Inducción al pensamiento Matemático

Porfirio Toledo Hernández / Francisco Gabriel Hernandez Zamora / Brenda Tapia Santos / Raquiel Rufino López Martínez
Víctor Pérez García / María de Jesús García Santiago / Ernesto Efrén Del Moral Ventura

Inducción al pensamiento matemático

Porfirio Toledo Hernández
Francisco Gabriel Hernández Zamora
Brenda Tapia Santos
Raquel Rufino López Martínez
Víctor Pérez García
María de Jesús García Santiago
Ernesto Efrén Del Moral Ventura

Gobierno del Estado de Veracruz

Título:	Inducción al pensamiento matemático / Porfirio Toledo Hernández, Francisco Gabriel Hernández Zamora, Brenda Tapia Santos, Raquiel Rufino López Martínez, Víctor Pérez García, María de Jesús García Santiago, Ernesto Efrén Del Moral Ventura
Autores:	Porfirio Toledo Hernández, Francisco Gabriel Hernández Zamora, Brenda Tapia Santos, Raquiel Rufino López Martínez, Víctor Pérez García, María de Jesús García Santiago, Ernesto Efrén Del Moral Ventura
Edición:	Primera edición.
Descripción física:	184 páginas.
Notas:	Bibliografía: páginas 181-184.
ISBN:	978-607-725-383-9

Corrección de estilo: Elizabeth Polanco Galindo
Guadalupe Baxin Baxin
Alejandro Arnaud Méndez

Diseño de portada: Anna Lenz Rivera
Carlos David Martínez Chávez

Primera edición, marzo de 2020
Secretaría de Educación de Veracruz
ISBN: 978-607-725-383-9

Editado en México

Índice general

Presentación.

Con la transición administrativa que hubo en la entidad, se llega a dilucidar que *“La misión de la Secretaría de Educación de Veracruz es coordinar su política educativa y organizar su sistema educativo en todos sus niveles y modalidades, a partir de los términos que establece la Constitución Política de la entidad y las leyes aplicables. Asimismo, desarrollar, supervisar y coordinar programas educativos, científicos y deportivos, a fin de promover, fomentar y procurar el progreso y bienestar de los veracruzanos”.*

Su visión *“es poseer un sistema educativo de calidad que opere con apego estricto al marco normativo que lo rige; que sea incluyente, tolerante y abierto a la participación social, democrática y transparente; respete la diversidad cultural y constituya una vía legítima de movilidad social y garante de convivencia armónica, así como una herramienta eficaz para el crecimiento y desarrollo sostenible en beneficio de la sociedad veracruzana” (Gaceta Oficial del Estado, Núm. Ext. 240, 2017).*

Por su parte, la Subsecretaría de Educación Básica *“es una unidad administrativa de la Secretaría de Educación de Veracruz, que tiene como propósito planear, programar, organizar, dirigir y evaluar las actividades, programas y servicios educativos, para ofrecer educación básica a los veracruzanos, con calidad, equidad y pertinencia” (SEV, s/f).*

Aunado a lo anterior, la Subsecretaría de Educación Básica, tiene como objetivo atender la capacitación y actualización de los docentes en servicio, que coadyuve a elevar la calidad del aprendizaje de los estudiantes.

Por tal motivo, se ha creado el proyecto **“Matemáticas para tod@s”**, con el objetivo de incentivar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en secundaria, a través de la capacitación y colaboración de los profesores, aplicando el enfoque de enseñanza plasmado en el programa de la asignatura y en un entorno de aprendizaje que incluya la participación activa de la comunidad educativa de Veracruz.

Sus principios se fundamentan en el decreto emitido en el *Diario Oficial de la Federación* el 15 de mayo de 2019 y son:

Reconocer al magisterio como ente principal de la transformación educativa en la sociedad veracruzana.

Respetar el derecho de los docentes, garantizándoles una constante actualización de sus procesos pedagógicos y fortaleciendo sus conocimientos.

