Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 24 de septiembre del 2022

Inducción

Emilio Toscano Oneto

1. Principio de Inducción

El principio de inducción matemática es una técnica de demostración que se basa en probar la validez de una afirmación que depende de un número entero n a partir de la misma afirmación que depende ahora de $n-1$. De manera más formal el enunciado del principio de inducción matemática dice lo siguiente.

Principio de Inducción Matemática: Para una sucesión de afirmaciones $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), ..,$ todas y cada una de ellas son verdaderas si:

1. La afirmación $\mathcal{P}(1)$ es verdadera.

2. La afirmación $\mathcal{P}(k)$ implica que la afirmación $\mathcal{P}(k+1)$ es verdadera.

Esto último quiere decir que la veracidad de $\mathcal{P}(k+1)$ se puede asegurar cuando $\mathcal{P}(k)$ es verdadera.

Observación 1.1 *El segundo inciso es de hecho equivalente a demostrar que si $\mathcal{P}(k+1)$ no es verdadera, esto implica que $\mathcal{P}(k)$ tampoco lo es.*

Nota 1.2 *Al primer inciso del principio de inducción se le suele llamar **caso base de inducción**, mientras que el segundo inciso se le conoce como **hipótesis de inducción** o **paso inductivo**.*

Ejemplo 1.3 *Un ejemplo clásico de la inducción es demostrar la fórmula*

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para n entero. El caso base es cuando $n = 1$, y en efecto se verifica que la fórmula es válida para $n = 1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

De este modo, supongamos que la fórmula se satisface para algún k entero, es decir,

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

y veamos que la fórmula se cumplirá para $k+1$ también. Se observa que al considerar la suma de los enteros del 1 al $k+1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

De donde el último término coincide con la fórmula propuesta y así el principo de inducción asegura que la fórmula es válida para cualquier entero n.

Usualmente se hace la analogía de la lógica de inducción como el efecto domino, es decir, cuando tienes una fila de dominos, si tiras el primer domino, entonces el segundo caerá y empujará al tercero y así sucesivamente. El "así sucesivamente" es precisamente el hecho de que si algún domino cae, entonces empujará al siguiente y también caerá lo cual describe precisamente el segundo inciso del principio de inducción. De aquí la importancia del caso base, pues si nunca se tirá un domino, la secuencia nunca inicia y ningún domino caerá.

Observación 1.4 *Aunque la base de inducción del último ejemplo fue* $n = 1$*, la mayoría de los casos el caso base es* $n = k$ *para algún entero* k *y entonces cuando se demuestra el paso inductivo, se sigue que* $\mathcal{P}(n)$ *será cierto para todo* $n \neq k$*.*

Ejemplo 1.5 *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de* n *lados es* $(n-2) \times 180°$*.*

Puesto que el primer polígono convexo que existen en el plano es el triángulo, entonces la base de inducción empieza a partir de $n = 3$*, y la fórmula es válida, pues la suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180° = (3-2) \times 180°$*.*

Supongamos que la expresión es válida para $n-$*ágonos convexos. Consideremos a un* $(n+1)-$*ágono convexo con vértices* $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ *y trazemos la diagonal que une a* A_1 *y* A_n*, de esta forma, se parte a la figura en un* $n-$*ágono convexo* $A_1A_2...A_n$ *y en un triángulo* $A_1A_nA_{n+1}$*. La suma de los ángulos internos de* $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ *será la suma de los ángulos internos del* $n-$*ágono y la del triángulo, de los cuales ya sabemos que son* $(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180°$*, que es lo que se quería demostrar.*

En ciertas situaciones, resulta más conveniente demostrar un resultado más fuerte o general para demostrar la afirmación $\mathcal{P}(n)$ por el principio de inducción, pues a pesar de que la inducción sea una herramienta poderosa, a veces suele ser complicado usarlo cuando se limita el espacio de trabajo.

