Geometría

Porfirio Toledo Hernández

Mayo 2003

Contenido

Capítulo 1

Ángulos

Dadas dos rectas en el plano éstas coinciden o son distintas. En este último caso se cortarán en un único punto o no se cortan.

Cuando varias rectas pasan a través de un mismo punto decimos que ellas son **concurrentes**.

1.1 Rectas que se Cortan Entre Sí

Definición 1.1.1 *Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. La **bisectriz** de un ángulo es la semirecta que tiene como origen el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.*

Definición 1.1.2 *Dos ángulos son **complementarios**, y cada uno es el complemento del otro, cuando su suma es un ángulo recto.*

*Dos ángulos son **suplementarios**, y cada uno es el suplemento del otro, cuando su suma es dos ángulos rectos.*

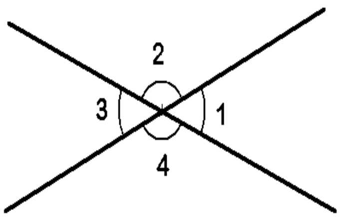
Un ángulo recto es aquel que mide $90°$.

Cuando una recta encuentra a otra formando con ella ángulos adyacentes iguales, estos ángulos serán rectos.

Supongamos que tenemos dos rectas que se cortan entre sí, el punto de intersección será un vértice común a cuatro ángulos. Para tal caso tenemos la siguiente clasificación para los ángulos en cuanto a la posición que ocupan con respecto al punto de intersección de las rectas.

En el plano, dos puntos distintos determinan una única recta; la que pasa por ellos. Mientras que dos rectas distintas, no paralelas, determinan a un único punto; el punto que pertenece a ambas.

Decimos que dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un mismo vértice y un lado común y son exteriores el uno al otro.



ANGULOS	
Opuestos por el Vértice	Adyacentes
1,3 2,4	1,2 2,3 3,4 4,1

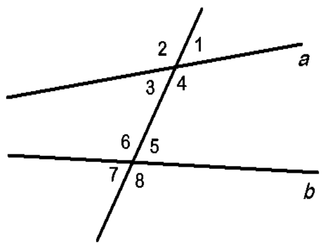
Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son las prolongaciones de los del otro.

En todo sistema de dos rectas distintas que se cortan, tenemos que

1. los ángulos adyacentes son suplementarios,
2. los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

1.2 Rectas Cortadas por una Secante

Consideremos un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal. En este caso tenemos, para cada intersección, un sistema de dos rectas que se cortan entre sí, obteniendo de esta manera varios ángulos opuestos por el vértice y adyacentes, correspondientes a cada intersección. Pero también podemos clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan con respecto a los sistemas adyacentes.

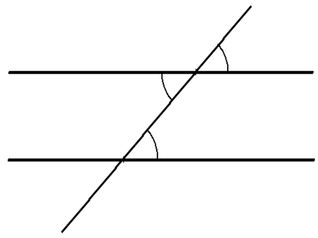


CLASIFICACION			
correspondientes	alternos	colaterales	
1,5 2,6 3,7 4,8	3,5 4,6	3,6 4,5	internos
	1,7 2,8	1,8 2,7	externos

Teorema 1.2.1 *(**Teorema Directo**) En todo sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante, se tiene que*

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan y además se encuentran en el mismo plano.

1. *los ángulos correspondientes son iguales,*
2. *los ángulos alternos son iguales,*
3. *los ángulos colaterales son suplementarios.*



Debemos sobreentender que al decir ángulos iguales nos referimos a que son iguales entre sí; y de manera análoga para los ángulos suplementarios.

Teorema 1.2.2 *(**Teorema Inverso**) En un sistema de dos rectas cortadas por una secante, basta que haya*

1. *un par de ángulos correspondientes iguales, o bien,*
2. *algún par de ángulos alternos iguales, o bien,*
3. *algún par de ángulos colaterales suplementarios,*

para que esas dos rectas sean paralelas.

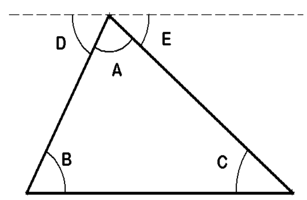
Por lo tanto, cualquiera de las tres alternativas mencionadas en el teorema (1.2.2) (Teorema Inverso), implica los incisos 1, 2 y 3 del teorema (1.2.1) (Teorema Directo).

Este par de teoremas aunque aparentemente inofensivo resultará muy importante pues se aplica en muchos resultados, como veremos a continuación.

Llamaremos **triángulo** al espacio limitado por tres rectas que se cortan.

Teorema 1.2.3 *La suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a $180°$.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Tracemos una recta paralela al segmento BC que pase por A.



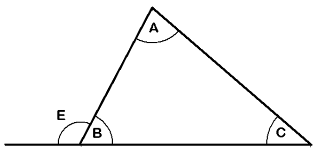
Sabemos que $\measuredangle D + \measuredangle A + \measuredangle E = 180°$. Por lo tanto tenemos $\measuredangle D = \measuredangle B$ por ser ángulos alternos internos, y por la misma razón $\measuredangle E = \measuredangle C$.

Sustituyendo los valores de $\measuredangle D$ y $\measuredangle E$ en la primera igualdad, obtenemos el resultado. ■

Definición 1.2.1 *Un **ángulo exterior** de un triángulo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.*

Corolario 1.2.4 *En todo triángulo cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir los que le son opuestos.*

Demostración. Consideremos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$.

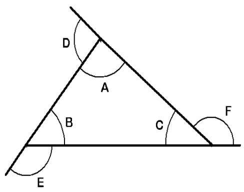


Por el teorema (1.2.3), $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$; y como $\measuredangle E + \measuredangle B = 180°$, entonces

$$\measuredangle E = \measuredangle A + \measuredangle C. \blacksquare$$

Corolario 1.2.5 *La suma de los tres ángulos exteriores (uno en cada vértice) de cualquier triángulo, es igual a $360°$.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera.



Sean los ángulos exteriores $\measuredangle D$, $\measuredangle E$ y $\measuredangle F$. Así, por al colorario (1.2.4) anterior, tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \measuredangle D &= \measuredangle B + \measuredangle C, \\ \measuredangle E &= \measuredangle A + \measuredangle C, \\ \measuredangle F &= \measuredangle A + \measuredangle B, \end{aligned}$$

de esta manera

$$\measuredangle D + \measuredangle E + \measuredangle F = 2(\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C) = 2(180°).$$

Por lo tanto

$$\measuredangle D + \measuredangle E + \measuredangle F = 360°. \blacksquare$$

1.3 Problemas

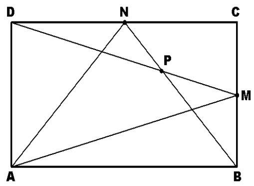
1. ¿Cuánto vale cada uno de los ángulos interiores de un heptágono regular?

2. Encontrar una fórmula para determinar el valor de cada uno de los ángulos interiores de un n-ágono regular.

3. Los puntos A, B, C, D, E, F y G son los vértices de un heptágono regular, colocados en el sentido de las manecillas del reloj, FE y BC se prolongan hasta cortarse en el punto P. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle CPE$?

4. En un rectángulo $ABCD$, M y N son los puntos medios de BC y CD, P es la intersección de DM y BN. Probar que los ángulos $\measuredangle MAN$ y $\measuredangle BPM$ son iguales.

Un **polígono regular** es aquel que tiene todos sus lados y ángulos inteiores iguales.



Capítulo 2

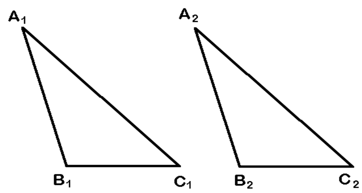
Congruencia y Semejanza

2.1 Congruencia de Triángulos

Definición 2.1.1 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son* ***congruentes*** *o* ***iguales*** *si y sólo si cumplen lo siguiente*

Emplearemos de manera indistinta los términos congruente o igual.

1. $A_1B_1 = A_2B_2$,
2. $B_1C_1 = B_2C_2$,
3. $A_1C_1 = A_2C_2$,
4. $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$,
5. $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$,
6. $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$.



Es decir, dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen sus lados congruentes y sus ángulos congruentes. Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son congruentes lo haremos de la siguiente manera: $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$.

2.1.1 Criterios de Congruencia

Para que $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las siguientes tres condiciones

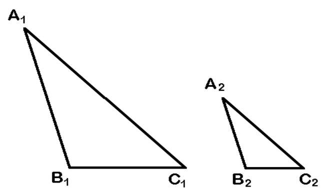
1. **L.A.L.**) Dos lados iguales e igual el ángulo comprendido
   $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ y $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$.
2. **A.L.A.**) Dos ángulos iguales e igual el lado comprendido
   $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$, $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$ y $A_1B_1 = A_2B_2$.
3. **L.L.L.**) Sus tres lados iguales
   $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ y $A_1C_1 = A_2C_2$.

2.2 Semejanza de Triángulos

Definición 2.2.1 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son* ***semejantes*** *si y sólo si cumplen lo siguiente*

1. $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$,
2. $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$,
3. $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$,
4. $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$.

En general diremos que dos polígonos, con el mismo número de lados, son **semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.



Es decir, dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados proporcionales. Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son semejantes lo haremos de la siguiente manera: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

2.2.1 Criterios de Semejanza

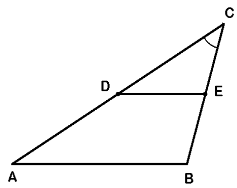
Para que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las tres condiciones siguientes

1. **L.A.L.**) Dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido
   $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$, $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$.

2. **A.A.**) Dos ángulos iguales
   $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$, $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$.
3. **L.L.L.**) Sus tres lados proporcionales
   $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$.

