respectivamente. Demuestra que A, T y S son colineales. Usa que $\measuredangle ASD = \measuredangle ADT$.

Problema 1.111 Sea X el punto donde la línea tangente al circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$, a través de A, corta a la línea BC. Como $\measuredangle XAN = \measuredangle AMN = 90°$, tenemos que $XM \cdot XN = XB \cdot XC$.

Problema 1.112 Se resuelve de manera similar al Ejemplo 1.8.3.

Problema 1.113 Observa que $d^2 - R^2$ es la potencia de P con respecto al circuncírculo del trińgulo $\triangle ABC$. Prolonga BP hasta intersectar de nuevo al circuncírculo en un punto T. Nota que $BP \cdot PT = R^2 - d^2$. Usa Ley de Senos para relacionar el área $\triangle DEF$ con los lados de $\triangle PTC$.

Problema 1.114 Demuestra que el cuadrilátero $BNMC$ es cíclico. Usa esto para probar que el cuadrilátero $ANMD$ también es cíclico.Después, usa que los tres ejes radicales de tres circunferencias, tomadas por pares, concurren en un punto.

Problema 1.115 Sea Z el segundo punto de intersección entre ω_1 y ω_2. Observen que los puntos B, C M y N están en una misma circunferencia a la cual llamaremos ω_3. Noten que A es el centro radical de ω_1, ω_2 y ω_3. Con esto podrán demostrar que X, H, Z, y Y son colineales.

Problema 1.117 Dibuja el paralelogramo $PQRS$. Observa que $a + c$ es equivalente a la mitad del área del paralelogramo más la cuarta parte del área de $ABCD$.

Problema 1.118 Su solución es análoga a la del Ejemplo 1.9.4.

Problema 1.119 Sea I el incentro del triángulo. Divide al triángulo en los tres triángulos $\triangle BIC$, $\triangle AIB$ y $\triangle AIC$, cada uno de los cuales tiene altura r.

Problema 1.120 Su demostración es similar a la del Teorema de Brahmagupta (Ejemplo 1.9.3).

Problema 1.121 Divide al triángulo es tres triángulos mediante los segmentos que unen al punto dado con los vértices del triángulo equilátero.

Problema 1.122 Observa que

$$\frac{|DBCG|}{|FBCE|} = \frac{BD + CG}{FB + CE},$$

después, considera los puntos X y Y sobre los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de manera que $BX = CG$ y $CY = FB$. Demuestra que XY es paralelo a DE.

Problema 1.123 Calcula el área del triángulo de varias maneras, utilizando la fórmula *base por altura sobre 2* y con la demostrada en el Problema 1.119.

Problema 1.124 Sea P el punto donde LB intersecta a AC y sea Q el punto donde AN intersecta a BC. Usando semejanza de triángulos, demuestra que

$$\frac{CP}{AC} + \frac{CQ}{BC} = 1.$$

Después utiliza el Teorema de los Tapetes.

Problema 1.126 La línea BM intersecta a HG en un punto X y la línea AL intersecta a HE en un punto Y. Se cumple que $|HCBX| = |BCFG|$, $|HCAY| = |ACDE|$ y $|XBAY| = |ABML|$. De aquí el problema se deduce fácilmente.

Problema 1.128 Aplica el Teorema de los Tapetes.

Problema 1.129 Demuestra que $|ADE| + |ABF| = |AFCE|$. Después usa el Teorema de los Tapetes.

Problema 1.130 Sea $ABCDEF = \mathcal{H}$. Observa que existe un cuadrilátero de área máxima inscrito en $\mathcal{H}$ cuyos vértices son vértices de $\mathcal{H}$, supongamos que éste es $BCEF$. Considera un punto T en el interior del paralelogramo de manera que AT es paralela a BC y de la misma longitud que BC. Usa las áreas de los paralelogramos obtenidos.

Sugerencias para los problemas del Capítulo 2.

Problema 2.1 Sean A, B, C, los vértices del triángulo y sea M el punto medio de BC. Para cualquier punto X en la recta AM, observa que los triángulos $\triangle XBM$ y $\triangle XCM$ tienen la misma altura desde X y las bases BM y CM son de la misma longitud, por lo que poseen áreas iguales. Aplica esta propiedad para demostrar que si G es el gravicentro, entonces los triángulos $\triangle AGB$ y $\triangle AGC$ tienen la misma área. Juega con las áreas de los seis triángulos en cuestión para obtener el resultado deseado.