Ejemplo 1.6 *Para cualquier entero* $n \geq 2$ *se satisface que*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}.$$

Usando inducción directamente puede resultar complicado al momento de demostrar el paso inductivo. Sin embargo, nos gustaría trabajar con algo más del estilo $S_n \leq \frac{3}{4} - a_n$ *donde*

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

y a_n *es alguna expresión en términos de* n *que nos gustaría encontrar. Puesto que queremos usar inducción en esta nueva expresión, el caso base debe funcionar, y así cuando* $n = 2$*, se observa que* $S_n = \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} - a_2$*, de donde se sigue que* $a_2 \leq \frac{1}{2}$*. Para obtener una mejor idea de como se comportan los* a_n*, cuando se aplica la inducción sobre* $S_n \leq \frac{3}{4} - a_n$*, en el paso inductivo se quiere obtener que*

$$S_n + \frac{1}{(n+1)^2} = S_{n+1} \leq \frac{3}{4} - a_{n+1}.$$

Así, al suponer que n *cumple lo que queremos, para que lo anterior sea verdadero entonces los* a_n *deben por lo menos cumplir que*

$$\left(\frac{3}{4} - a_n\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{3}{4} - a_{n+1}$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq a_n - a_{n+1}, \quad \textit{para toda } n \geq 2$$

En nuestro caso, vemos que $a_n = \frac{1}{n}$ *funciona, pues* $a_2 \leq \frac{1}{2}$ *y además*

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

De esta forma, con esta inducción se demuestra que $S_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$ *para toda* $n \geq 2$*, en particular*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n} < \frac{3}{4}$$

Que era lo que se quería demostrar.

Principio de Inducción Fuerte: Nuevamente, las afirmaciones $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), ...$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $\mathcal{P}(1)$ es verdadera.
2. Las afirmaciones $\mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$ implican que $\mathcal{P}(n+1)$ es verdadera.

Observación 1.7 *Lógicamente, el principio de inducción y la inducción fuerte son equivalentes, es decir, una implica la otra, aunque en ocasiones es más cómodo utilizar esta última versión.*

Ejemplo 1.8 *Si* a *es un número real de tal manera que* $a + \frac{1}{a}$ *es un entero, entonces* $a^n + \frac{1}{a^n}$ *es entero para* n *número natural.*

Claramente el caso base $n = 1$ *es verdadero. Para construir un poco de intuición, podemos considerar el caso* $n = 2$ *y en lugar de considerar directamente a* $a^2 + \frac{1}{a^2}$ *podemos tomar al producto*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^2 + 1 + 1 + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

El cual por ser producto de enteros, es entero y así $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$*. Continuando, en el caso* $n = 3$*, podemos considerar el producto*

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^3 + \frac{1}{a^3} + a + \frac{1}{a}$$

de donde nuevamente, se sigue que $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)$*. A partir de aquí, continuando con la inducción fuerte si todos los enteros menores o iguales a* n *satisfacen nuestra afirmación, entonces se observa que*

$$\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}.$$

De donde se concluye la prueba del resultado.

Principio de Inducción a la Cauchy: Las afirmaciones $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), ...$ son todas verdaderas si:

1. La afirmación $\mathcal{P}(2)$ es verdadera.

2. La afirmación $\mathcal{P}(n)$ implica que la afirmación $\mathcal{P}(n-1)$ es verdadera.

3. La afirmación $\mathcal{P}(n)$ implica que la afirmación $\mathcal{P}(2n)$ es verdadera.

Observación 1.9 *En este caso, la versión inductiva a la Cauchy implica el principio de inducción, pues por el primer y segudo numeral, se sigue que la afirmación $\mathcal{P}(1)$ es verdadera. Del tercer numeral y del segundo, se tiene que si $\mathcal{P}(n)$ es cierta, entonces $\mathcal{P}(2n)$ es cierta, así como $\mathcal{P}(2n-1), ..., \mathcal{P}(n+2), \mathcal{P}(n+1)$, es decir, eventualmente $\mathcal{P}(n)$ implica que $\mathcal{P}(n+1)$ es cierta y en efecto todas las afirmaciones son verdaderas.*

Ejemplo 1.10 ***Desigualdad de la media aritmética y la media geométrica (MA-MG):*** *Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales no negativos, se cumple que*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Usando inducción a la Cauchy, se verifica que $n = 1$ se da la igualdad y se cumple el caso $n = 2$ (la demostración de esto queda como tarea moral para el lector). Para el segundo numeral de inducción a la Cauchy, consideremos a los números no negativos $x_1, ..., x_{n-1}$ y a $g = \sqrt[n-1]{x_1 ... x_{n-1}}$ y notemos que si la desigualdad se cumple para algún n, entonces

$$\frac{x_1 + ... + x_{n-1} + g}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 ... x_{n-1} g} = \sqrt[n]{g^{n-1} g} = g.$$

Luego, $x_1 + ... + x_{n-1} \geq ng - g$ y se sigue que la desigualdad se satisface para $n - 1$.