Reforzar el trabajo con docentes, a través de la formación permanente, capacitación y actualización, retroalimentadas por evaluaciones diagnósticas, *para cumplir los objetivos y propósitos del sistema educativo nacional.*

Como parte de la Supremacía de los Derechos Humanos, el programa *Matemáticas para tod@s* basa sus acciones en promover, respetar, proteger y garantizar la prerrogativa en materia de educación, y a la luz de la reforma constitucional del artículo 3º **(La nueva escuela mexicana)**, indica que en los planes y programas de estudio se va a ponderar la enseñanza de las matemáticas.

El proyecto ofreció dentro de sus primeras acciones el curso "Inducción al Pensamiento Matemático" en convenio con la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana (UV), diseñado para fortalecer el conocimiento disciplinar de las matemáticas en los docentes de nivel secundaria que imparten esta asignatura. El propósito original de este libro fue servir como texto de referencia para dicho curso, el contenido está dirigido a los maestros de secundaria que requieran consolidar sus conocimientos en la materia, así como precisar métodos de enseñanza, de tal modo que les permita optimizar sus técnicas educativas en clase y, en consecuencia, elevar el nivel de aprendizaje de sus alumnos.

Introducción.

El objetivo de este libro es presentar a las matemáticas como un área del conocimiento humano en donde se fomenta el uso de la lógica, razonamiento e imaginación, particularmente en los docentes y alumnos de secundaria, a través de la resolución de acertijos y problemas. Se presenta material alternativo, distinto al tradicional que promueve la repetición, mecanización y memorización de fórmulas y algoritmos, con el propósito de que el proceso de enseñanza aprendizaje resulte atractivo y que el contenido sea novedoso y significativo para el estudiante.

En el ***Capítulo 1.*** *Definiciones y resultados básicos,* se presentan las definiciones de diferentes conceptos que se requiere consolidar en los docentes de secundaria, ya que son fundamentales para la correcta resolución de problemas matemáticos. Además, se muestran teoremas y proposiciones de las áreas de lógica matemática, aritmética, geometría, técnicas elementales de conteo, teoría de números y álgebra.

Cada uno de ellos forman parte del programa de estudios de la asignatura de matemáticas en secundaria (P. y P. E. 2011 y 2017), a excepción de la sección lógica matemática, pero se integra como un aprendizaje fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático. La manera como se abordan estos resultados es formal y axiomática, con el fin de acercar a los docentes a un mejor manejo de la materia.

En el ***Capítulo 2.*** *Ejercicios de práctica,* se propone un listado de actividades con diferente grado de dificultad, cada uno con, al menos, una propuesta de solución.

Cabe señalar que estos ejercicios son una contribución colectiva de especialistas en la asignatura de matemáticas y estudiantes universitarios del estado de Veracruz.

Respecto a los *ejercicios del nivel básico,* se pretende que con ellos se tenga un acercamiento a las matemáticas y aplicar conocimientos elementales revisados en el *Capítulo 1.*

En los *ejercicios intermedios,* el nivel de complejidad aumenta en relación al nivel básico; es necesario la aplicación de diversas estrategias para su solución, tomando en cuenta algunas de las utilizadas en los ejercicios del nivel anterior.

En los *ejercicios del nivel alto* se requiere no sólo de diversas estrategias y resultados, sino el manejo más profundo de los conceptos matemáticos expuestos en el capítulo anterior.

En el ***Capítulo 3.*** *Lista de problemas,* se presenta un repertorio de problemas que tienen como finalidad poner en juego las diferentes habilidades del pensamiento matemático, que hasta ahora el docente ha desarrollado a través de la adquisición de los conceptos y la resolución de los ejercicios propuestos en los capítulos 1 y 2.

Se recomienda reflexionar acerca del sentido de los enunciados de los problemas, crear conjeturas, aplicarlas y en caso de que no sean adecuadas, reformularlas; de tal manera que todo ello les conduzca a resolver el problema. Incluso, es una oportunidad para compartir y confrontar de forma colectiva.