Proposición 2.2.1 *El segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera con D y E puntos medios de AC y BC respectivamente.



Tenemos que demostrar que $DE = \frac{1}{2}AB$.

Como $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$ y $\frac{CD}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CE}{CB}$, entonces por el criterio L.A.L. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Por lo tanto todos sus lados son proporcionales y así

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{2},$$

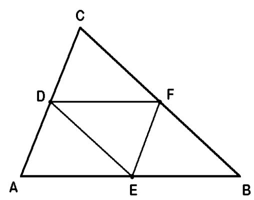
además los ángulos correspondientes son iguales, por lo que tenemos

$$\measuredangle CDE = \measuredangle CAB.$$

De donde DE y AB son paralelos. ■

Ejercicio 2.2.1 *El triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de cualquier triángulo, es siempre semejante a éste.*

Solución. Sean $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y D, E, F puntos medios de AC, AB y BC respectivamente.



Tenemos que demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Para esto, veamos que la proposición (2.2.1) nos dice que $DF = \frac{1}{2}AB$, $DE = \frac{1}{2}CB$ y $EF = \frac{1}{2}AC$.

Por lo tanto $\frac{DF}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{EF}{AC} = \frac{1}{2}$ y por el criterio de L.L.L. concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Ejercicio 2.2.2 *Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide los otros dos lados en partes proporcionales.*

Ejercicio 2.2.3 *Si una recta divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales, entonces tal recta es paralela al tercer lado.*

2.3 Teorema de Tales

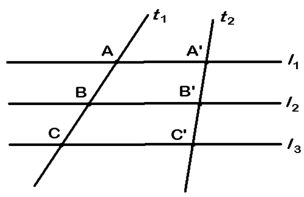
Teorema 2.3.1 *(**Teorema de Tales**) Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.*

Si consideramos las rectas l_1, l_2 y l_3 paralelas y suponemos que que las tranversales t_1 y t_2 cortan a aquellas en los puntos A, B, C y A', B', C' respectivamente, el teorema de Tales nos garantiza que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

y también que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$



2.4 Problemas

1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en donde $\measuredangle BAC = 90°$. Trazar la altura que pasa por A. Probar que la altura divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos semejantes al triángulo original.
2. Demostrar el Teorema de Pitágoras utilizando semejanza de triángulos.

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo en donde $AC = 3$ y $AB = 2$. Considerar una semirecta con origen en B que corta a AC en D, de tal forma que los ángulos $\measuredangle ABD$ y $\measuredangle ACB$ son iguales. Encontrar el valor de AD.

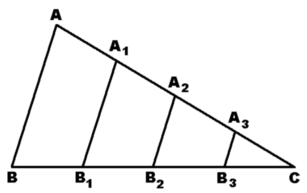
Para todo polígono dos vértices distintos son **adyacentes** si pertenecen a un mismo lado. Y por el contrario, si no pertenecen, les llamaremos **opuestos**
Al segmento que une dos vértices opuestos de un polígono lo llamaremos **diagonal**.

4. Sea $ABCD$ un cuadrado. Por el vértice A se traza una línea que intersecta a la extensión del lado BC en E, al lado DC en F y a la diagonal BD en G. Si $AG = 3$ y $GF = 1$, encontrar la longitud de FE.

5. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo en el doble del otro, demostrar que la hipotenusa es igual al doble del cateto más corto.

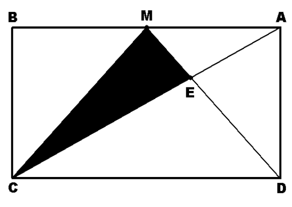
6. Considerar un triángulo isósceles $\triangle OAB$, con base AB. Denotar por H al punto medio de AB y por M y N dos puntos sobre AO y BO respectivamente, tales que $4AM \cdot BN = AB^2$. Probar que los triángulos $\triangle AHM$, $\triangle BNH$ y $\triangle HMN$ son semejantes.

7. En la figura, los segmentos AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 son paralelos. Si $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C = AB = 2$, encontrar el valor de la suma $AB + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

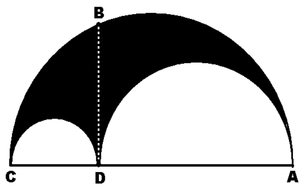


8. Considerar un triángulo $\triangle ABC$ y D el punto medio de BC. Si una línea paralela a AD corta a AB en P, a AC en Q y a la línea paralela a BC, que pasa por A, en M. Probar que M es el punto medio de PQ.

9. Si el área del rectángulo $ABCD$ es igual a 1 y M es el punto medio del lado AB, determinar el área que tiene el triángulo sombreado $\triangle MCE$.



10. Sea R el área de la región encerrada por tres semicírculos tangentes entre sí en sus extremos. Demostrar que R es igual al área del círculo que tiene como diámetro el segmento BD, perpendicular al diámetro CA en el punto de tangencia D.

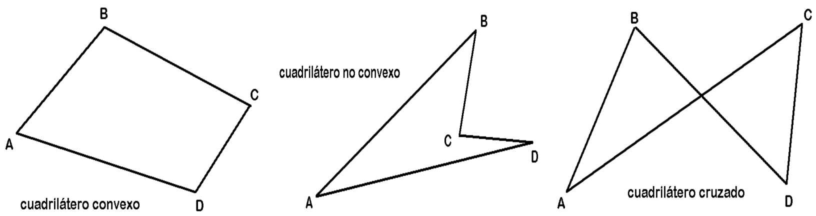


Capítulo 3

Paralelogramos

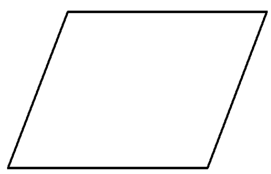
3.1 Propiedades de los paralelogramos

En el plano podemos tener distintas clases de cuadriláteros, según la posición de sus vértices y aristas, como por ejemplo los siguientes.



Algunos cuadriláteros convexos tienen propiedades muy particulares. En este capítulo estudiaremos el caso del cuadrilátero llamado paralelogramo.

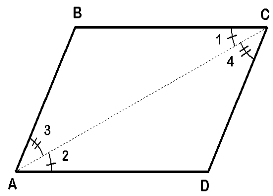
Definición 3.1.1 *Un* ***paralelogramo*** *es un cuadrilátero, necesariamente plano, en el que cada lado es paralelo a su opuesto.*



Los paralelogramos tienen varias propiedades, entre ellas las siguientes.

Teorema 3.1.1 *Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.*

Demostración. Supongamos que tenemos un paralelogramo $ABCD$ en donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivamente.

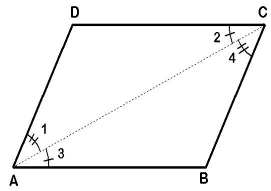


Tracemos la diagonal AC obteniendo 2 triángulos, a saber $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$. Como BC es paralelo a AD entonces $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$. Por otra parte, ya que AB y DC son paralelos, $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$. Y como además $AC = AC$ entonces por el criterio A.L.A. tenemos $\triangle ABC \simeq \triangle ACD$.

Finalmente podemos concluir que $BC = AD$ y $AB = CD$. ■

Teorema 3.1.2 *Todo paralelogramo tiene ángulos opuestos iguales.*

Demostración. Supongamos que tenemos un paralelogramo $ABCD$ en donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivamente. Tracemos el segmento AC.



Como BC es paralelo a AD entonces $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$. De manera semejante, como AB es paralelo a DC se sigue que $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$. Podemos observar entonces que

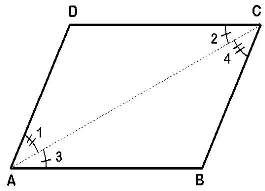
$$\measuredangle A = \measuredangle 1 + \measuredangle 3 = \measuredangle 4 + \measuredangle 2 = \measuredangle C,$$

y por lo tanto $\measuredangle A = \measuredangle C$.

De manera análoga podemos demostrar que $\measuredangle B = \measuredangle D$. ■

Teorema 3.1.3 *Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.*

Demostración. Supongamos que tenemos un paralelogramo $ABCD$ en donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivemente. Tracemos la diagonal AC.



Por hipótesis tenemos que AB es paralelo a DC, por lo que se sigue que $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$. Observemos además que $\measuredangle 3 + \measuredangle 4 + \measuredangle B = 180°$.

Por lo tanto

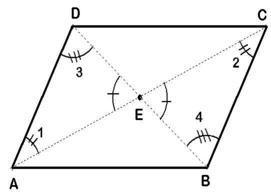
$$\measuredangle C = \measuredangle 2 + \measuredangle 4 = \measuredangle 3 + \measuredangle 4 = 180° - \measuredangle B.$$

Por consiguiente los ángulos $\measuredangle C$ y $\measuredangle B$ son suplementarios.

De manera semejante, podemos probar que $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$, $\measuredangle A$ y $\measuredangle D$, $\measuredangle D$ y $\measuredangle C$, son parejas de ángulos suplementarios entre sí. ∎

Teorema 3.1.4 *En todo paralelogramo las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales.*

Demostración. Supongamos que tenemos un paralelogramo $ABCD$ en donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivamente. Tracemos las diagonales AC y BD.

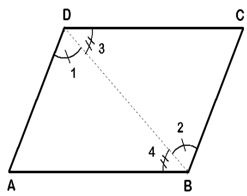


Como BC es paralelo a AD entonces $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$. Y por el teorema (3.1.1) tenemos que $AD = BC$.

Ahora, por el criterio A.L.A. tenemos que $\triangle ADE \simeq \triangle CBE$. De aquí $DE = BE$ y $AE = EC$. ∎

Teorema 3.1.5 *Si un cuadrilátero convexo tiene dos lados iguales y paralelos entonces él es un paralelogramo.*

Demostración. Supongamos que tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$, en donde AD es paralelo a BC y $AD = BC$.

