Geometría Inversiva

Entrenamiento #9 - Rumbo al Nacional
12-16 de noviembre de 2015
Por: Favela

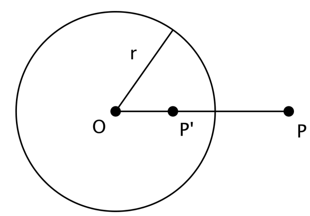
Resumen

Ha llegado el día. Oficialmente son los suficientemente grandes como para aprender a invertir. ¡Cómo han crecido! Aquí está el documento que les enseñará el camino a dominar la Fuerza de la Geometría. No le tengan miedo y pregunten todo lo que quieran. La verdad sé que no está fácil, pero demuestren las propiedades y úsenlas y poco a poquito le agarrarán callo a estas cosas.

El origen

La inversión es el arte obscuro de transformar circunferencias en otras circunferencias (se dice que una línea es una circunferencia con radio infinito). Entonces a menudo se transforman circunferencias en líneas y viceversa. El punto es que se puede transformar un problema a otro mucho más sencillo utilizando este principio. Estas transformaciones son muy utilizadas ya que es más sencillo lidiar con lineas que con círculos. Por lo que si quieren invertir, se recomienda elegir como centro de inversión a un punto concurrido por líneas y círculos. Vamos con la notación y las propiedades y esas cosas.

Notación



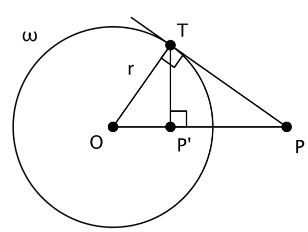
Se denota una inversión con centro en O y radio r como $I(O, r)$. Se dice que P' es el punto inverso de P si P' se encuentra en el rayo de O hacia P y cumplen que:

$$OP \cdot OP' = r^2$$

Propiedades

1. Si P es el inverso de P' entonces P' es el inverso de P.
2. El inverso de un punto sobre la circunferencia de inversión es ese mismo punto.
3. Para puntos inversos P y P' que no están sobre la circunferencia de inversión, se sabe que uno está dentro de la circunferencia de inversión y el otro está fuera.
4. El inverso del centro de inversión es un punto en el infinito y viceversa.
5. Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos es ortogonal a la circunferencia de inversión.

Construcción



- Sea P un punto fuera de la circunferencia de inversión ω, se toma un punto T sobre la circunferencia, tal que PT es tangente a ω. Luego, el pie de la perpendicular desde T hacia OP es el inverso de P, o sea P'.
- Sea P un punto dentro de la circunferencia de inversión ω, se toma un punto T sobre la circunferencia, tal que PT es perpendicular a OP. Luego, se traza la tangente a ω por T, hasta que choque con el rayo OP en el inverso de P, o sea P'.

Intenta demostrar la propiedad básica de la inversión utilizando esta construcción.

Lemas importantes

Todos estos lemas los deben demostrar antes de pasar a los problemas.

1. Sea $I(O, r)$, y sean dos pares de puntos inversos P, P' y Q, Q', entonces $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ y
$$\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$$
2. Sea $I(O, r)$, y sean dos pares de puntos inversos P, P' y Q, Q', entonces
$$P'Q' = PQ \cdot \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$$
3. Una recta que pasa por el centro de inversión se invierte en si misma.
4. El inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que sí pasa por el centro de inversión, y viceversa.
5. El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que no pasa por el centro de inversión.

Ejercicios

1. ¿Cuál es el inverso de un sistema de rectas concurrentes respecto a un punto distinto del de concurrencia?
2. ¿Cuál es el inverso de un sistema de rectas paralelas?
3. Demuestra que un sistema coaxial de circunferencias se invierte en un sistema coaxial de circunferencias o en un conjunto de rectas concurrentes o paralelas.
4. Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales dos circunferencias pueden invertirse en ellas mismas.
5. ¿Cuándo pueden invertirse tres circunferencias en ellas mismas?
6. Sea O un punto de una circunferencia con centro C, y supongamos que la inversa de esta circunferencia con respecto a O como centro de inversión corte a OC en B. Si C' es el inverso de C, demuéstrese que $OB = BC'$.
7. Demuestra que si un triángulo $\triangle ABC$ se invierte con respecto a su incírculo, el incentro (I) es el ortocentro del triángulo $\triangle A'B'C'$
8. Demuestra que tres puntos no colineales cualesquiera pueden invertirse en los vértices de un triángulo equilátero de tamaño dado.
9. Si se tiene una circunferencia ω con centro O y un punto A fuera de ella, y se trazan las tangentes a ω desde A, que la tocan en P, Q encuentra el inverso de ω, con respecto a la circunferencia con centro en A y radio AP. **NOTA:** Se dice que estas dos circunferencias son ortongonales, puesto que $\angle OPA = 90°$.
10. Demuestra que si dos circunferencias son ortogonales, el inverso del centro de una cualquiera de ellas con respecto a la otra es el punto medio de su cuerda común.
11. Sean α y β dos circunferencias y sea P un punto fuera de ambas. Muestra que hay una circunferencia que pasa por P y es ortogonal a ambas.
12. Muestra que dos circunferencias que no se cortan pueden siempre invertirse en un par de circunferencias concéntricas.

