Homotecia

Tarea #5 - Rumbo al Nacional
2 - 6 de octubre de 2016
Por: Favela

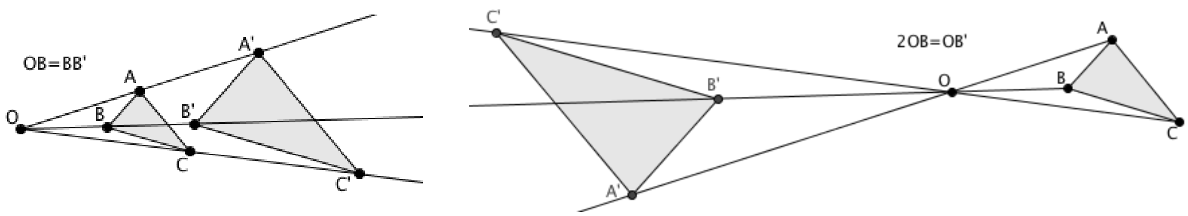
Resumen

Esta tarea te dedicarás a ver el tema de homotecia. Bastante sencillo y útil para quitarnos palabras de la pluma y del papel, y ahorrarnos un poco de tiempo a la hora de escribir cosas como semejanzas. Bien, si estás listo, ¡comencemos, que hay mucho por hacer!

1. ¿Homo-qué?

Una homotecia es una transformación del plano que manda un punto X a un punto X', donde $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$. EL punto O se llama *centro de homotecia* y la constante k se llama *razón de homotecia*. Y se dice que dos figuras son *homotéticas* si una figura se transforma en la otra bajo una homotecia. Por lo general se denota la homotecia con centro O y razón k como $H(O, k)$.

¿Y en cristiano? Bueno, es decir que si se somete una figura a una transformación homotética, cada punto de la figura lo puedes encontrar en la nueva figura transformada. Y esa transformación se realiza con un punto y una razón dada. Estoy seguro que viste algo como esto en primaria o secundaria y que no te es extraño, así que mira los ejemplos siguientes:



¿Te acuerdas que viste proyecciones o figuras semejantes o proporcionales?, ¡pues de eso nos habla la homotecia! Te fijarás que la homotecia de la izquierda tiene centro en O y razón $k = 2$, es decir que $OA' = 2OA$. Hasta ahorita todo eso tiene mucho sentido, ¿no? Entonces los puntos O, A, A' están en la misma línea; luego O, B, B' estan en otra línea; y O, C, C' están en otra línea. Es importante que para poder decir que las figuras son homotéticas, los puntos correspondientes, deben estar alineados con el centro de homotecia.

Pero la homotecia de la izquierda también parece tener razón $k = 2$, ¿Por qué se ve diferente? Pues porque la homotecia trabaja con segmentos dirigidos: $\overrightarrow{AB}$. Un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ representa el segmento que va de A a B (en esa dirección), por lo que es diferente a decir $\overrightarrow{BA}$. Se considera entonces que uno de esos sentidos es positivo y el otro es negativo. Normalmente todos se consideran positivos y cuando queremos considerar el otro sentido, le cambiamos el signo. Y la homotecia se considera con segmentos dirigidos para diferenciar estos casos:

- Si tienes los dos puntos homotéticos (*i.e.* A, A') del mismo lado del centro de homotecia (O), como el sentido del segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y OA' es el mismo, la razón $k = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ es positiva. Esto está representado en el ejemplo de la izquierda.

- . En cambio, si tienes el centro de homotecia entre los dos puntos homotéticos, $\overrightarrow{OA'}$ va en dirección opuesta a $\overrightarrow{OA}$, y por leyes de los signos al hacer la división, la razón k es negativa. Esto está representado en el ejemplo de la derecha. ¡Observa qué pasa con la figura cuando la razón es negativa¡ Parece que queda al revés.

2. Algunos lemas

Pese a que son muchos los casos, los lemas de la homotecia son sencillos, y es tu trabajo demostrarlos:

1. Dos figuras semejantes, pero no congruentes, con lados correspondientes paralelos, son homotéticas. En particulas las líneas que unen cada par de puntos correspondientes entre las figuras son concurrentes en el centro de homotecia.
2. Dos circunferencias de centros y radios distintos son figuras homotéticas. Te será útil encontrar los centros de homotecia, echarle un vistazo al siguiente lema y a los agregados culturales.
   - 2 círculos sin intersecciones (dentro uno del otro, y fuera uno del otro)
   - 2 círculos tangentes (interna y externamente)
   - 2 círculos que se cortan en dos puntos.
3. Cada tangente común a dos circunferencias dadas, pasa por un punto de homotecia.
4. La homotecia de una recta que no pasa por el centro de homotecia es otra recta paralela a la original.
5. La composición de dos homotecias con coeficientes k_1 y k_2, donde $k_1 k_2 \neq 1$, es una homotecia con coeficiente $k_1 k_2$ y su centro de homotecia pertenece a la línea que conecta los centros de estas homotecias.