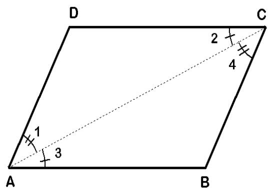


Tenemos que demostrar que DC es paralelo a AB, para esto tracemos la diagonal DB. Como BC es paralelo a AD entonces $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$. Así, como $BC = AD$, $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y $DB = DB$, por el criterio L.A.L. obtenemos $\triangle ADB \simeq \triangle CBD$. De esta manera $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$.

Y como los ángulos $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 4$ son alternos internos iguales con respecto al sistema de rectas DC y AB cortadas por la secante DB, concluimos que DC es paralelo a AB. ■

Teorema 3.1.6 *Si en un cuadrilátero convexo cada par de lados opuestos son congruentes (o iguales) entonces, él es un paralelogramo.*

Demostración. Supongamos que tenemos un cuadrilátero $ABCD$ en el cual $AD = BC$ y $DC = AB$.



Tenemos que demostrar que AD es paralelo a BC y que DC es paralelo AB. Si trazamos AC generamos el par de triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$ en donde $AD = BC$, $DC = AB$ y $AC = AC$.

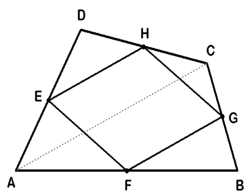
Ahora, por el criterio L.L.L. podemos ver que $\triangle ADC \simeq \triangle ABC$. Luego $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ y $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$.

Por un lado, como $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$ son ángulos alternos internos iguales con respecto al sistema AD y BC, entonces AD y BC son paralelos.

Por otro lado, como $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ son ángulos alternos internos iguales con respecto del sistema DC y AB, entonces DC es paralelo a AB. Concluimos así que $ABCD$ es un paralelogramo. ■

Ejercicio 3.1.1 *Comprobar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo cualquiera determinan un paralelogramo.*

Solución. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AD, AB, BC y CD, respectivamente.



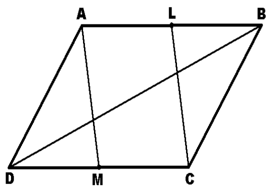
Tenemos que demostrar que $EFGH$ es un paralelogramo.
Por la proposición (2.2.1), podemos ver que

$$EH = \frac{1}{2}AC \text{ y } EH \parallel AC,$$
$$FG = \frac{1}{2}AC \text{ y } FG \parallel AC.$$

De esta manera $EH = FG$ y EH es paralelo a FG. Así, por las propiedades de vistas anteriormente, $EFGH$ es un paralelogramo.

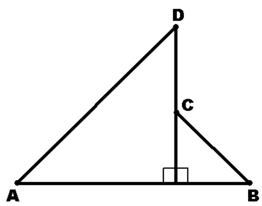
3.2 Problemas

1. Sea $ABCD$ un paralelogramo en el que L y M son los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demostrar que los segmentos LC y AM dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.



2. Dado un paralelogramo $ABCD$ y M la intersección de sus diagonales, encontrar una línea que pase por M y divida al paralelogramo en dos piezas con las que se pueda armar un rombo.

3. Dos triángulos isósceles se unen como se muestra en la siguiente figura.



Probar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$ que se forma, son los vértices de un cuadrado.

4. Considerar un pentágono convexo arbitrario, en donde los lados se numeran sucesivamente en el sentido de las manecillas del reloj. Trazar el segmento que une los puntos medios de los lados

1 y 3; luego trazar el segmento que une los puntos medios de los lados 2 y 4; y por último, trazar el segmento que une los puntos medios de eso dos segmentos trazados.

Si la longitud del lado 5 es de k unidades, encontrar la longitud del último segmento que se trazó.

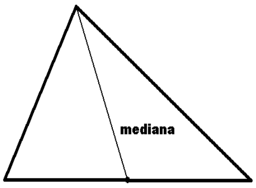
Capítulo 4

Triángulos

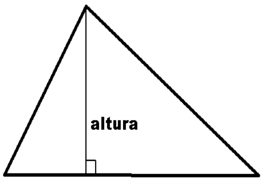
4.1 Propiedades de los Triángulos Isósceles

Para un triángulo cualquiera, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.1 *La **mediana** es el segmento de recta trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto.*

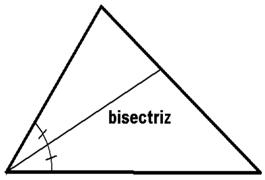


*La **altura** es el segmento de recta perpendicular a un lado o a su prolongación y va al vértice opuesto.*



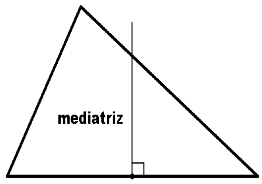
*La **bisectriz** es la recta que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales.*

La **bisectriz** de un ángulo es el conjunto de puntos en el plano comprendidos entre los lados del ángulo y que equidistan de éstos.



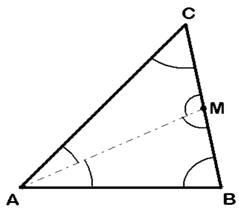
La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento.

*La **mediatriz** es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él.*



Teorema 4.1.1 *Si un triángulo tiene dos de sus lados iguales, entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a dichos lados.*

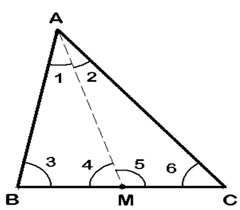
Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo que tiene dos lados iguales, $AB = AC$.



Demostraremos que $\measuredangle B = \measuredangle C$.

Sea M el punto medio del lado BC, tracemos la mediana MA. Afirmamos que $\triangle ABM \simeq \triangle ACM$. En efecto, tenemos que por hipótesis $AB = AC$ y $BM = MC$ por ser M punto medio de BC, además AM es el lado común para ambos triángulos. Por el criterio de L.L.L., $\triangle ABM \simeq \triangle ACM$ y por lo tanto tienen congruentes los ángulos. Así $\measuredangle B = \measuredangle C$. ■

Además podemos observar que, en el caso del teorema



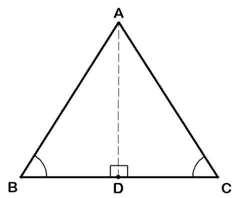
1. el segmento AM es mediana,
2. el segmento AM es mediatriz pues M es el punto medio de BC y además como $\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 180°$ y $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$ entonces $\measuredangle 4 = \measuredangle 5 = 90°$,
3. el segmento AM es la altura, puesto que vimos que $\measuredangle 4 = \measuredangle 5 = 90°$ y además AM toca al vértice A,
4. el segmento AM es la bisectriz ya que divide al ángulo $\measuredangle A$ en dos ángulos iguales, pues podemos ver que $\measuredangle A = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$ y $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

Corolario 4.1.2 *Todo triángulo equilátero tiene sus ángulos interiores iguales.*

Decimos que un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son iguales.

Ejercicio 4.1.1 *Si un triángulo tiene dos de sus ángulos iguales, entonces tiene dos de sus lados iguales, los lados opuestos a dichos ángulos.*

Solución. Consideremos el triángulo $\triangle ABC$, en donde $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$. Demostraremos que $AB = AC$. Tracemos la altura desde el vértice A y llamemos D a su pie en el segmento BC.



De esta manera $\measuredangle ADB = 90° = \measuredangle ADC$. Después, por el criterio A.A. podemos garantizar que los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle ADC$ son semejantes. Y como tales triángulos comparten el lado AD, la razón de semejanza es uno, en otras palabras, los triángulos son congruentes. Se sigue que

$$AB = AC.$$

Una consecuencia inmediata de este ejercicio es que un triángulo con todos sus ángulos interiores iguales es equilátero.

Teorema 4.1.3 *Si en un triángulo una misma recta hace a la vez dos de las funciones de*

1. *mediatriz,*
2. *bisectriz,*

3. *altura,*

4. *mediana,*

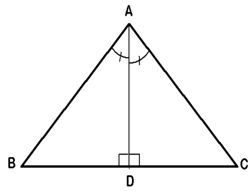
relativas a un mismo lado, entonces hace las otras dos funciones y el triángulo es isósceles siendo su base dicho lado.

Decimos que un triángulo es **isósceles** si tiene dos de sus lados iguales.

Demostración. Tenemos seis casos posibles.

Caso 1.

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ tal que la recta AD es una que tiene las funciones de mediatriz y bisectriz.



Por ser AD mediatriz, D es el punto medio de BC y AD es perpendicular a BC; además por ser AD bisectriz, $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$.

De esta manera, tenemos que

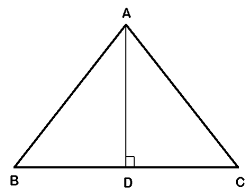
1. Como AD y BC son perpendiculares y AD toca a A, entonces AD es altura.

2. Ya que D es punto medio de BC y AD toca a A, entonces AD es mediana.

3. Por criterio L.A.L. $\triangle BDA \simeq \triangle ADC$, pues $BD = DC$, $\measuredangle BDA = \measuredangle 90° = \measuredangle ADC$ y AD es común a los dos triángulos. Por lo tanto $\measuredangle B = \measuredangle C$ y $BA = AC$. De donde tenemos que $\triangle ABC$ es isósceles.

Caso 2.

Supongamos que la recta AD es mediatriz y altura del triángulo $\triangle ABC$.



Como AD es mediatriz de $\triangle ABC$ entonces D es el punto medio de BC. Por otro lado AD es perpendicular a BC, y como además AD es altura, tal segmento toca a A.