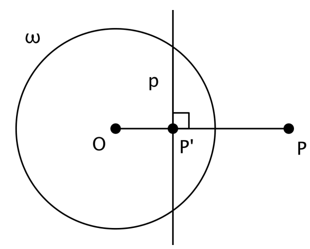
Polos y Polares

Cuando hablamos de un polo, probablemente piensen en Santa Claus o en el Polo Norte por aquello de que ya se acerca la Navidad, pero realmente nos referimos a un punto en el plano y cuando hablamos de una polar, nos referimos a una línea. Ahora, esta transformación de polo a polar se hace con respecto a una circunferencia dada y a un centro.

Construcción

Con respecto a una circunferencia ω con centro O

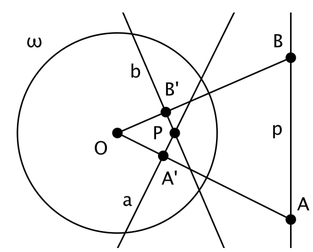
- Sea P un punto finito distinto a O, la polar del polo P es la línea p que es perpendicular a OP y que pasa por el inverso P' del polo P.
- Sea p una línea finita que no pasa por O, el polo P de la línea polar p es el inverso con respecto a ω del pie de perpendicular de O a p.
- Sea P un punto en el infinito, la polar de P es una línea por O perpendicular a cualquier línea por P y viceversa.
- Sea P el punto O, la polar p de P es una línea en el infinito y viceversa.

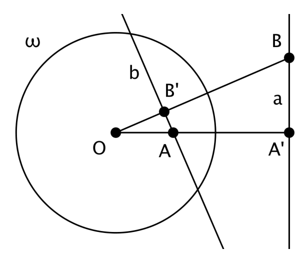


Nótese que a las polares (líneas) se les denota con minúscula y a los polos (puntos) se les denota con mayúscula. Hay que notar también que cada punto es polo de su polar y cada línea es polar de su polo. con respecto a una misma circunferencia.

Lemas Importantes

1. El polo de la línea que pasa por A y B es la intersección de las polares a y b.
2. Tres puntos son colineales si sus polares son concurrentes.
3. Tres líneas son concurrentes si sus polos son colineales.
4. Dado una circunferencia $k(O, r)$, sean a y b las polares de A y B. Entonces, $A \in b \Leftrightarrow B \in a$.
   (**Definición**) Los puntos A y B se llaman *conjugados* con respecto a una circunferencia k si uno de ellos está en la polar del otro.
5. Si la línea determinada por dos puntos conjugados A y B interseca a la circunferencia $k(O, r)$, en C y D, entonces se dice que A, B, C, D son 4 puntos armónicos: $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. El converso también es cierto.





Ejercicios

1. Encuentra la polar de un punto sobre la circunferencia de inversión.
2. Sea ABC un triángulo, I su incentro, y D, E, F los puntos de tangencia del incírculo con AB, BC, CA, respectivamente. Encuentra las polares de A, B y C con respecto al incírculo. Encuentra los inversos de A, B, C.
3. Muestra que si dos circunferencias son ortogonales, las polares de sus puntos de tangencia, con respecto a uno de los círculos, concurren en el centro del otro círculo.

Tips Generales

- Es muy útil cuando queremos trabajar con longitudes de lados y razones, hacer inversión con respecto a una circunferencia de radio 1, y observar si hay razones conocidas en la circunferencias.
- Al momento de invertir, a veces es útil ver sólo la inversión, pero a veces les sirve mucho sobreponer el dibujo original y la inversión.
- También es muy útil considerar potencias para encontrar puntos inversos con respecto a una circunferencia dada.
- Los polos y las polares te pueden ayudar a encontrar algunos inversos.
- ¿Tienes un punto externo y dos tangentes desde ese punto?
- ¿Quieres demostrar que 4 puntos son colineales? Demuestra que bajo la inversión, son concíclicos. Y viceversa.
- La inversión te preserva incidencia. Si dos figuras se intersecan dos veces, sus inversiones también. (¡Cuidado! Una de ellas puede ser el infinito).
- Recuerda que también mantienen ángulos, aunque hay algunos que los voltean, pero a fin de cuentas no hay ángulos perdidos.

Agregados culturales

1. ¿Les gustó esta lista? ¡Es mi favorita!
2. ¿Tienes muchos problemas? Invierte sobre tí y observa cómo tus problemas se van al infinito y más allá.
3. En Guadalajara se encuentra el restaurante más rápido del mundo, *Karnes Garibaldi*
4. La jerga del nacional es muy particular. Al juego de *Ninja* se le conoce como *Sushi*. La mecánica es la misma, aunque hay quienes juegan con dos vidas (dos manos) o una vida (cualquiera de las dos manos). Al juego de *Lobo* se le conoce también como *Asesino* o *Vampiro* y los personajes no son los mismos. Así que te recomendamos informarte acerca de cuáles son las funciones de los personajes una vez que llegues al nacional.