En el ***Capítulo 4.*** *Soluciones a la lista de problemas,* se presentan todas las soluciones a los problemas planteados en el *Capítulo 3,* con la finalidad de que el lector verifique sus respuestas y enriquezca sus estrategias al compararlas con las que están incluidas. Las soluciones planteadas son propuestas que pueden servir como referencia; sin embargo, con base en la creatividad, se pueden encontrar soluciones alternativas, siempre y cuando estén correctamente sustentadas. Los autores esperamos que el contenido de este libro sea de utilidad para los docentes veracruzanos, y todos aquéllos que encuentren en el presente instrumento una herramienta favorable a la enseñanza y aprendizaje en distintos momentos de su actividad educativa, además de estimular en el lector el interés por el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos.

1.1. Lógica matemática y aritmética

1. 1. 1. Traducción de proposiciones

Podemos pensar que el propósito de la lógica matemática es el de deducir premisas verdaderas de otras que sabemos que son verdaderas. Por ejemplo, de las afirmaciones verdaderas “todos los perros tienen cuatro patas” y “Firulais es un perro” podemos afirmar que “Firulais tiene cuatro patas”. De premisas verdaderas no necesariamente se concluye que una premisa sea verdadera (aunque lo sea), es necesario que las premisas obliguen a la conclusión; por ejemplo, las dos premisas siguientes son verdaderas: “Todos los perros tienen cuatro patas” y “los patos no son perros”, pero con esto no podemos concluir que “los patos no tienen cuatro patas”, aunque en realidad la última premisa es verdadera.

Para formalizar lo que se ha expuesto comenzaremos por introducir algunos conceptos, operadores en premisas y métodos de inferencia que reforzaremos a través de muchos ejemplos.

Una herramienta importante para implementar el método deductivo es el transformar proposiciones desarrolladas en lenguaje común en proposiciones escritas en un lenguaje lógico matemático.

Definición 1. Una **proposición o premisa** es una frase que afirma o niega algo.

De acuerdo con la definición, expresiones de admiración, interrogación e imperativas no son proposiciones; mientras que las siguientes son algunos ejemplos de ellas:

1. Toda ave tiene plumas. (Categórica)

2. Algunas hormigas vuelan. (Categórica)

3. Si x es una tortuga, entonces x es un anfibio. (Condicional)

4. x es un libro y x es caro. (Conjunción)

5. x es mamífero o x es acuático. (Disyunción)

6. No es cierto que x es una tortuga. (Negación)

7. Para todo x, x es mamífero. (Cuantificación)

8. Existe x tal que x es grande. (Cuantificación)

En las proposiciones 3 - 8 aparecen subrayadas las componentes respectivas. La primera componente de una hipotética, o **condicional**, se llama **hipótesis**; la segunda, **tesis**. En el ejemplo 7 el cuantificador se llama universal, pues se hace una afirmación para todo x, mientras que en el ejemplo 8 el cuantificador se llama existencial, pues se afirma que algo es grande.

En los siguientes ejemplos debajo de cada proposición categórica está escrito el significado de su **traducción analítica**:

(a) Todo metal es pesado.
(a') Si tenemos un objeto que es de metal, entonces dicho objeto es pesado.

(b) Ningún metal es pesado.
(b') Si tenemos un objeto que es de metal, entonces dicho objeto no es pesado.

(c) Algún metal es pesado.
(c') Existe un metal que es pesado.

(d) Algún metal no es pesado.
(d') Existe un metal que no es pesado.

(e) Todo cambia.
(e') Cada cosa cambia.

Cuando comenzamos a estudiar de manera formal la lógica matemática, es importante practicar mucho hasta dominar los temas.

En la siguiente lista, debajo de cada proposición compuesta aparece su negación, en términos de las componentes:

(a) Si Juan es hijo de Concha entonces Juan sabe latín.
(a') Juan es hijo de Concha y Juan no sabe latín.

(b) Pedro juega y Pablo estudia.
(b') Pedro no juega o Pablo no estudia.