Problema 2.2 Considera la siguiente figura, donde $\triangle ABC$ es un triángulo, M, N, P los puntos medios de sus lados, G es el gravicentro y R es el punto tal que el cuadrilátero $MBNR$ es un paralelogramo. Prueba que también los cuadriláteros $NRCM$ y $ARCP$ son paralelogramos. Concluye que el triángulo $\triangle AMR$ es un triángulo cuyos lados tienen la misma longitud que las medianas del triángulo. Finalmente, demuestre que el área de $\triangle AMR$ es igual a $3/4$ del área de $\triangle ABC$.

Problema 2.3 Sea Mel punto medio de BC, y sea D el punto tal que M es punto medio de AD. Demuestra que el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo. Aplica la Ley del Paralelogramo (ver Teorema 1.5.2) y utiliza las igualdades $AB = CD$, $AC = BD$, $AM = AD/2$ para concluir el resultado.

Problema 2.4 Es inmediato utilizando el resultado del Problema 2.3. Otra manera, también basante rápida de resolverlo, es la siguiente: Suponga que las medianas desde B y C son iguales, y sean G el gravicentro y M el punto medio de BC. Como el gravicentro divide a las medianas en razón $2 : 1$, y $m_B = m_C$, se sigue que $BG = CG$. Concluye que la mediana AM es mediatriz de BC.

Problema 2.5 Sea M el punto medio de AB, y sea W el pie de la perpendicular de M sobre XY. Observa que MW es la recta media del trapecio $ABYX$, por lo que su longitud es el promedio de AX y BY. Utiliza la semejanza de los triángulos $\triangle CGZ$ y $\triangle MGW$ para concluir.

Problema 2.6 Sean $ABCD$ el cuadrilátero, M el punto medio de CD, G y H los gravicentros de $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, respectivamente. Sea también P la intersección de las medianas AH y BG. Prueba que GH y AB son paralelas.

Problema 2.7 Aplica la desigualdad del triángulo para demostrar que $AB + BD > AD$. Repite el uso de la desigualdad del triángulo para probar que $3/2s > m$. Para probar la otra desigualdad, considera el gravicentro G del triángulo $\triangle ABC$. Por la desigualdad del triángulo, $AG + GB > AB$. Repite el uso de la desigualdad del triángulo y utiliza el hecho de que el gravicentro divide a cada mediana en razón $2 : 1$ para concluir.

Problema 2.8 Utiliza el resultado del Problema 2.3 y concluye con el Teorema de Pitágoras.

Problema 2.9 Sean M el punto medio de C_1C_2 y sea C' tal que M es punto medio de $C'C$. Prueba que el triángulo $\triangle CC'C_1$ es congruente al triángulo $\triangle ABC$. Muestra que los lados correspondientes de dichos triángulos son perpendiculares entre sí.

Problema 2.10 Considera el triángulo equilátero $\triangle A_2BC$, con A_2 distinto de A_1. Muestra que $AC_1A_2B_1$ es un paralelogramo y que el punto medio M de BC también es punto medio de A_1A_2. Demuestra además, que si P es el punto medio de A_1C_1, entonces $MP = 1/2AC$. Repite lo anterior para demostrar que si O es el punto medio de AB, entonces $PO = 1/2AC$, y por lo tanto, $\triangle MPO$ es equilátero. Concluye que BB_1 y NP son paralelas y que $BB_1 = 2NP$.

Problema 2.11 Sea D el punto medio de BC. Utiliza el resultado del Problema 2.3 para obtener que $MD^2 = (2MB^2 + 2MC^2 - BC^2)/4$. Después, utiliza el Teorema de Stewart (ver Problema 1.44) para probar que $MG^2 = MA^2/3 + 2MD^2/3 - 2AD^2/9$. Vuelve a utilizar el resultado del Problema 2.3 para expresar AD^2 por medio de los lados del triángulo $\triangle ABC$. Repite lo anterior para los puntos medios los lados CA y AB.

Problema 2.12 Considera el punto medio de BC y pruebe que pertenece al eje radical de las dos circunferencias iniciales. Concluye que el cuadrilátero $MNAB$ es cíclico. Si P y Q son las intersecciones de la recta MN con los circuncírculos de $\triangle BEN$ y $\triangle AEM$, respectivamente, prueba que PB es paralela a AC y que QA es paralela a BC. Finalmente, usa que MC es paralela a PB para probar que los circuncírculos de $\triangle MNC$ y $\triangle PNB$ son tangentes.