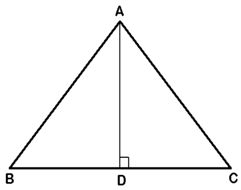
Por lo tanto

1. D es punto medio de BC y AD toca a A, de donde DA es mediana.

2. Por el criterio L.A.L., como $BD = DC$, $\measuredangle BDA = \measuredangle ADC$ y $AD = AD$, entonces $\triangle ADB \simeq \triangle ADC$. Por lo tanto $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$, de donde AD es bisectriz.

3. Como $\triangle ADB \simeq \triangle ADC$ entonces $BA = AC$ y $\measuredangle B = \measuredangle C$. Se sigue que $\triangle ABC$ es isósceles.

Caso 3.
Supongamos que AD es mediatriz y mediana del triangulo $\triangle\ ABC$.



Por un lado, como AD es mediatriz entonces D es el punto medio de BC y además AD es perpendicular a BC. Por otro lado, al ser AD mediana, tenemos de nuevo que D es el punto medio de BC, pero además sabemos que AD toca a A.

De esta manera tenemos lo siguiente

1. Como AD es perpendicular a BC y AD toca a A entonces AD es altura.

2. Por el criterio L.A.L. $\triangle ABD \simeq \triangle ADC$, lo que implica que $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$. Luego AD es bisectriz.

3. Como $\triangle ABD \simeq \triangle ADC$ entonces $\triangle ABC$ es isósceles. ■

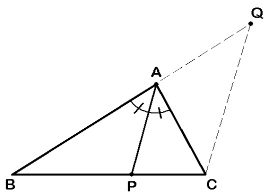
Se dejan como ejercicio las demostraciones de los otros tres casos.

4.2 Líneas en los Triángulos

Teorema 4.2.1 ***(Teorema de la Bisectriz)*** *La bisectriz de cualquier ángulo interior de un triángulo determina, en el lado opuesto, dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, si la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$, corta a BC en P, entonces debemos probar que $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Llamémosle Q a la intersección de la prolongación de BA con una paralela a AP que pase por C.



Como PA y CQ paralelas, entonces

$$\measuredangle BAP = \measuredangle AQC,$$
$$\measuredangle PAC = \measuredangle ACQ.$$

Y como además $\measuredangle BAP = \measuredangle PAC$, por ser AD bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$, entonces

$$\measuredangle ACQ = \measuredangle AQC.$$

Así, por el ejercicio (4.1.1), $AC = AQ$ y el triángulo $\triangle ACQ$ es isósceles.

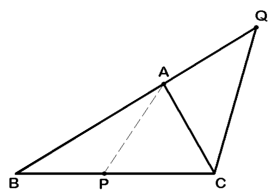
Por otro lado, utilizando el teorema de Tales, como PA es paralela a CQ, entonces

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AQ}.$$

Sustituyendo AQ por AC demostramos lo que queríamos. ■

Teorema 4.2.2 *(**Teorema Inverso de la Bisectriz**) Sea P un punto perteneciente al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Si los segmentos BC y PC son proporcionales a los lados AB y AC entonces AP biseca al ángulo $\measuredangle BAC$.*

Demostración. Sea Q el punto sobre la prolongación del lado BA tal que $AQ = AC$, como en la figura.



Por hipótesis $\frac{PC}{BP} = \frac{AQ}{BA}$, y sustituyendo CA tenemos

$$\frac{PC}{BP} = \frac{AQ}{BA}.$$

Por lo que

$$\frac{BP}{BP}+\frac{PC}{BP}=1+\frac{PC}{BP}=1+\frac{AQ}{BA}=\frac{BA}{BA}+\frac{AQ}{BA}.$$

En otras palabras

$$\frac{BC}{BP}=\frac{BQ}{BA}.$$

Así, por el criterio L.A.L., los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle QBC$ son semejantes. Se sigue que $\measuredangle BAP=\measuredangle BQC$, luego AP y QC son paralelos.

De esta forma tenemos que $\measuredangle PAC=\measuredangle ACQ$ y como $AC=AQ$ entonces, por el Teorema (4.1.1)

$$\measuredangle ACQ=\measuredangle AQC.$$

Por lo tanto

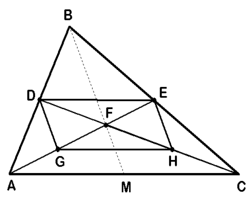
$$\measuredangle BAP=\measuredangle BQC=\measuredangle AQC=\measuredangle ACQ=\measuredangle PAC$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Teorema 4.2.3 *Las tres medianas de cualquier triángulo se intersectan en un mismo punto.*

Demostración. Demostraremos primero que dos medianas se cortan en un tercio de la longitud total de cada una.

Tomemos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y llamemos D y E a los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Tracemos las medianas AE y DC y llamemos F a la intersección entre éstas.



Ahora, tomemos G y H puntos medios de AF y FC respectivamente. Por la proposición (2.2.1), $DE=\frac{1}{2}AC$. Además DE es paralelo a AC, ya que D y E son puntos medios de AB y BC respectivamente para el triángulo $\triangle ABC$.

Y de manera semejante tenemos que $GH=\frac{1}{2}AC$ y GH es paralelo a AC, pues G y H son puntos medios de AF, FC respectivamente para el triángulo $\triangle AFC$.

Por lo tanto $GH=DE$ y GH es paralelo a DE. Y por el teorema (3.1.5) Se sigue que $DEGH$ es un paralelogramo. Así las diagonales DH y GE se cortan mutuamente en partes iguales, es decir $GF=FE$ y $DF=FH$. Y como G y H son los puntos medios de AF y FC respectivamente, entonces

$$AG = GF = FE \text{ y } CH = HF = DF.$$

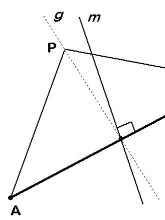
Finalmente, tomando M como punto medio de AC, la mediana BM deberá cortar en un tercio a cualquiera de las otras medianas, digamos a AE, teniendo que pasar necesariamente por F.

De esta forma podemos concluir que las tres medianas de cualquier triángulo se intersectan en un mismo punto. ■

Observemos que cualquier punto que se encuentre en la mediatriz de un segmento dado, equidista de los extremos del segmento. Para garantizar la implicación inversa demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.4 *El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos distintos pertenecientes al mismo plano, es justamente la mediatriz del segmento determinado por estos puntos.*

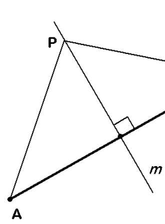
Demostración. Sean A y B dos puntos distintos en el plano, sea g el lugar geométrico $g = \{P : PA = PB\}$ y sea m la mediatriz del segmento AB.



Tenemos que demostrar que $g = m$. Para esto procederemos por casos demostrando que ambos conjuntos se contienen mutuamente, es decir, que $g \subset m$ y que $m \subset g$.

Primeramente vamos a ver que $g \subset m$. Tomemos $P \in g$, entonces por la definición de g, $AP = PB$.

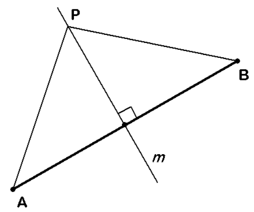
Considerando $P \in AB$ tenemos que P es punto medio de AB esto es $P \in m$. Ahora, si $P \notin AB$ entonces el triángulo $\triangle APB$ es isósceles pues $AP = PB$ y como m es mediatriz de $\triangle APB$ entonces m es mediana y pasa por P. Así $P \in m$.



Como en ambos casos, ya sea que P esté o no sobre el segmento AB, tenemos que $p \in m$. Se sigue que $g \subset m$.

Para demostrar que $m \subset g$, tomemos inicialmente $P \in m$.

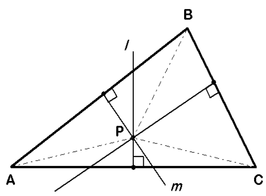
Si $P \in AB$ entonces P es punto medio de AB y de esta forma $PA = PB$. De aquí que $P \in g$. Y si por el contrario, $P \notin AB$, entonces m es mediatriz y mediana del $\triangle APB$ relativa al lado AB. Por lo tanto el triángulo $\triangle APB$ es isósceles con base AB. De esta manera $AP = PB$, es decir $P \in g$.



Así podemos concluir que siempre $P \in g$. Por lo tanto $m \subset g$. ■

Teorema 4.2.5 *Las tres mediatrices de cualquier triángulo se intersectan en un mismo punto.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Tomemos las mediatrices m y l correspondientes a los lados AB y AC respectivamente.

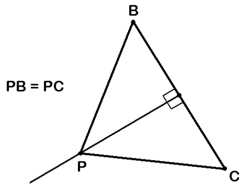


Llamémosle P al punto de intersección de m y l. Falta ver que la tercer mediatriz pasa también por P.

Como $P \in m$ entonces $PA = PB$ con m mediatriz de AB. Y también. como $P \in l$, entonces $PA = PC$ con l mediatriz de AC.

Por lo tanto $PB = PC$. Así el teorema (4.2.4) implica que por el punto P pasa la mediatriz del segmento BC. ■

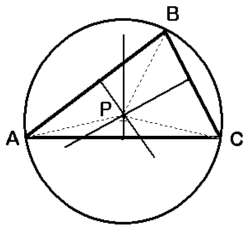
Otra manera de ver que P está en la mediatriz de BC es observando que $\triangle BPC$ es isósceles con base BC, así P debe estar en la mediatriz de la base.



Notemos que en la demostración del teorema anterior tenemos que $PB = PA = PC$, así por A, B y C pasa una única circunferencia con centro en P y radio $PA = PB = PC$. Es decir, por tres puntos que no estén situados en una misma recta pasa una única circunferencia, a dichos puntos se les llama **concíclicos**.

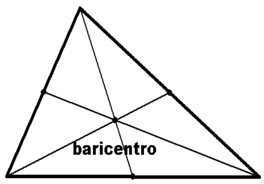
Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

En general diremos que un conjunto arbitrario de puntos es **concíclico,** si todos los puntos se encuentran en una misma circunferencia.