(c) Pedro trabaja o Pablo recurre a Juan.
(c’) Pedro no trabaja y Pablo no recurre a Juan.

(d) Pedro no es arquitecto.
(d’) Pedro es arquitecto.

(e) Todo trabajador depende del jefe.
(e’) Algún trabajador no depende del jefe.

(f) Alguien es hermano del jefe.
(f’) Nadie es hermano del jefe.

Según la lista anterior, la negación de una condicional es la conjunción de la hipótesis con la negación de la tesis; la negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de sus componentes; la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de sus componentes; la negación de una negación es la afirmación de su componente; la negación de una cuantificación universal es la cuantificación existencial de la negación de su componente; la negación de una cuantificación existencial es la cuantificación universal de la negación de su componente.

Podemos resumir los ejemplos anteriores en la siguiente tabla:

Proposición	Negación
P	$\neg P$
$P \Rightarrow Q$	P y $\neg Q$
P ó Q	$\neg P$ y $\neg Q$
P y Q	$\neg P$ ó $\neg Q$
Universal	Existencial
Existencial	Universal

1. 1. 2. Definiciones implícitas

Una **definición implícita** de un término es una lista de proposiciones (propiedades convencionales), llamadas **axiomas**, que contienen al término.

Para ejemplificar, tomamos como definición implícita de los términos *veraz*, *mitómano* y *normal*, y adoptamos los siguientes axiomas:

1. Si una persona es veraz, y dicha persona dice que sucede tal cosa, entonces sucede tal cosa.

2. Si una persona es mitómano, y dicha persona dice que sucede tal cosa, entonces no sucede tal cosa.

3. Si una persona es veraz, entonces dicha persona no es mitómano. Si una persona es mitómano, entonces dicha persona no es normal. Si una persona es normal, entonces dicha persona no es veraz.

4. Una persona es veraz o dicha persona es mitómano o dicha persona es normal.

De acuerdo con las propiedades que definen los conceptos anteriores, *veraz* es el que siempre dice la verdad, *mitómano* el que siempre miente, *normal* el que no es veraz ni mitómano. Por la propiedad 3, las categorías de *veraz*, *mitómano* y *normal* se excluyen mutuamente. Por la propiedad 4, dichas categorías se complementan entre sí.

Así pues, las definiciones implícitas son como las adivinanzas: no dicen lo que el objeto es, sino qué propiedades tiene. Toda definición implícita obliga a interpretar los términos de tal manera que valgan los axiomas. Por eso se dice que los axiomas son *válidos por definición*.

Ejemplo 1. Un *giro de* P es cualquier frase cuya negación coincide con la negación de P. A continuación, debajo de cada axioma de 3, aparece su giro:

(a) Si Pedro es veraz entonces Pedro no es mitómano.
(a') Si Pedro es mitómano entonces Pedro no es veraz.

(b) Si Juan es mitómano entonces Juan no es normal.
(b') Si Juan es normal entonces Juan no es mitómano.

(c) Si Pablo es normal entonces Pablo no es veraz.
(c') Si Pablo es veraz entonces Pablo no es normal.

Compruebe que cada una de las proposiciones anteriores tienen la misma negación que su giro.

Otras inferencias se basan en los **silogismos hipotéticos**, que son tautologías construidas a partir de los siguientes esquemas, donde P, Q, R representan proposiciones cualesquiera:

1. (**Modus ponens**)

   Suponer que vale: $P \Rightarrow Q$,
   y que también vale: P
   concluimos que vale: Q.

2. (**Modus tollens**)

   Suponer que vale: $P \Rightarrow Q$,
   y que también vale: $\neg Q$
   concluimos que vale: $\neg P$.

3. (**Reducción por casos**)

   Suponer que vale: $P \Rightarrow Q$,
   y que también vale: $\neg P \Rightarrow Q$
   concluimos que vale: Q.

4. (**Reducción por contradicción o al absurdo**)

Suponer que vale:	$P \Rightarrow Q$,
y que también vale:	$P \Rightarrow \neg Q$
concluimos que vale:	$\neg P$.