3. Ejercicios

1. Dado un triángulo ABC y un punto O fuera de él, construye con regla y compás un triángulo $A'B'C'$ bajo la homotecia $H(O, 2)$.
2. Muestra que el incírculo (I, r) y el excírculo (I_a, r_a) de un triángulo ABC son homotéticos desde A. Encuentra el otro punto de homotecia.
3. Dado un triángulo ABC y su circuncírculo (O, R). Muestra que:
   a) El triángulo medial $A'B'C'$ es homotético al triángulo ABC. Encuentra el centro de homotecia y la razón de homotecia.
   b) El ortocentro (H), circuncentro (O) y gravicentro (G) del triángulo ABC son colineales. Encuentra $\frac{GH}{GO}$.
   c) El circuncentro (N) del triángulo $A'B'C'$ es colineal con los puntos H, G, O. Encuentra los centros de homotecia de ambos circuncírculos. Recuerda que hay uno interno y uno externo
   d) Los puntos simétricos de H con respecto a los lados AB, BC, CA están sobre el circuncírculo de ABC
4. Tres circunferencias (A,a), (B,b), (C,c) con radios diferentes cuyos centros forman un triángulo, tienen 6 centros de homotecia (dos por cada pareja de circunferencias). Muestra que se encuentran por tercias sobre 4 rectas.

4. Agregados culturales y aclaraciones

1. La palabra *homotecia* deriva del griego *homo* = semejante, y de *tithénai* = colocar, disponer.
2. Si hay dos centros de homotecia (O y O') para un par de circunferencias, se dice que uno es interno y el otro es externo. Sean P y P' dos puntos homotéticos (uno en cada circunferencia) El externo (O) se encuentra sobre la prolongación de PP', mientras que el interno (O') se encuentra sobre el segmento PP', en algún lado, pero entre los dos puntos.

3. Muy comúnmente es útil decir que un punto es centro de homotecia, por lo tanto, hay concurrencia en ese punto.

4. Una circunferencia con centro en O y radio r, se denota como (O, r).

5. El triángulo medial es el que se forma con los puntos medios de los lados de un triángulo dado.

6. La composición de dos homotecias se logra aplicando una homotecia con un centro dado, y a esa transformación se le aplica otra homotecia con otro centro dado. El resultado vendría siendo algo como una homotecia de la homotecia inicial.

7. Otras transformaciones del plano se incluyen en la geometría inversiva, y en la proyectiva. En una de ellas las líneas pueden pasar a ser círculos y viceversa, y en la otra los puntos pueden pasar a ser líneas y viceversa. ¿Puedes adivinar cuál es cuál?

5. Lista de problemas

1. Muestra que si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común interseca a las circunferencias en B', B, C, C', entonces $\angle B'AC = \angle BAC'$

2. Sean dos triángulos homotéticos ABC y DEF con centro de homotecia P. Sean Y y Z los circuncentros de los triángulos ABC y DEF. Muestra que P, Y, Z son colineales.

3. En un triángulo ABC con ángulo recto en C, muestra que bajo la homotecia $H(C, 2)$, el incírculo se vuelve un círculo tangente al circuncírculo.

4. Dos círculos son tangentes internamente en un punto M. Sea AB la cuerda en el círculo mayor, tal que es tangente al círculo menor en un punto T. Muestra que MT es bisectriz del angulo AMB.

5. El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demuestra que $AM = NC$.

6. Sean dos circunferencias C_1 y C_2 con centros O y P respectivamente, tangentes internamente en un punto A. Sea C_3 una circunferencia con centro Q tangente externamente a C_1 en B. Sea C un punto en C_1, J la segunda intersección de la recta AC con C_2, y L la segunda intersección de la recta BC con Q. Muestra que las rectas PQ, AB y JL concurren.

7. Sean I, O el incentro y el circuncentro de ABC respectivamente, y D, E, F los circuncentros de los triángulos BIC, CIA, AIB. Sean P, Q, R los puntos medios de los segmentos DI, EI, FI. Muestra que el circuncentro M del triángulo PQR es el punto medio del segmento IO.

8. Dados dos puntos fijos A, B en una circunferencia, y un punto C móvil sobre la misma circunferencia, encuentra el lugar geométrico de los gravicentros de todos los triángulos ABC.

9. Dado un triángulo ABC, encuentra el lugar geométrico de los centros de los rectángulos $PQRS$ cuyos vértices Q, P están sobre el lado AC y los vértices R, S están sobre los lados AB, BC respectivamente.

10. Se toma un punto arbitrario dentro de un triángulo acutángulo. Desde él se trazan las proyecciones hacia los lados, y se traza una circunferencia que pasa por esos tres pies de proyección. Dicha circunferencia corta una segunda vez a cada uno de los lados. Muestra que las perpendiculares a los lados desde estos tres nuevos puntos son concurrentes.

11. Tres círculos congruentes tienen un punto común O y son tangentes por pares a los lados de un triángulo dado ABC. Muestra que el incentro y el circuncentro del triángulo ABC con colineales con el punto O.

12. En un triángulo ABC con $AB = AC$, un círculo es tangente internamente al circuncírculo de ABC y también es tangente a los lados AB y AC en P y Q respectivamente. Muestra que el punto medio del segmento PQ es el incentro de ABC.