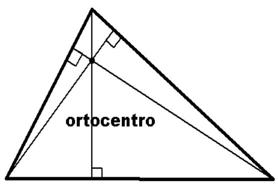


Habiendo demostrado los resultados anteriores, tiene sentido ahora establecer las siguientes definiciones.

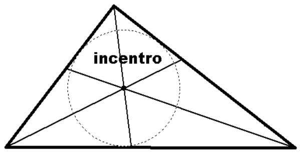
Definición 4.2.1 *Al punto de intersección de las tres medianas de un triángulo le llamaremos **baricentro**. Este punto también es llamado **gravicentro**, **centroide** y **centro de gravedad**.*



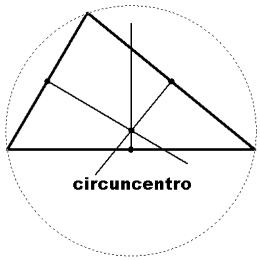
*El punto en donde concurren las tres alturas de un de un triángulo le llamaremos **ortocentro**.*



Al punto en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo le llamaremos ***incentro****, que es el centro del círculo tangente interiormente a cada uno de los lados del triángulo.*

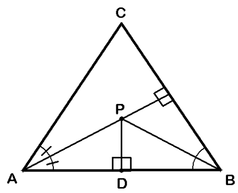


El punto en donde se intersectan las mediatrices de un triángulo le llamaremos ***circuncentro****, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.*



Teorema 4.2.6 *Si un mismo punto hace a la vez la función de circuncentro e incentro para un triángulo, éste es equilátero.*

Demostración. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ en donde P es circuncentro e incentro a la vez.



Como P es circuncentro de $\triangle ABC$, entonces $\measuredangle BDP = 90° = \measuredangle PDA$ y además $AD = DB$. Utilizando el criterio L.A.L. afirmamos que los triángulos $\triangle ADP$ y $\triangle BDP$ son congruentes. Se sigue que

$$\measuredangle PAD = \measuredangle PBD.$$

Por otro lado, ya que P es el incentro de $\triangle ABC$, AP y BP son bisectrices de $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CBA$, respectivamente. Por consiguiente

$$\measuredangle PAC = \measuredangle BAP,$$
$$\measuredangle ABP = \measuredangle PBC.$$

Luego

$$\measuredangle PAC = \measuredangle BAP = \measuredangle ABP = \measuredangle PBC.$$

Por lo tanto los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CBA$ son iguales. De manera semejante se puede demostrar que $\measuredangle ACB = \measuredangle CAB$.

Así el triángulo $\triangle ABC$ tiene sus tres ángulos interiores iguales. Y por el ejercicio (4.1.1), tiene también sus tres lados iguales. ■

4.3 Problemas

1. Si una línea desde el vértice C de un triángulo $\triangle ABC$ bisecta la mediana trazada desde A. Probar que esa línea divide el lado AB en la razón $1/2$.

2. En un rectángulo $ABCD$, el punto medio del lado CD es F y E es el punto del lado BC tal que AF es bisectriz del ángulo $\measuredangle EAD$. Demostrar que AF es perpendicular a EF.

Capítulo 5

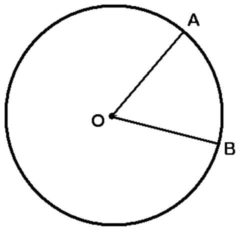
Circunferencias

5.1 Ángulos en las Circunferencias

Definición 5.1.1 *Dados dos puntos A y B en una circunferencia, el **ángulo central** $\measuredangle AOB$ es el que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia y sus lados son los segmentos OA y OB.*

El arco correspondiente es el que se encuentra entre los lados del ángulo central: $\overset{\frown}{AB} = \measuredangle AOB$

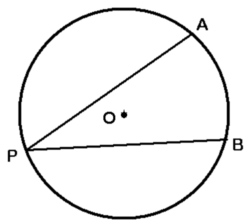
Un **ángulo central** es cualquiera formado por dos radios de la circunferencia.



Por definición, todo ángulo central mide lo mismo que al arco que abraza, sobreentendiendo por supuesto, que nos referimos a la medida angular del arco, mas no a su longitud. Es decir, el ángulo central es la medida en grados del arco que abrazan los radios que lo conforman.

Definición 5.1.2 *Dados tres puntos A, B y P en una circunferencia, el **ángulo inscrito** $\measuredangle APB$ es el ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia y sus lados PA y PB son secantes.*

Un **ángulo inscrito** es el formado por dos cuerdas que tienen un extremo en común.



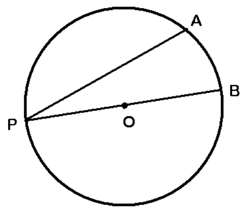
Teorema 5.1.1 *Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que abraza.*

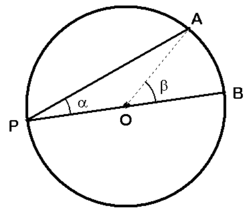
Este teorema se conoce como el **Teorema fundamental de los Ángulos Inscritos**.

Demostración. Tenemos que demostrar que $\measuredangle APB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$. Procederemos por casos.

Caso 1.

El centro de la circunferencia está en uno de los lados del ángulo.





Sea $\alpha = \measuredangle APB$, tracemos el radio OA. Así el triángulo $\triangle AOP$ es isósceles. Por lo tanto $\measuredangle OAP = \alpha$.

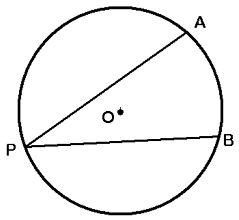
Y como β (el ángulo central $\measuredangle AOB$) es exterior del triángulo $\triangle AOP$ y no adyacente a α y $\measuredangle OAP$, entonces

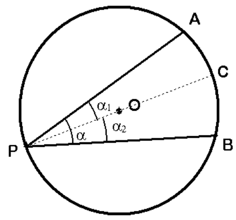
$$\beta = \alpha + \measuredangle OAP = 2\alpha.$$

Por lo tanto $\measuredangle APB = \alpha = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$.

Caso 2.

El centro de la circunferencia está entre los lados del ángulo inscrito.





El **diámetro** de una circunferencia es un segmento de recta que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia.

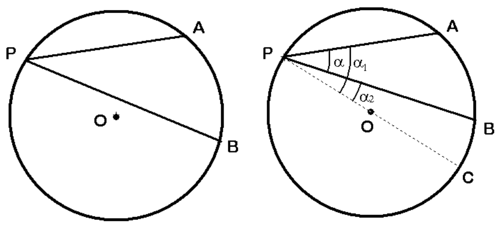
Sea $\alpha = \measuredangle APB$. Tracemos el diámetro que tiene como uno de sus extremos a P y llamémosle C al otro extremo.

Sean $\alpha_1 = \measuredangle APC$ y $\alpha_2 = \measuredangle CPB$. Tenemos que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Y por el caso 1, $\alpha_1 = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CB}$.

Por lo tanto

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\,\widehat{AC} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{CB} = \tfrac{1}{2}\left(\widehat{AC} + \widehat{CB}\right) = \tfrac{1}{2}\,\widehat{AB}.$$

Caso 3.
El centro de la circunferencia queda fuera del área que comprende el ángulo inscrito.

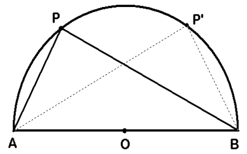


Sea $\alpha = \measuredangle APB$. Tracemos el diámetro que tiene como uno de sus extremos a P y llamémosle C al otro extremo.
Sean $\alpha_1 = \measuredangle APC$ y $\alpha_2 = \measuredangle BPC$. Así $\alpha_1 = \alpha + \alpha_2$. Y por el caso 1, $\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}\,\widehat{BC}$.
Se sigue que

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\left(\widehat{AC} - \widehat{BC}\right) = \tfrac{1}{2}\,\widehat{AB}. \blacksquare$$

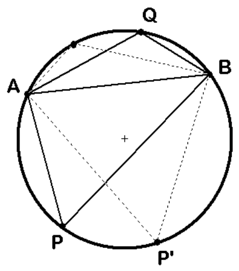
Otra manera de presentar el Teorema fundamental de los Ángulos Inscritos es: todo ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente.
Como consecuencias inmediatas tenemos los siguientes resultados.

Corolario 5.1.2 *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, subtendido por el diámetro, es recto.*



Corolario 5.1.3 *Dos ángulos inscritos en una misma circunferencia y que abracen una misma cuerda, son iguales si sus vértices están del mismo lado de la cuerda; y son suplementarios si sus vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda.*

Demostración. Sean A, B, P, P' y Q como en la figura, es decir P y P' están del mismo lado de la cuerda AB y los puntos P y Q están en lados distintos.



Por el teorema (5.1.1) sabemos que $\measuredangle APB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AQB} = \measuredangle AP'B$, así vemos que, si los vértices del ángulo están del mismo lado de la cuerda, ellos son iguales. Por otro lado tenemos que $\measuredangle AQB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{APB}$, luego

$$\measuredangle APB + \measuredangle AQB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AQB} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{APB} = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ.$$

Concluimos que si los vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda, entonces los ángulos son suplementarios. ■

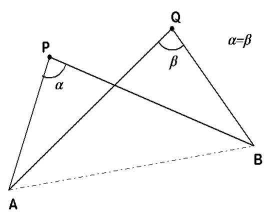
Hay que notar que este corolario lo podemos escribir de la siguiente manera: si A, B, P y Q son puntos de una circunferencia, entonces

1. $Q \in \overset{\frown}{APB} \Longrightarrow \measuredangle APB = \measuredangle AQB$,
2. $Q \notin \overset{\frown}{APB} \Longrightarrow \measuredangle APB + \measuredangle AQB = 180^\circ$.