Lista de problemas

1. Sea ABC un triángulo con semiperímetro s. Sean D y E puntos sobre AB tal que $CD = CE = s$. Demuestra que el excírculo (I_c, r_c) de ABC es tangente al circuncírculo del triángulo CDE.
2. Demuestra que en un cuadrilatero cíclico $ABCD$,
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$
3. Las circunferencias OBC, OCA, OAB son cortadas en P, Q, R, respectivamente, por otra circunferencia que pasa por O. Demuestra que
$$BP \cdot CQ \cdot AR = CP \cdot AQ \cdot BR$$
4. Demuestre que las circunferencias que tienen por diámetros las tres cuerdas AB, AC y AD de una circunferencia dada, se cortan por pares en tres puntos colineales.

5. Sea el cuadrilátero cíclico $ABCD$, se trazan las perpendiculares desde D a las rectas AB, AC, BC, intersecándolas en P, Q, R, respectivamente. Demuestra que P, Q y R son colineales (*Linea de Simson*).

6. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Las tangentes de A al círculo de diámetro BC, lo tocan en P y Q. Muestra que P, Q, H son colineales.

7. Sean $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean $E = AC \cap BD$, $F = AB \cap CD$ y $G = AD \cap BC$. Muestra que la línea polar e del punto E pasa por FG

8. Sea ABC un triángulo con incentro I. Se fija una línea ℓ tangente al incírculo de ABC (sin contener ninguno de los lados). Sean A', B', C' puntos en ℓ tal que:

$$\angle AIA' = \angle BIB' = \angle CIC' = 90^\circ$$

   Muestra que AA', BB', CC' concurren.

9. Sea un triángulo $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$ y sean D, E puntos en los arcos menores $\widehat{\text{AB}}$ y $\widehat{\text{AC}}$ respectivamente. Las líneas AD y BC se intersecan en F y la línea AE interseca al circuncírculo de $\triangle FDE$ una segunda vez en G. Demuestra que la línea AC es tangente al circuncírculo de $\triangle ECG$.

10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de las líneas AD y BC. El circuncírculo del triángulo $\triangle PCD$ interseca la línea AB en los puntos Q y R. Sea S y T sean los puntos de tangencia desde P al circuncírculo de $ABCD$

    a) Demuestra que $PQ = PR$.
    b) Demuestra que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

11. Dos círculos C, D son tangentes exteriormente en un punto P. Desde un punto arbitrario A sobre la circunferencia C ($C \neq P$) se trazan las tangentes a D (M, N son los puntos de tangencia). Las rectas AM y AN cortan por segunda vez a la circunferencia C en E, F respectivamente. Muestra que:

$$\frac{PE}{PF} = \frac{ME}{NF}$$

12. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares y se intersecan en O. Demuestra que las reflexiones de O a través de AB, BC, CD, y DA son concíclicas.

13. Sea P un punto interior del triángulo $\triangle ABC$, tal que $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Sean D y E los incentros de los triángulos APB y APC respectivamente. Muestra que AP, BD y CE concurren.

14. Sea PQ el diámetro del semicírculo H. El círculo O es internamente tangente a H y tangente a PQ en C. Sea A un punto en H y B un punto en PQ tal que $AB \perp PQ$ y es tangente a O. Demuestra que AC es bisectriz de $\angle PAB$.

15. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ círculos distintos tales que Γ_1 y Γ_3 son tangentes externamente en P, y Γ_2 y Γ_4 son tangentes externamente en el mismo punto P. Suponga que Γ_1 y Γ_2; Γ_2 y Γ_3; Γ_3 y Γ_4; Γ_4 y Γ_1, se intersecan en A, B, C, D respectivamente. y que todos esos puntos son diferentes de P.

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

16. Un círculo con centro O pasa por los puntos A y C e interseca a los lados AB y BC del triángulo ABC en los puntos K y N respectivamente. Los circuncírculos de ABC y KBN se cortan en dos puntos distintos B y M. Muestra que $\angle OMB = 90^\circ$

17. Muestra que la circunferencia de los 9 puntos del triángulo ABC es tangente al incírculo y a los 3 excírculos. (*Teorema de Feuerbach*)

18. Sea un semicírculo con diámetro AB y centro O, y sea una línea que interseca el semicírculo en C y D y a AB en M ($MB < MA, MD < MC$). Sea K el segundo punto de intersección de los circuncírculos de triángulos AOC y DOB. Muestra que $\angle MKO = 90^\circ$

19. Sean M, N y P los puntos de intersección del incírculo del triángulo $\triangle ABC$ con los lados AB, BC y CA respectivamente. Muestra que el ortocentro del $\triangle MNP$, el incentro del $\triangle ABC$ y el circuncentro del $\triangle ABC$ son colineales.

20. Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es internamente tangente al círculo Ω en el punto P. Una línea paralela a AB que interseca el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q. Demuestra que $\angle ACP = \angle QCB$.