Para el tercer numeral, consideremos a los números no negativos $x_1, ..., x_{2n}$ y puesto que el caso $n = 2$ se cumple, entonces se observa que

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_{2n} &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + ... + (x_{2n-1} + x_{2n}) \\ &\geq 2\sqrt{x_1 x_2} + 2\sqrt{x_3 x_4} + ... + 2\sqrt{x_{2n-1} x_{2n}} \\ &\geq 2n \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4} ... \sqrt{x_{2n-1} x_{2n}}} \\ &= 2n(x_1 x_2 ... x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

De donde $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(2n)$, por lo tanto la inducción esta completa y se cumple el resultado para cualquier $n \geq 1$.

El principio de inducción y sus diferentes versiones, a pesar de ser una herramienta muy útil, tiene ciertas sutilezas a las cuales hay que prestar atención, pues de lo contrario se pueden obtener conclusiones absurdas.

Ejemplo 1.11 *Encuentra el error de las siguientes demostraciones:*

(i) Todas las potencias no negativas de 2 son iguales a 1.

En efecto, el caso $n = 0$ verifica que $2^0 = 1$. Si para $k \leq n$ se cumple que $2^k = 1$, entonces

$$2^{n+1} = \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

De donde concluimos que $2^n = 1$ para $n \geq 0$.

Error: *El paso inductivo no se cumple para $n = 0$, es decir, no podemos concluir que $2^1 = 1$ a partir de $2^0 = 1$. Para dicho caso se debió demostrar el caso base $n = 1$ para poder usar inducción fuerte, el cual sabemos que no es verdadero y por tanto la afirmación es falsa.*

(ii) Sea R_n la afirmación: Si se tienen n rectas en el plano, con 2 de ellas no paralelas, entonces hay un punto en común a todas las rectas.

En efecto, R_2 se cumple, pues dos rectas no paralelas se cortan en un punto. Supongamos que R_n se cumple y al considerar $n+1$ rectas, digamos $l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}$ se tiene que las rectas $l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ comparten un punto en común, digamos P. Por otro lado, las rectas $l_1, ..., l_{n-1}, l_{n+1}$ tmabién comparten un punto en común, llamémoslo Q, pero l_1 y l_2 deben de tener solo un punto en común, y así $P = Q$, luego las $n + 1$ rectas comparten el punto P y R_n se cumple para toda $n \geq 2$.

Error: *El caso base debió incluir al caso $n = 3$ para el cual R_3 es además falsa. De hecho el paso inductivo falla de R_2 a R_3, ya que al considerar el punto Q no se toma en cuenta a l_2.*

2. Ejercicios

La siguiente lista de ejercicios no siguen un orden de dificultad en particular, por lo que se recomienda intentarlos todos y la intención es que la solución de cada uno sea usando alguna de las versiones del principio de inducción.

Ejercicio 2.1 *El número* $n^3 - n$ *es un múltiplo de* 6 *para cualquier* n *natural.*

Ejercicio 2.2 *Demuestra la fórmula*

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para n *entero positivo.*

Ejercicio 2.3 *Prueba que para cualquier entero positivo* n *se satisface la desigualdad*

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Ejercicio 2.4 *Demuestra que* 8 *divide a* $3^{2n} - 1$ *para cualquier entero positivo* n.

Ejercicio 2.5 *Dados* $n+1$ *enteros del conjunto* $\{1, ..., 2n\}$ *siempre hay uno que divide a otro.*

Ejercicio 2.6 *Demuestra que la identidad*

$$4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + ... + 3 \cdot 4^n = 4^{n+1}$$

se satisface para todo entero positivo n.

Ejercicio 2.7 *Demuestra que cualquier natural* n *cumple que*

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Ejercicio 2.8 *Demuestra que un triángulo isósceles con un angúlo de* $120°$ *puede ser disectado en* $n \geq 4$ *triángulos semejantes a él.*

Ejercicio 2.9 *Demuestra que* 133 *divide a* $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ *para cualquier* n *entero positivo.*

Ejercicio 2.10 *¿Será cierto que* $7^n > n^2$ *para* $n > 2$ *entero?*

Ejercicio 2.11 *Se divide el plano en regiones por* n *rectas. Demuestra que es posible colorear estas regiones de dos colores de tal forma que no haya dos regiones que compartan una frontera que estén pintadas del mismo color.*