Esto nos da una idea más clara del recíproco de tal corolario, también llamado **condición suficiente de conciclicidad de cuatro puntos.**

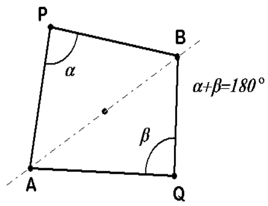
Corolario 5.1.4 *Sean A, B, P, Q cuatros puntos en el plano, cada tres de ellos no colineales. Si los puntos P y Q están en el mismo semiplano que determina la recta AB y desde ella se ve el segmento AB bajo ángulos iguales.*

Si varios puntos están situados en una misma recta, decimos que tales puntos son **colineales**, en caso contrario les llamaremos **no colineales**



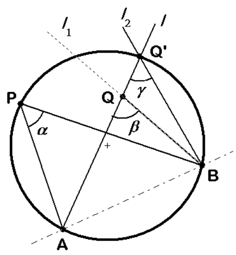
O bien, si los puntos P y Q están en distintos semiplanos que determina la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos suplementarios.

Notemos que es lo mismo decir α es el ángulo bajo el cual se ve el segmento AB desde al punto P, o que α abraza al segmento AB, o que el segmento AB subtiende al ángulo α.



Entonces los puntos A, B, P y Q son concíclicos.

Demostración.
Caso 1.
Sean A, B, P y Q puntos en el plano. Supongamos que P y Q están del mismo lado con respecto de la recta que pasa por A y B.



Tracemos la circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por los puntos A, B y P. Supongamos que Q no está sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Llamémosle l a la recta que pasa por los puntos A y Q. Sea Q' el punto de intersección de la recta l con la circunferencia $\mathcal{C}$, que no es A.

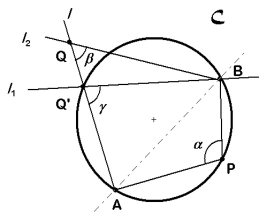
Sean l_1 y l_2 las rectas que pasan por Q' y B y por Q y B, respectivamente. Tales rectas l_1 y l_2 son distintas puesto que Q no está en $\mathcal{C}$ y por lo tanto Q y Q' son distintos.

Sean $\alpha = \measuredangle APB$, $\beta = \measuredangle AQB$ y $\gamma = \measuredangle AQ'B$. Por hipótesis $\alpha = \beta$, y por el corolario (5.1.3) $\alpha = \gamma$. Se sigue que $\alpha = \beta = \gamma$.

De esta forma tenemos un sistema de dos rectas l_1 y l_2 cortadas por la secante l con un par de ángulos correspondientes γ y β iguales. Así l_1 y l_2 son paralelas. Lo cual es una contradicción pues l_1 y l_2 son distintas y se cortan en el punto B.

Por lo tanto Q está en $\mathcal{C}$.

Caso 2.
Sean A, B, P y Q cuatros puntos en el plano. Supongamos que P y Q están en lados opuestos con respecto de la recta que pasa por A y B.



Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia determinada por los puntos A, B y P. Supongamos que Q no está en $\mathcal{C}$. Sea l la recta que pasa por los puntos A y Q, y llamémosle Q' al punto de intersección de l con $\mathcal{C}$ que no sea A. Sean l_1 y l_2 las rectas que pasan por B y Q', y por B y Q respectivamente.

Como Q no está en $\mathcal{C}$ tenemos que l_1 y l_2 son distintas.

Sean $\alpha = \measuredangle APB$, $\beta = \measuredangle AQB$ y $\gamma = \measuredangle AQ'B$. Por hipótesis sabemos que $\beta = 180° - \alpha$. Y como A, B, P y Q' están en $\mathcal{C}$ y además Q' y P están en distintos lados de la cuerda AB, entonces por el corolario (5.1.3) $\alpha + \gamma = 180°$. Por lo tanto $\gamma = 180° - \alpha$. Se sigue que $\gamma = \beta$.

Así tenemos el sistema de rectas l_1 y l_2 cortadas por la secante l, con un par de ángulos correspondientes γ y β iguales. Por lo tanto l_1 y l_2 son paralelas, lo cual es una contradicción, pues l_1 y l_2 son distintas y se cortan en el punto B.

Podemos concluir que $Q \in \mathcal{C}$. ■

En el capítulo anterior vimos que dados tres puntos no colineales, existe una única circunferencia que pasa por ellos. Pero en el caso de tener cuatro puntos no colineales no ocurre lo mismo, pues por ellos pasará una única circunferencia o ninguna.

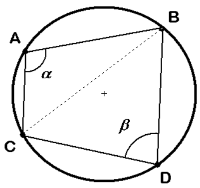
Definición 5.1.3 *Se dice que un polígono es* ***inscriptible****, si es cíclico, es decir, que todos sus vértices son concíclicos.*

Para el caso de cuadriláteros convexos tenemos propiedades que los relacionan con las circunferencias. Podríamos preguntarnos, por ejemplo, ¿cuándo los vértices de un cuadrilátero pertenécen a una misma circunferencia?, o en otras palabras ¿cuándo un cuadrilátero es cíclico?. El siguiente corolario responde esta pregunta para el caso de aquellos que son convexos.

Corolario 5.1.5 *Un cuadrilátero convexo es inscriptible si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

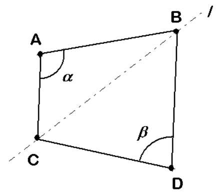
Demostración. Bastará verificar la proposición para una sola de las parejas de ángulos, en vista de que la suma de los cuatro ángulos es constante igual a $360°$.

Supongamos primero que $ABCD$ es un cuadrilatero convexo inscriptible en donde $\alpha = \measuredangle BAC$ y $\beta = \measuredangle BDC$.



Como A, B, C y D son concíclicos y A y D están en lados opuestos de la cuerda CB, por el corolario (5.1.3) $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180°$.

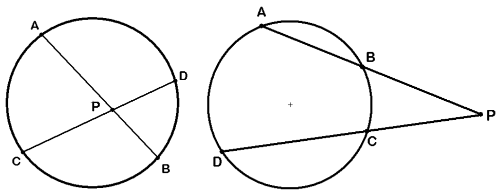
Supongamos ahora que $ABCD$ es un cuadrilátero convexo con ángulos opuestos suplementarios. Sean $\alpha = \measuredangle BAC$ y $\beta = \measuredangle BDC$. Así $\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 180°$.



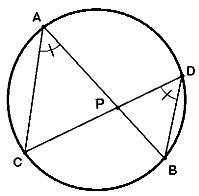
Usando la condición suficiente de conciclicidad de cuatro puntos, enunciada en el corolario (5.1.4), A, B, C y D están sobre una misma circunferencia. Se sigue que el cuadrilatero $ABCD$ es inscriptible. ■

Ejercicio 5.1.1 *Sean A, B, C y D cuatro puntos concíclicos y P el punto de intersección de las rectas AB y CD, demostrar que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

Solución. Tenemos dos casos dependiendo del orden en que se encuentren los puntos en la circunferencia. Uno de ellos es cuando el punto P es un punto interior a la circunfencia, el otro caso es cuando es exterior.



Consideremos el primer caso, en el que P está dentro de la circunferencia.



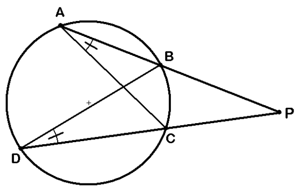
Como los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CDB$ abrazan la misma cuerda $\overset{\frown}{CB}$, ellos son iguales. Además $\measuredangle APC = \measuredangle DPB$ por ser opuestos por el vértice, así

$$\triangle APC \sim \triangle DPB.$$

Por lo tanto $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$. Luego

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Consideremos ahora el caso en que P está fuera de la circunferencia.



Como los ángulos $\measuredangle PAC$ y $\measuredangle PDB$ son iguales al abrazar al mismo arco $\overset{\frown}{BC}$, entonces

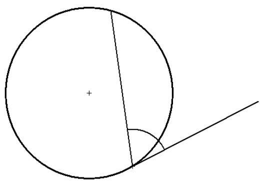
$$\triangle APC \sim \triangle DPB.$$

Por lo tanto $\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$. Podemos concluir que

$$PB \cdot PA = PC \cdot PD.$$

Este ejercicio nos muestra que, dado un punto P cualquiera y una recta que pase por el punto y corte a una circunferencia en los puntos X y Y, la cantidad $PX \cdot PY$ permanece constante, no importando cuales sean los puntos de intersección. A tal cantidad le llamaremos la **potencia** del punto P con respecto a la circunferencia dada.

Definición 5.1.4 *Un **ángulo semi-inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante.*

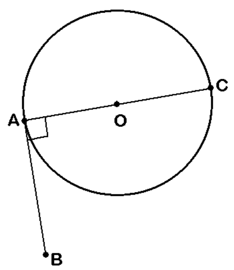


Teorema 5.1.6 *La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Demostración. La demostración se hará por casos de manera semejante a como se procedió en el teorema (5.1.1).

Caso 1.

Supongamos que el centro O de una circunferencia está sobre uno de los lados del ángulo $\measuredangle BAC$, a saber sobre la secante AC, $O \in AC$.



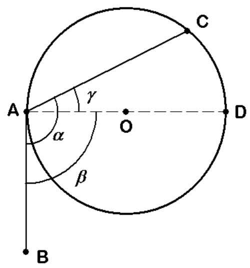
Toda recta tangente en un punto a una circunferencia es perpendicular al diámetro que tiene como uno de sus extremos al punto de tangencia

Entonces AC es el diámetro de la circunferencia y así $\measuredangle BAC = 90° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

Caso 2.

Supongamos que el centro O de una circunferencia está entre los lados del ángulo.