5. (**Transitividad**)

Suponer que vale:	$P \Rightarrow Q$,
y que también vale:	$Q \Rightarrow R$
concluimos que vale:	$P \Rightarrow R$.

1. 1. 3. Deducciones

Un **Resultado conocido** es toda proposición cuya validez se ha demostrado antes, o que es un axioma.

Una *deducción de P a partir de H* es una cadena de proposiciones

$$P_1, P_2, \ldots, P_n,$$

llamadas *pasos*, tales que P_n es P, y cada paso es un resultado conocido, o es H, o se infiere de pasos anteriores mediante algún resultado conocido.

Toda deducción de P a partir de H es una **demostración directa** de la validez de la condicional. *Si* H *entonces* P.

1. 1. 4. Reducción al absurdo

El método de demostración por **reducción al absurdo**, llamado también **método indirecto**, consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere demostrar, y deducir de ahí una contradicción. Por ejemplo, para demostrar P, por reducción al absurdo, partimos de su negación $\neg P$, y deducimos de ella dos proposiciones contradictorias Q y $\neg Q$. Al hacer esto queda demostrada la imposibilidad de $\neg P$, de donde se desprende la necesaria validez de P.

Ejemplo 2. Probar la siguiente premisa: Alex dice que Beto es mitómano. Beto dice que Alex es veraz. Demostrar que *Alex no es veraz*, y que *si Beto es mitómano entonces Alex es normal*.
Prueba por reducción al absurdo de que *Alex no es veraz.*

1. Alex es veraz. $\neg$
2. Alex dice que Beto es mitómano. Dato
3. Beto es mitómano. (1)(2)
4. Beto dice que Alex es veraz. Dato
5. Alex no es veraz. (3)(4)

Contradicción: (1) y (5).

Prueba por reducción al absurdo de que *si Beto es mitómano, entonces Alex es normal.*

1. Beto es mitómano y Alex no es normal. $\neg$
2. Beto es mitómano. (1)
3. Beto dice que Alex es veraz. Dato
4. Alex no es veraz. (2)(3)
5. Alex no es normal. (1)
6. Alex es mitómano. (4)(5)
7. Alex dice que Beto es mitómano. Dato
8. Beto no es mitómano. (6)(7)

Contradicción: (2) y (8).

1. 1. 5. Demostraciones directas

Todas las proposiciones sobre veraces y mitómanos, que hemos demostrado por reducción al absurdo, se pueden demostrar también de manera directa. Dejamos como ejercicio trabajar los ejemplos y ejercicios de la sección anterior y desarrollamos otro par de ejemplos.

Ejemplo 3. Con el fin de ejemplificar una demostración directa probemos la siguiente premisa.

Si ningún socio de Juan fuma y Pedro es socio de Juan, entonces Pedro no fuma.
Demostración:

1. Ningún socio de Juan fuma y Pedro es socio de Juan. Hpt.
2. Ningún socio de Juan fuma. (1)
3. Si una persona es socio de Juan, entonces dicha persona no fuma. (2)
4. Si Pedro es socio de Juan, entonces Pedro no fuma. (3)
5. Pedro es socio de Juan. (1)
6. Pedro no fuma. (4)(5)

A la derecha de cada paso aparece su *registro*: Hpt. si es la hipótesis, (1) si se infiere de (1), Def. si vale por definición, (4)(5) si se infiere de los pasos (4) y (5).

La inferencia del paso (1) al (2) se debe a que es una parte de la hipótesis.

La inferencia de (2) a (3) es válida porque (3) es la traducción analítica de (2).

La inferencia de (3) a (4) es válida porque es una tautología descendente de lo general a lo particular: lo que (3) dice de una persona –cuantificador universal implícito–, (4) lo dice de Pedro.

La inferencia de (5) se sigue de (1) como parte de la hipótesis.

La inferencia de (6) se sigue de (4) y (5) por Modus ponens.