Problema 2.13 Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con hipotenusa BC. Sea D el pie de la altura desde A y M el punto medio de BC. ¿Cuál es la relación entre los ángulos $\measuredangle BAD$, $\measuredangle CAM$ y $\measuredangle ACB$?

Problema 2.14 Sean $\measuredangle CBA = \beta$ y $\measuredangle BCA = \theta$. Expresa los ángulos $\measuredangle IBC$, $\measuredangle ICB$ en función de β y θ, y compruebe que su suma, más $90^\circ + \alpha/2$, es igual a 180°.

Problema 2.15 Sean P, Q, R, S los puntos donde la circunferencia es tangente a AB, BC, CD, DA, respectivamente. Nota que $\measuredangle AOB = \measuredangle AOP + \measuredangle POB$ y exprésalo en términos de los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 2.16 Sea M el punto medio de BC y sea I la intersección del segmento AM con la circunferencia. Utiliza el Teorema del ángulo semi-inscrito para probar que $\measuredangle IBC = \measuredangle ICA$ y que $\measuredangle ICB = \measuredangle IBA$. Concluye con el hecho de que AM es mediatriz de BC y que I pertenece a AM.

Problema 2.17 Utiliza el hecho de que D, M y L pertenecen a una recta paralela a BC para demostrar que los triángulos $\triangle MBD$ y $\triangle LCD$ son isósceles.

Problema 2.18 Utilizando repetidamente que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180°$, demuestra que el problema es equivalente a demostrar que $\measuredangle EBC + \measuredangle ECB + \measuredangle DBC + \measuredangle DCB = 2\measuredangle FBC + 2\measuredangle FCB$. Para probar esta última igualdad, verifica por separado que $\measuredangle EBC + \measuredangle DBC = 2\measuredangle FBC$ y que $\measuredangle ECB + \measuredangle DCB = 2\measuredangle FCB$.

Problema 2.19 Sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo en los lados CA, CB y AB, respectivamente. Sea I el incentro. Muestra que $AXIY$ es un cuadrado, en el cual dos de sus lados son iguales a r, y los otros dos lados son iguales a $(a + b - c)/2$.

Problema 2.20 Demuestra el siguiente resultado: P es el punto de tangencia del incírculo de $\triangle XYZ$ en el lado YZ si y sólo si $YP - PZ = YX - XZ$. Posteriormente, aplica dicho resultado repetidamente en los triángulos $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ y $\triangle ABC$.

Problema 2.21 Demuestra el siguiente resultado: P es el punto de tangencia del incírculo de $\triangle XYZ$ con el lado YZ si y sólo si $YP - PZ = YX - XZ$. Posteriormente, aplique dicho resultado repetidamente en los triángulos $\triangle BAM$ y $\triangle BCM$.

Problema 2.23 Calcula el área de $\triangle ABC$ de dos maneras distintas:

$$|ABC| = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,(2\alpha)}{2}$$

y como

$$|CBD| + |CDA| = \frac{a \cdot l \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{b \cdot l \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}.$$

Problema 2.24 Utiliza el hecho de que $ABLC$ es un cuadrilátero cíclico para probar que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ALC$ son semejantes.

Problema 2.25 Utiliza el resultado del Ejemplo 2.2.2 y que el gravicentro divide a las medianas en razón $2:1$.

Problema 2.26 Demuestra que existe un punto F sobre BC tal que $BD = BFyAE = AF$. Demuestra después que los triángulos $\triangle BDI$ y $\triangle BFI$ son congruentes, al igual que $\triangle AEI$ y $\triangle AFI$. Concluye que los ángulos $\measuredangle DIB$, $\measuredangle FIB$ y $\measuredangle FIA$ son iguales a $60°$. Usa esto para concluir que $\measuredangle BCA = 60°$.

Problema 2.27 Por el resultado del Problema 2.14 tenemos que $\measuredangle BIC = 120°$, de aquí se sigue que el cuadrilátero $AC'IB'$ es cíclico. Después usa que a ángulos inscritos iguales les corresponden cuerdas iguales.

Problema 2.28 Sea P la proyección a alguna de las bisectrices del ángulo $\measuredangle B$. Sea X la intersección de AP con BC. Demuestra que $\triangle ABX$ es isósceles y que P es punto medio de AX.

Problema 2.29 Este problema está demostrado en el Ejemplo 4.2.1.