Tracemos el diámetro que tiene como un extremo al vértice A del ángulo semi-inscrito $\measuredangle BAC$. Sea D el otro extremo y sean $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle BAD$ y $\gamma = \measuredangle DAC$.

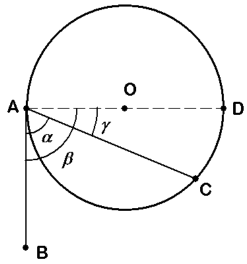


Por el caso 1, $\beta = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$. Y como γ es un ángulo inscrito que abraza al arco $\overset{\frown}{DC}$, entonces $\gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$. Así

$$\alpha = \beta + \gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ADC}\right).$$

Caso 3.

Supongamos que el centro O de una circunferencia no está entre los lados del ángulo semi-inscrito $\measuredangle BAC$. Tracemos el diámetro AD, sean $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle BAD$ y $\gamma = \measuredangle CAD$.

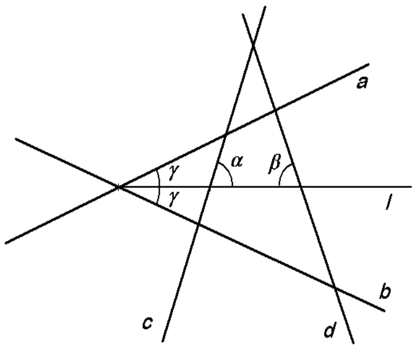


Por el caso 1, $\beta = 90° = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$. Y como γ es un ángulo inscrito que abraza a $\overset{\frown}{CD}$ entonces $\gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$. Por lo tanto

$$\alpha = \beta - \gamma = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}. \blacksquare$$

5.2 Rectas Antiparalelas

Definición 5.2.1 *Dadas dos rectas a y b no paralelas y l la bisectriz del ángulo formado por a y b. Decimos que las rectas c y d son **antiparalelas** con respecto a las rectas a y b si y sólo si $\alpha = \beta$, en donde α y β son los ángulos formados por la bisectriz l y las rectas c y d como en la figura.*

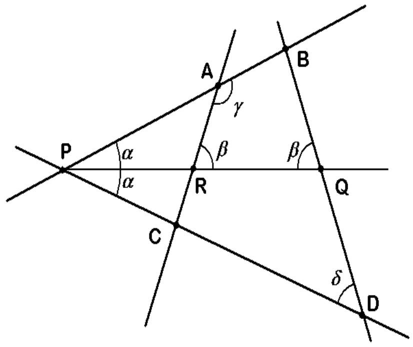


Teorema 5.2.1 *Si las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b, y si A, B, C y D son los puntos de intersección entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.*

Demostración. Tenemos dos casos

Caso 1.

Sean A, B, C, D, P, R y Q como en la figura. Hagamos $\alpha = \measuredangle APR = \measuredangle CPR$, $\beta = \measuredangle ARQ = \measuredangle BQR$, $\gamma = \measuredangle BAC$ y finalmente $\delta = \measuredangle BDC$. Para demostrar este caso, veremos que $\gamma + \delta = 180°$.



Como $\measuredangle PQD = 180°-\ \beta$ y $\alpha + \delta + \measuredangle PQD = 180°$, puesto que son los ángulos interiores del triángulo $\triangle PQD$, entonces

$$\delta = 180° - \alpha - \measuredangle PQD = \beta - \alpha.$$

Consideremos ahora el triángulo $\triangle PAR$. Como $\measuredangle PRA = 180°-\beta$ y $\alpha + \measuredangle PRA + \measuredangle PAR = 180°$ por ser los ángulos interiores de tal triángulo, tenemos

$$\measuredangle PAR = 180° - \alpha - \measuredangle PRA = \beta - \alpha.$$

Y como $\gamma = 180° - \measuredangle PAR = 180° - \beta + \alpha$, entonces

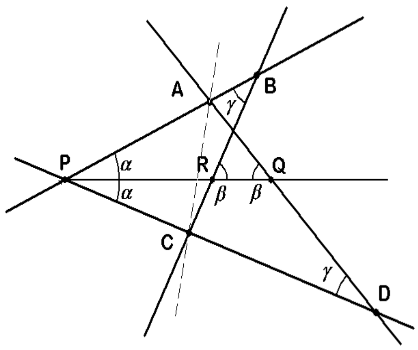
$$\gamma + \delta = (180° - \beta + \alpha) + (\beta - \alpha) = 180°.$$

Así γ y δ son suplementarios. Además $\gamma + \delta + \measuredangle ACD + \measuredangle ABD = 360°$, por lo que $\measuredangle ACD + \measuredangle ABD = 180°$. De esta forma obtenemos un cuadrilátero convexo con ángulos opuestos suplementarios; y por el corolario (5.1.5), $ABCD$ es inscriptible.

Caso 2.

Sean A, B, C, D, P, R y Q como en la figura, y $\alpha = \measuredangle APR = \measuredangle CPR$, $\beta = \measuredangle AQR = \measuredangle BRQ$, $\gamma = \measuredangle ADC$ y $\delta = \measuredangle ABC$.

Para este caso tracemos la recta que pasa por el segmento AC para que los puntos D y B queden en el mismo semiplano determinado por la recta AC. Demostraremos que $\delta = \gamma$.



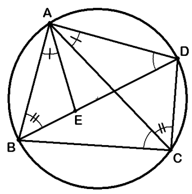
Los ángulos interiores del triángulo $\triangle PQD$ suman $180°$, por lo tanto $\beta = \alpha + \gamma$. Y por otro lado, considerando el triángulo$\triangle PRB$, podemos ver que $\beta = \alpha + \delta$.

Lo anterior implica que $\gamma = \beta - \alpha = \delta$. Así vemos el segmento de recta AC, desde los puntos B y D, bajo ángulos iguales. Y por la condición suficiente de conciclicidad de cuatro puntos, corolario (5.1.4), tenemos que el cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible. ■

5.3 Teorema de Ptolomeo

Teorema 5.3.1 *(**Teorema de Ptolomeo**) En todo cuadrilátero cíclico no cruzado, la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.*

Demostración. Sea $ABCD$ cualquier cuadrilátero cíclico y no cruzado. Consideremos el punto E sobre la diagonal BD, tal que $\measuredangle BAE = \measuredangle CAD$, como en la figura.



Tenemos que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ACD$ son semejantes, ya que los ángulos $\measuredangle BAE$ y $\measuredangle CAD$ son iguales por definición de E, y $\measuredangle EBA = \measuredangle DCA$ por ser inscritos y abrazar el mismo arco $\overset{\frown}{AD}$.

Por lo tanto $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ y de aquí que

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

También tenemos que los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ABC$ son semejantes, puesto que $\measuredangle EAD = \measuredangle EAC + \measuredangle CAD = \measuredangle EAC + \measuredangle BAE = \measuredangle BAC$ y además $\measuredangle ADE = \measuredangle DCA$ por ser inscritos y abrazar el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Por lo tanto $\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$, en otras palabras

$$AD \cdot BC = AC \cdot ED.$$

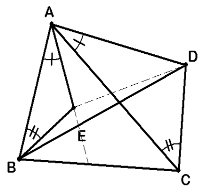
Sumando miembro a miembro la igualdades que obtuvimos,

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= AC \cdot BE + AC \cdot ED \\ &= AC \cdot (BE + ED) \\ &= AC \cdot BD, \end{aligned}$$

demostramos lo que queríamos. ■

Teorema 5.3.2 *(**Teorema Inverso de Ptolomeo**) Si un cuadrilátero no cruzado es tal que la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales, tal cuadrilátero es cíclico.*

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero no cruzado, el cual cumple con la hipótesis $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Consideremos el punto E tal que $\measuredangle BAE = \measuredangle CAD$ y $\measuredangle ABE = \measuredangle ACD$, como en la figura.



Para demostrar que $ABCD$ es inscriptible bastará probar que $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$; o lo que es lo mismo, que E esté sobre el segmento BD, es decir que $BE + ED = BD$.

Por la construcción de E, los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ACD$ son semejantes, por lo que $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$, y así

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$
$$BE \cdot AC = CD \cdot AB.$$

Por otro lado, observemos que $\measuredangle BAC = \measuredangle BAE + \measuredangle EAC = \measuredangle CAD + \measuredangle EAC = \measuredangle EAD$ y utilizando la primera identidad, garantizamos que los lados adyacentes a los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle EAD$ son proporcionales. Entonces, por el criterio L.A.L. los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AED$ son semejantes, con lo cual obtenemos que $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}$ y así

$$AC \cdot ED = BC \cdot AD.$$

Sumando miembro a miembro esta identidad con la segunda que habíamos obtenido, vemos que

$$BE \cdot AC + AC \cdot ED = CD \cdot AB + BC \cdot AD$$
$$AC \cdot (BE + ED) = CD \cdot AB + BC \cdot AD$$

Y utilizando la hipótesis de que $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, concluimos que

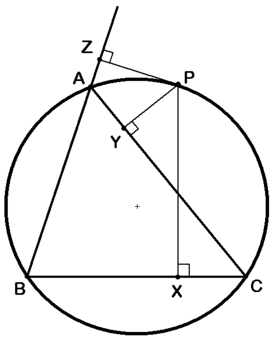
$$BE + ED = BD,$$

ya que $AC \neq 0$. ■

5.4 La Línea de Simson

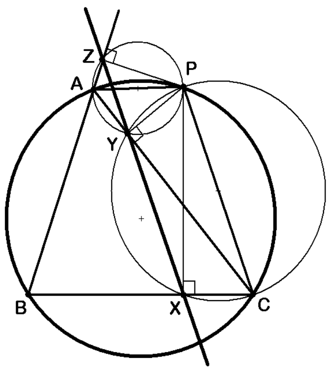
Teorema 5.4.1 *Los pies de las perpendiculares trazadas desde cualquier punto del circuncírculo de un triángulo a los lados de éste, son colineales.*

Demostración. Sea P un punto perteneciente al circuncírculo de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, y sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares trazadas desde P respectivamente hacia los lados BC, AC y AB como en la figura.