Ejemplo 4. Alex dice que Beto es mitómano. Beto dice que Carlos es mitómano. Carlos dice que Alex es mitómano.

Prueba que si Alex es mitómano, entonces Beto es normal.

Demostración directa:

1. Alex es mitómano. Hpt.
2. Alex dice que Beto es mitómano. Dato
3. Beto no es mitómano. (1)(2)
4. Carlos dice que Alex es mitómano. Dato
5. Carlos no es mitómano. (1)(4)
6. Beto dice que Carlos es mitómano. Dato
7. Beto no es veraz. (5)(6)
8. Beto es normal. (3)(7)

Ejemplo 5. Alex dice que Beto es mitómano. Beto dice que Carlos es mitómano. Carlos dice que Alex es mitómano.

Prueba que si Alex es veraz entonces Carlos es normal.

Demostración directa:

1. Alex es veraz. Hpt.
2. Alex dice que Beto es mitómano. Dato
3. Beto es mitómano. (1)(2)
4. Beto dice que Carlos es mitómano. Dato
5. Carlos no es mitómano. (3)(4)
6. Carlos dice que Alex es mitómano. Dato
7. Alex no es mitómano. (1)
8. Carlos no es veraz. (6)(7)
9. Carlos es normal. (5)(8)

Observe que en ambas demostraciones, para aprovechar la hipótesis, se escribe como segundo paso lo que dice Alex, y se prosigue en la forma ya conocida. Una vez agotado este recurso, volvemos a aprovechar la hipótesis, escribiendo ahora lo que se dice de Alex.

Ejemplo 6. Ernesto es cretense. Ernesto dice que todo cretense es mitómano. Demostrar que *no todo cretense es mitómano.*
Demostración indirecta:

1. Todo cretense es mitómano. $\neg$
2. Si una persona es cretence, entonces dicha persona es mitómano. (1)
3. Si Ernesto es cretense entonces Ernesto es mitómano. (2)
4. Ernesto es cretense. Dato
5. Ernesto es mitómano. (3)(4)
6. Ernesto dice que todo cretense es mitómano. Dato
7. No todo cretense es mitómano. (5)(6)

Contradicción: (1) y (7)

Ejemplo 7. Para demostrar directamente la premisa del ejemplo anterior, procedemos por casos.
Caso 1: Si Ernesto es mitómano, entonces no todo cretense es mitómano.

1. Ernesto es mitómano. Hpt.
2. Ernesto dice que todo cretense es mitómano. Dato
3. No todo cretense es mitómano. (1)(2)

Caso 2: Si Ernesto no es mitómano entonces no todo cretense es mitómano.

1. Ernesto no es mitómano. Hpt.
2. Ernesto es cretense. Dato
3. Ernesto es cretense y Ernesto no es mitómano. (1)(2)
4. Existe una persona que es cretense y no es mitómano. (3)
5. Algún cretense no es mitómano. (4)
6. No todo cretense es mitómano. (5)

1. 1. 6. Razones y proporciones

El hecho de que Pedro lea 400 palabras por minuto no nos dice mucho; sin embargo, al compararlo con un lector promedio, quien lee 250 palabras por minuto, podemos pensar que Pedro lee considerablemente más rápido que el promedio. Nos gustaría conocer qué tanto más rápido lee Pedro respecto al lector promedio; para ello calculamos el cociente de los promedios $\frac{400}{250} = \frac{8}{5} = 1.6$. Lo cual nos dice que Pedro lee 8 palabras cuando el lector promedio lee 5 palabras, o bien que Pedro lee 1.6 veces más rápido que el lector promedio. Mientras que si Juan lee 200 palabras por minuto, entonces Juan lee más lento que el lector promedio, siendo $\frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 0.8$ veces más lento que el lector promedio.

En el ejemplo anterior estamos comparando dos números por medio de un cociente o razón, así pues, una **razón** es una comparación de dos cantidades del mismo tipo.

