Entrenamiento de Geometría
Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx
Sábado 31 de Octubre de 2020

Homotecia:

Una homotecia es una transformación del plano que manda un punto X a un punto X', donde $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$. El punto O se llama centro de homotecia y la constante k se llama razón de homotecia. Y se dice que dos figuras son homotéticas si una figura se transforma en la otra bajo una homotecia. Por lo general se denota la homotecia con centro O y razón k como $H(O, k)$.

Lemas importantes:

1. Dos figuras semejantes, pero no congruentes, con lados correspondientes paralelos, son homotéticas. En particulas las líneas que unen cada par de puntos correspondientes entre las figuras son concurrentes en el centro de homotecia.
2. Dos circunferencias de centros y radios distintos son figuras homotéticas.
3. Cada tangente común a dos circunferencias dadas, pasa por un punto de homotecia.
4. La homotecia de una recta que no pasa por el centro de homotecia es otra recta paralela a la original.
5. La composición de dos homotecias con coeficientes k_1 y k_2, donde $k_1 k_2 \neq 1$, es una homotecia con coeficiente $k_1 k_2$ y su centro de homotecia pertenece a la línea que conecta los centros de estas homotecias.

Definición: Dado un triángulo ABC, existe una única circunferencia Γ_A exterior al triángulo que es tangente a los rayos AB, AC y al lado BC cuyo centro I_A es la intersección de la bisectriz interna del ángulo $\measuredangle A$ y las bisectrices externas de los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$. A Γ_A la llamamos la *circunferencia ex-inscrita (o excírculo) de ABC relativo al vértice A*. Al punto I_A se le conoce como *excentro de ABC relativo al vértice A*.

Lema 1: Sea ABC un triángulo. El excírculo de ABC relativo a A toca a los rayos AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Si s es el semiperímetro de ABC entonces $AD = AE = s$.

Ejemplo 1: Sea ABC un triángulo y D el punto de tangencia del incirculo ω de ABC con el lado AC. Sea M sobre ω tal que DM es diámetro de ω. Sea K la intersección de BM con AC. Demuestra que $AK = CD$.

Ejemplo 2: Sea ABC un triángulo y sea P un punto en su interior. La recta AP intersecta al circuncírculo de ABC nuevamente en A'. Los puntos B' y C' se definen de manera análoga. Sea O_A el circuncentro del triángulo BCP. Los circuncentros O_B y O_C se definen de manera análoga. Sea O'_A el circuncentro de $B'C'P$. Los circuncentros O'_B y O'_C se definen de manera análoga. Muestra que las rectas $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ y $O_CO'_C$ son concurrentes.

Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx

Problemas:

1. Muestra que si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común interseca a las circunferencias en B_0, B, C, C_0 entonces $\measuredangle B_0AC = \measuredangle BAC_0$.

2. Sean dos triángulos homotéticos ABC y DEF con centro de homotecia P. Sean Y y Z los circuncentros de los triángulos ABC y DEF. Muestra que P, Y, Z son colineales.

3. Sean dos circunferencias C_1 y C_2 con centros O y P respectivamente, tangentes internamente en un punto A. Sea C_3 una circunferencia con centro Q tangente externamente a C_1 en B. Sea C un punto en C_1, J la segunda intersección de la recta AC con C_2, y L la segunda intersección de la recta BC con Q. Muestra que las rectas PQ, AB y JL concurren.

4. Sean I, O el incentro y el circuncentro de ABC respectivamente, y D, E, F los circuncentros de los triángulos BIC, CIA, AIB. Sean P, Q, R los puntos medios de los segmentos DI, EI, FI. Muestra que el circuncentro M del triángulo PQR es el punto medio del segmento IO.

5. Dados dos puntos fijos A, B en una circunferencia, y un punto C móvil sobre la misma circunferencia, encuentra el lugar geométrico de los gravicentros de todos los triángulos ABC.

6. Dado un triángulo ABC, encuentra el lugar geométrico de los centros de los rectángulos $PQRS$ cuyos vértices Q, P están sobre el lado AC y los vértices R, S están sobre los lados AB, BC respectivamente.

7. Se toma un punto arbitrario dentro de un triángulo acutángulo. Desde él se trazan las proyecciones hacia los lados, y se traza una circunferencia que pasa por esos tres pies de proyección. Dicha circunferencia corta una segunda vez a cada uno de los lados. Muestra que las perpendiculares a los lados desde estos tres nuevos puntos son concurrentes.