La circunferencia de diámetro AP pasa por los puntos Y y Z, al ser $\measuredangle AZP$ y $\measuredangle AYP$ ángulos rectos. De aquí que $\measuredangle ZAP = \measuredangle ZYP$, y claramente $\measuredangle ZAP$ y $\measuredangle BAP$ son suplementarios. Pero como el cuadrilátero $ABCP$ es cíclico, se sigue que $\measuredangle BAP$ es suplemento de $\measuredangle BCP$. Por lo tanto

$$\measuredangle BCP = \measuredangle ZAP = \measuredangle ZYP.$$



Por su parte la circunferencia de diámetro PC pasa por los puntos X y Y, ya que los ángulos $\measuredangle PYC$ y $\measuredangle PXC$ son rectos. Así $\measuredangle XYC =$

$\measuredangle XPC$. Además, como $\measuredangle XPC + \measuredangle BCP = 90°$, tenemos $\measuredangle XYC + \measuredangle BCP = 90°$.

Por último

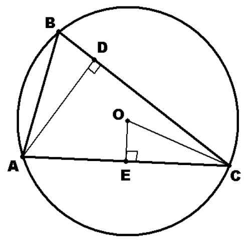
$$\measuredangle XYZ = \measuredangle XYC + 90° + \measuredangle ZYP = \measuredangle XYC + 90° + \measuredangle BCP = 180°. \blacksquare$$

A la línea recta que pasa por los puntos X, Y y Z, que son los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto P del circuncírculo a los lados del triángulo, se le llama **la línea de Simson**.

5.5 Problemas

1. Calcular las funciones trigonométricas para un ángulo inscrito que abraza el segmento AB menor en longitud que el diámetro de un círculo de radio r.

2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo circunscrito en una circunferencia, en donde O es el circuncentro y D y E puntos sobre los lados BC y AC respectivamente, como en la figura. Demostrar que $\triangle ABD \sim \triangle COE$.



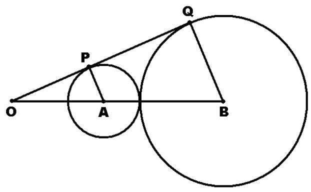
3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo cuyas diagonales se cortan en O, demostrar que $AB \cdot BC \cdot OD = CD \cdot DA \cdot BO$.

4. Probar que en un triángulo, los puntos simétricos del ortocentro respecto a los lados están en el círculo circunscrito.

5. Sea AB el diametro de una circunferencia de radio 1 y a la vez el lado de un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Si la circunferencia corta a los lados AC y BC en los puntos D y E respectivamente, calcular la longitud de AE.

6. Sean A, B, C y D son los vértices de un cuadrado colocados en el sentido de las manecillas del reloj. Si el cuadrado está incrito en un círculo de radio 1 y C, B y P son colineales y PA es tangente al círculo, determinar el valor de PD.

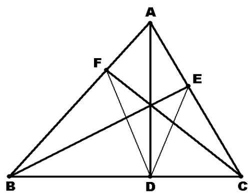
7. Considerar la figura, en donde dos círculos con centros en A y B son tangentes entre sí y la recta tangente a ambas circunferencias toca a éstas en los puntos P y Q. Sea O el punto de intersección de la tangente exterior y la línea que pasa por A y B. Si $OP = 4$ y $AP = 3$. Determinar el valor de PQ.



8. Una recta corta a un cuadrilátero $ABCD$ es dos cuadriláteros cíclicos. Probar que $ABCD$ tiene dos lados paralelos.

9. Sean A y P puntos distintos en una circunferencia de centro en O. Demostrar que la intersección de la circunferencia de diámetro AO y el segmento AP es el punto medio de este segmento.

10. Dado el triangulo $\triangle ABC$ en el cual D, E y F son los pies de las alturas de BC, AC y AB, respectivamente, como en la figura, demostrar que la altura AD es bisectriz del ángulo $\measuredangle FDE$.



11. Sea $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$ y t la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el vértice A. si s es paralela a t y corta a AB en E y a AC en D, demostrar que el cuadrilátero $BCDE$ es inscriptible.

12. Sea $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$. Si t es la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el vértice A, demostrar que las rectas t y CB son antiparalelas a las rectas AB y AC.

Capítulo 6

Sugerencias a los Problemas

6.1 Sugerencias para el Capítulo 1

1. Dividir el heptágono en triángulos y encontrar la suma se sus angulos interiores.
2. Proceder de manera análoga al ejercicio anterior.
3. Observar que GE y AD son paralelos a BC.
4. Si K es el punto medio de AB, entonces DK es paralelo a NB.

6.2 Sugerencias para el Capítulo 2

1. Si D es el pie de la altura que pasa por A en el lado BC, entonces $\triangle ADB$ es semejante a $\triangle CAB$. Y de igual forma $\triangle ADC$ es semejante a $\triangle BAC$.
2. Utilizar el problema anterior.
3. Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACB$ son semejantes, ¿por qué?.
4. Demostrar que

$$\begin{aligned} \triangle AGB &\sim \triangle FGD, \\ \triangle AFD &\sim \triangle EAB \end{aligned}$$

y encontrar las relaciones adecuadas.

5. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con hipotenusa CA. Sea M el punto medio de CA y N el punto en donde la recta perpendicular a AB que pasa por M intersecta a este segmento, entonces

$$\triangle ANM \sim \triangle ABC.$$

6. Demostrar que

$$AM \cdot BN = AH \cdot HB,$$

ocupar esto para demostrar que

$$\triangle MAH \sim \triangle HBN.$$

7. Demostrar que

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C.$$

8. Se tiene que

$$\triangle ABD \sim \triangle PAM$$

y

$$\triangle ADC \sim \triangle QMA.$$

9. Los triángulos $\triangle EMA$ y $\triangle EDC$ son semejantes, ¿cuál es su razón de semejanza?. Encontrar el área de los triángulos $\triangle EMA$, $\triangle ABC$ y $\triangle BCM$.

10. El triángulo $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo. Utilizar el problema 1.

6.3 Sugerencias para el Capítulo 3

1. Sean E y F los puntos de intersección de BD con AM y LC respectivamente. Tenemos que $\triangle ABE$ y $\triangle LBF$ son semejantes, ¿por qué?.

2. Localizar un punto P en el segmento AB tal que la distancia de M a P sea $\frac{1}{2}AB$.

3. Observar que KN y ML son líneas medias de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$.

4. Trazar la diagonal que pasa por el primero y cuarto vértice, tal diagonal es paralela al primer segmento trazado. Tomando el punto medio de esta diagonal y uniéndola con los puntos medios de los lados 1, 2 y 3 del pentágono obtenemos un paralelogramo.

6.4 Sugerencias para el Capítulo 4

1. Trazar por B una línea paralela a la mediana por A, prolongar el lado AC para que se intersecte con esta línea.
2. Prolongar las líneas AF y BC hasta que se intersecten en el punto G. Demostrar que $\triangle AEG$ es isósceles.

6.5 Sugerencias para el Capítulo 5

1. Si C es un punto cualquiera en la circunferencia, que determina el ángulo inscrito $\measuredangle ACB$, encontrar un punto C' en la circunferencia tal que
$$\measuredangle AC'B = \measuredangle ACB$$
y que AC' sea un diámetro.
2. Observar que $\measuredangle EOC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} = \measuredangle ABC$.
3. Si AC y BD son las diagonales del cuadrilátero, demostrar que
$$\triangle AOD \sim \triangle BOC.$$
4. Sean A' y A'' los puntos en donde la altura por A corta a la circunferencia y al triángulo, respectivamente. Si M es el ortocentro, demostrar que
$$\triangle A'BA'' \sim \triangle MBA''.$$
5. Observar que $\triangle AEB$ es un triángulo rectángulo, ocupar el teorema de Pitágoras.
6. Demostrar que $\triangle PAB$ es isósceles.
7. Ocupar el teorema de Pitágoras para obtener el valor de OA. Posteriormente determinar el radio BQ, observando que
$$\triangle APO \sim \triangle BQO.$$
8. Encontrar una relación entre los ángulos de dos vértices consecutivos del cuadrilátero original que pertenezcan a distintos círculos.
9. Trazar el diámetro AD de la circunferencia mayor, demostrar que
$$\triangle AQO \sim \triangle APD.$$
10. Los puntos F y D pertenecen a la circunferencia de diámetro AC. De igual manera E y D pertenecen a la circunferencia de diámetro AB.

11. El ángulo semi-inscrito determinado por la tangente t y el lado AB del triángulo mide lo mismo que el ángulo inscrito $\measuredangle ACB$.

12. Trazar la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ y demostrar que

$$\measuredangle TAB = \measuredangle ACB.$$

Referencias

[1] Bulajich R. y Gómez Ortega J. A., *Geometría.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

[2] Coxeter H. S. M., *Introduction to Geometry.* John Wiley and Sons, Toronto, 1969.

[3] Joyce D. E., *Euclid's Elements.* Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, Worcester MA, 1998. http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

[4] Moise E. E. y Downs F. L., *Geometry.* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1964.

[5] Prenowitz W. and Jordan M., *Basic Concepts of Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1965.

[6] Pogorélov A. V., *Geometría Elemental.* Instituto Politécnico Nacional, México, 1998.

[7] Rich B., *Teoría y Problemas de Geometría Plana con Geometría de Coordenadas.* McGraw Hill, México, 1988.

[8] Shively L. S., *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1963.

[9] Wentworth J. y Smith D. E., *Geometría Plana y del Espacio.* Editorial Porrúa, México, 2000.