Como las razones son fracciones, podemos aplicar a las razones todas las operaciones conocidas de fracciones, como lo hicimos antes con la simplificación. Sin embargo, la diferencia consiste en la interpretación que estamos dando; a saber que una fracción es una cantidad (el valor del cociente), mientras que una razón es la comparación de dos cantidades.

Una **proporción** es una ecuación en la cual los dos lados de la igualdad son razones, es decir, que tenemos dos maneras de escribir la misma razón. Sólo estamos comparando a distinta escala (o proporción). En nuestro primer ejemplo, las razones $\frac{400}{250}$ y $\frac{8}{5}$ representan lo mismo (qué tan rápido lee Pedro respecto al lector promedio). En este caso la segunda fracción es más simple de entender. Además, es de suma importancia el considerar proporciones, pues si conocemos tres cantidades de una proporción, entonces podemos conocer la cuarta haciendo un despeje, lo cual se conoce como regla de tres.

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, los números a y d se llaman **extremos** y los números b y c se llaman **medios** de la proporción.

Las proporciones aparecen a menudo en geometría, por ejemplo si dos triángulos ABC y DEF son semejantes, digamos con lados proporcionales $AB = 4$ con $DE = 8$ y $AC = 3$ con el lado desconocido $DF = x$; la relación de proporcionalidad es $\frac{4}{3} = \frac{8}{x}$, de donde despejamos para obtener $x = 6$.

Cuando los medios de una proporción coinciden, digamos que valen m, es decir $b = c = m$, diremos que m es la media proporcional entre los extremos de la proporción. En este caso la proporción queda como $\frac{a}{m} = \frac{m}{d}$, de donde despejando tenemos $m = \sqrt{ad}$.

Ejemplo 8. Si Pablo lee 1.8 veces más rápido que un lector promedio, ¿cuántas palabras lee Pablo en un minuto?

Para resolver el problema, le llamaremos x a la cantidad desconocida de palabras que lee Pablo por minuto. La razón 1.8 debe coincidir con la razón de palabras por minuto que lee Pablo respecto al lector promedio: $\frac{x}{250}$, por lo que de la ecuación $1.8 = \frac{x}{250}$ despejamos x para obtener $x = 450$, es decir que Pablo lee 450 palabras por minuto.

1. 1. 7. Porcentajes

La palabra porciento viene del latín, originalmente descrito como “por cada cien”. Un porcentaje describe la cantidad existente de cada 100, es decir nos da un valor relativo, por ejemplo el $25\,\%$ de los adultos toma café con leche, no nos dice el número de personas adultas que toman café con leche, si no que nos da una idea de qué parte del total de adultos toman café con leche. Los porcentajes se utilizan para calcular tus impuestos, intereses, artículos en oferta, incrementos en salarios y propinas, entre otros.

Puesto que porcentaje significa cantidad de cada cien, un porcentaje se puede ver como una división entre cien, por ejemplo $25\,\%$ de x es $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ de x, es decir, $0.25x$. Así, tanto $\frac{1}{4}x$ como $0.25x$ representan el $25\,\%$ de x.

Ejemplo 9. En 2018 una automotriz vendió el $30\,\%$ más de coches que los que vendió en 2017. ¿Cuál es la menor cantidad de coches que pudo haber vendido la automotriz en 2018 si al menos vendió 1000?

Vamos a denotar por x el número de coches vendidos por la automotriz en 2018 y por y el número de coches vendidos en 2017. Como se vendió el $30\,\%$ más en 2018 que en 2017, se tiene que x es y más el $30\,\%$ de y, es decir, $x = 1.3y$, con $x \geq 1000$. La relación la podemos escribir también en fracciones como $x = \frac{13}{10}y$, de donde el entero x más pequeño posible ocurre cuando y es un entero lo más pequeño posible que sea múltiplo de 10, nos aproximamos como en la siguiente tabla.

y	1000	800	790	780	770	760
x	1300	1040	1027	1014	1001	988

Así, el menor número posible de coches vendidos por la automotriz es 1001.