Ejercicio 2.12 *Demuestra que* $x^2 + y^2 = z^n$ *tiene una solución* (x, y, z) *en enteros positivos para* $n = 1, 2, 3, ...$

Ejercicio 2.13 *Calcula la suma de la siguiente expresión en términos de* n

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ejercicio 2.14 *Demuestra que para todo entero positivo* n*, se satisface*

$$1 \cdot 1! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Ejercicio 2.15 *Sean* $F_1, F_2, ...$ *los números de Fibonacci, definidos por* $F_1 = F_2 = 1$ *y* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *para* $n \geq 3$*. Demuestra que* $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Ejercicio 2.16 *Sean* $F_1, F_2, ...$ *los números de Fibonacci definidos por el problema anterior. Demuestra que* $F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + ... + F_n$.

Ejercicio 2.17 *Encuentra los valores de* a_n *donde* $a_1 = 1$ *y que para* $n \geq 2$ *se satisface* $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2$.

Ejercicio 2.18 *Demuestra que un tablero de* $2^n \times 2^n$ *con una esquina removida puede ser cubierta con triminos L, es decir, con piezas formadas de 3 cuadritos en forma de L.*

Ejercicio 2.19 *Sean* $x_1, x_2, ..., x_n$ *con* $n \geq 4$ *reales positivos tales que* $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$*. Demuestra que* $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2.20 *Demuestra que todo* n *natural cumple la desigualdad*

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)...\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) < 3 - \frac{1}{n}$$

Ejercicio 2.21 *Sea* n *un entero positivo. Encuentra las raíces del polinomio*

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}.$$

Ejercicio 2.22 *Demuestra que 35 divide a* $6^{2n} - 1$ *para todo* n *entero positivo.*

Ejercicio 2.23 *Sea* P *un polígono convexo de* $n \geq 3$ *lados. Se trazan diagonales del polígono bajo la condición de que no hayan 2 diagonales que se intersecten dentro del polígono. Demuestra que siempre existen 2 vértices de* P *que no son extremos de ninguna de esas diagonales.*

Ejercicio 2.24 *Sea* n *un entero positivo. Prueba que el número* $2^{2^n} - 1$ *tiene al menos* n *factores primos distintos.*

Ejercicio 2.25 *Encuentra los valores de a_n si $a_1 = 1$ y para cada $n \geq 2$ se cumple que*

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} = \frac{n\sqrt{a_{n+1}}}{2}$$

Ejercicio 2.26 *Encuentra el error de la siguiente demostración.*

Supongamos que para $n \geq 2$ se tienen n monedas de las cuales exactamente una de ellas es falsa y es más ligera que las demás. Si tenemos una balanza de dos platos para pesar las monedas, afirmamos que podemos identificar a la moneda falsa en a lo más 4 pesadas.

Demostración: En efecto, para $n = 2$, basta con colocar a las monedas en cada plato de la balanza y la que queda en el plato que sube será la moneda falsa y solo se requiere 1 pesada. Supongamos que la afirmación es verdadera para k monedas, si tenemos $k + 1$ monedas con exactamente una de ellas falsa, entonces retiramos una moneda y de la hipótesis de inducción si de las k monedas restantes se encuentra la moneda falsa, entonces en a lo más 4 pesadas podemos identificarla, si no se logra identificar, entonces es la moneda que retiramos y se concluye el resultado.

Ejercicio 2.27 *En referencia al problema anterior. Supongase que se tienen 3^n monedas para $n \geq 1$ y demuestra que se puede identificar a la moneda falsa en n pesadas.*

Ejercicio 2.28 *Los vértices de un polígono convexo se colorean de al menos 3 colores tal que no haya dos vértices adyacentes del mismo color. Demuestra que es posible disectar el polígono en triángulos usando diagonales que no se intersectan y tal que sus extremos tengan el mismo color.*

Ejercicio 2.29 *Demuestra que un polígono convexo de n lados tiene un número de total de $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.*

Ejercicio 2.30 *El juego de Nim se juega entre dos personas con las siguientes reglas: Se pone un número n de fichas iguales sobre la mesa. Cada jugador en su turno puede tomar $1, 2$ ó 3 fichas. El jugador que toma la última ficha pierde. Demuestre que el primer jugador tiene una estrategia ganadora siempre y cuando $n \neq 4k + 1$ algún entero k.*