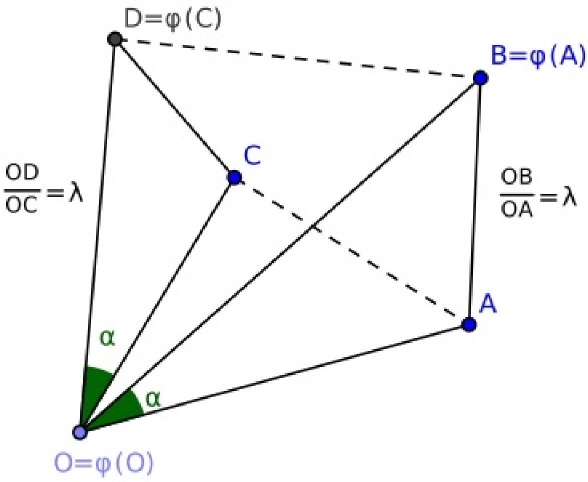
8. Tres círculos congruentes tienen un punto común O y son tangentes por pares a los lados de un triángulo dado ABC. Muestra que el incentro y el circuncentro del triángulo ABC con colineales con el punto O.

9. En un triángulo ABC, $AB = AC$. Un círculo es tangente internamente al círcuncírculo de ABC y también a los lados AB, AC en P, Q, respectivamente. Prueba que el punto medio del segmento PQ es el incentro de ABC.

Rotohomotecia

Se llama rotohomotecia φ de centro O, ángulo α y razón λ a la combinación de una rotación de ángulo α con una homotecia de razón λ, ambas transformaciones con el mismo centro O. El orden de aplicación es irrelevante: primero la homotecia y después la rotación, o viceversa. Por definición, todos los triángulos $O, X, \varphi(X)$ son semejantes entre sí, por uno de los criterios de semejanza de triángulos: todos tendrán un ángulo α en el vértice O, y los lados adyacentes tendrán cociente constante λ. Además, ocurre que todo triángulo XYZ es semejante al triángulo $\varphi(X)\varphi(Y)\varphi(Z)$. Combinando estos hechos se tiene lo siguiente.

Teorema (Dos semejanzas con el mismo centro): Si OAB y OCD son triángulos semejantes, también son semejantes OAC y OBD.



Ejemplo 1: Sean AB y CD dos segmentos, y sea X la interseccin de las rectas AC y BD. Los circuncírculos de ABX y CDX se intersecan nuevamente en O. Entonces O es el centro de rotohomotecia que lleva AB hasta CD.

Lema 2: Sea ABC un triángulo. Consideramos puntos N y M sobre los lados AB y AC, respectivamente. Si P es la intersección de BM con CN entonces AP biseca al lado BC si y sólo si NM es paralela a BC.

Ejemplo 2: Sea $ABCDE$ un pentgono convexo tal que

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{y} \quad \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA.$$

Demuestre que si BD y CE se intersecan en P entonces AP biseca a CD.

Problemas:

1. Sea ABC un triángulo y sea D el pie de la altura desde A hacia BC. Sea ℓ una línea por D. Sea E un punto en ℓ tal que AE es perpendicular a BE; sea F un punto en ℓ tal que AF es perpendicular a CF (E y F distintos de D). Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demuestra que $AN \perp NM$.

Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx

2. Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ. El incírculo de ABC toca a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sea M el punto medio del arco BC que no contiene a A de Γ. La línea MD corta a Γ en T. Demuestra que $ATEF$ es cíclico.

3. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y sea M el punto medio de AH. La línea BH corta a AC en D. Sea E la reflexión de D respecto a BC. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Demuestra que BF es perpendicular a CM.

4. Sean H y O el ortocentro y circuncentro respectivamente, del triángulo acutángulo ABC. La mediatriz de AH corta a AB y AC en D y E, respectivamente. Muestra que $\measuredangle DOA = \measuredangle EOA$.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Γ y ortocentro H. Sea A' el punto tal que AA' es un diámetro de Γ. La línea $A'H$ corta a Γ en T. Una línea por H corta a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente, de tal manera que $AD = AE$. Demuestra que $ATEF$ es cíclico.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle ADC$. Sean X y Y las proyecciones de A sobre BC y CD, respectivamente. Demuestra que el ortocentro del triángulo AXY está en la línea BD.