Problema 2.30 Sean I el incentro y O el circuncentro de $\triangle ABC$. Considera los excírculos relativos a los vértices A y C del triángulo $\triangle ABC$, y sean P y Q los puntos de tangencia en los lados BC y AB, respectivamente. Sea R la reflexión de I respecto de O. Prueba que RP es perpendicular a BC y RQ es perpendicular a AB. Después prueba que $MNQP$ es un trapecio isósceles. Concluye que los cuadriláteros $BPRQ$ y $MNQP$ son cíclicos y que BR es perpendicular a MN. Prueba también que KI es paralela a BR.

Problema 2.31 Por construcción, EF es mediatriz de AO. Por ello, y por ser O el centro de Γ, prueba que A es el punto medio del arco EF. Siguiendo el Ejemplo 2.2.4, basta probar que $AJ = AF$. Pruebe que $AF = AO$, y que los triángulos $\triangle AOD$ y $\triangle OAJ$ son congruentes.

Problema 2.32

Problema 2.33

Problema 2.34

Problema 2.35 Sea $\triangle ABC$ un triángulo de ortocentro H, sea L el pie de la altura sobre BC y sea D la reflexión de H con respecto a BC. Demuestra que $\measuredangle LHC = \measuredangle ABC$. Después, demuestra que los triángulos $\triangle LDC$ y $\triangle LHC$ son congruentes.

Problema 2.36 Sea P la reflexión de H con respecto a BC. Por el Problema 2.35, P pertenece al circuncírculo de $\triangle ABC$. Calcula de dos formas diferentes la potencia de D con respecto al circuncírculo de $\triangle ABC$.

Problema 2.37 Sea $\triangle ABC$ el triángulo, H su ortocentro y E, F los pies de las alturas desde B, C, respectivamente. Calcula de dos maneras diferentes la potencia de H con respecto a la circunferencia de diámetro BC. Repite lo anterior con la circunferencia de diámetro AC.

Problema 2.38 Prueba que $\measuredangle BAC + \measuredangle BHC = 180°$. Utiliza la Ley de Senos y concluye que los circuncírculos de $\triangle BAC$ y $\triangle BHC$ tienen el mismo radio. Repite lo anterior para los circuncírculos restantes.

Problema 2.39 Sean D, E, F los pies de las alturas desde A, B, C y sea H el otrocentro del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que los cuadriláteros $HDBF$ y $HDCE$ son cíclicos, y que $\measuredangle HBA = \measuredangle HCA = 90° - \measuredangle BAC$.

Problema 2.40 Observa que los triángulos $\triangle ABK$, $\triangle ABH$ y $\triangle ABC$ tienen la base AB en común. A partir de ello, muestra que la igualdad a demostrar es equivalente a $KF^2 = CF \cdot HF$, donde F es el pie de la altura desde A. Utiliza el resultado del Problema 2.36 y la semejanza entre los triángulos $\triangle KAF$ y $\triangle BKF$.

Problema 2.42

Problema 2.43

Problema 2.44

Problema 2.45

Problema 2.46

Problema 2.47

Problema 3.10 Sea T el punto donde se intersectan las líneas BQ y CN. Aplica el Teorema de Menelao dos veces en el triángulo $\triangle TBC$, con los puntos N, P, R y Q, M, S. Para simplificar, usa que la potencia desde B y C es igual.

Problema 3.25 Sea D el punto medio del lado BC. Demuestra que $DMPN$ es un rombo.

Bibliografía

[1] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. (2002). *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM.

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega (2002). *Geometría, ejercicios y problemas*, Instituto de Matemáticas de la UNAM

[3] H.S.M.Coxeter (1988). *Introducción a la geometría*, LIMUSA.

[4] H.S.M. Coxeter, Samuel L. Greitzer (1994). *Retorno a la geometría*, Euler Col. La tortuga de Aquiles.

[5] H. Eves (1985). *Estudio de las geometrías*, UTEHA.

[6] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos, Geometría*, MIR-Moscú.

[7] R. Honsberger (1995). *Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry*, The Mathematical Association of America.

[8] A. Illanes Mejía (2001). *Principios de Olimpiada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM.

[9] I. Martin Isaacs (2002). *Geometría universitaria*, Thomson Learning.

[10] Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind (1988). *Challenging problems in geometry*, Dover.

[11] I. Shariguin (1989). *Problemas de geometría, Planimetría*, Colección Ciencia Popular, MIR-Moscú.

[12] Levi S. Shively (1984). *Introducción a la geometría moderna*, CECSA.

Índice