Cuando ahorramos en un banco, el interés que ganamos en un periodo, digamos anual, generalmente es un interés compuesto, donde los intereses obtenidos en cada periodo (que pueden ser días, meses, años, etcétera) se suman al capital inicial para generar nuevos intereses. Por ejemplo, si depositamos $\$1000$ a un $3\,\%$ de intereses anuales, al cabo del primer año el banco nos dará $\$1000$ más el $3\,\%$ de $\$1000$ que es $\$30$, es decir, recibimos $\$1030$. Si dejamos en el banco el ahorro y los intereses ganados, al segundo año tendremos $\$1030$ más el $3\,\%$ de intereses de esos $\$1030$, es decir, $\$30.90$ más. En total, al cabo de dos años tendremos $\$1060.90$. ¿Cuánto recibiremos a los diez años? Antes de contestar la pregunta consideraremos la situación en general.

Si X es la cantidad inicial que invertimos a una tasa del $r\,\%$, entonces en el primer año tendremos: $X + Xr\,\% = X(1 + \frac{r}{100})$.

Ahora aplicamos la fórmula anterior para el segundo año, con capital inicial $X(1+\frac{r}{100})$. En el segundo año tendremos: $X(1+\frac{r}{100})(1+\frac{r}{100}) = X(1+\frac{r}{100})^2$.

A los k años tendremos: $C_k = X(1+\frac{r}{100})^k$. Regresamos a nuestro ejemplo anterior para ver que a los diez años recibiremos $1000(1 + \frac{3}{100})^{10} = \$1343.92$.

La fórmula que encontramos para calcular la cantidad de dinero que tendremos a los k años (o periodos que se estén considerando) tiene cuatro parámetros, por lo que si conocemos tres de ellos, podemos determinar el cuarto.

Ejemplo 10. Laura desea invertir su aguinaldo de $\$28000$ para que al cabo de 5 años tenga $\$40000$. ¿A qué taza de interés semestral mínima debe hacer dicha inversión?

Primeramente notamos que el periodo es semestral y que en 5 años hay 10 semestres, por lo que $k = 10$. En la fórmula $C_k = X(1 + \frac{r}{100})^k$ se tienen los siguientes parámetros conocidos del problema: $k = 10$, $X = \$28000$ y $C_{10} = \$40000$. Así, basta despejar r de la ecuación $40000 = 28000(1 + \frac{r}{100})^{10}$, de donde $r = 3.6$ aproximadamente, es decir, que Laura debe invertir su dinero por lo menos al $3.7\,\%$ de interés semestral.

1. 1. 8. Progresiones aritméticas y geométricas

Una **sucesión** es un conjunto de números ordenados. Cada uno de los números en la sucesión se llama **término**. Por ejemplo, podemos considerar la sucesión de números positivos pares $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ o la sucesión de años en que ha habido elecciones presidenciales en México:

$$\{1946, 1952, 9158, 1964, 1970, 1976, 1982, 1988, 1994, 2000, 2006, 2012, 2018\}.$$

En el primer ejemplo, la sucesión es infinita y en el segundo la sucesión es finita. Cuando una sucesión tiene muchos términos, es importante tener una fórmula que los describa. Para el caso de los números pares podemos escribir cada término como $2n$, siendo n un número entero positivo. Para el caso de las elecciones presidenciales, podemos escribir cada término como $1940+6n$, donde n recorre los enteros positivos del 1 al 13.

La suma de los términos de una sucesión se llama **serie**. En los siguientes párrafos estudiaremos unos tipos especiales de sucesiones y series.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tal que dos términos consecutivos siempre difieren por una constante llamada la diferencia de la progresión.

El segundo de nuestros ejemplos de sucesiones, el de años en que ha habido elecciones presidenciales, se trata de una progresión aritmética, dado que vamos aumentando 6 años a cada término para obtener el siguiente.

Así, una progresión aritmética se puede escribir en la siguiente forma:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d, \ldots$$

donde el a_1 se llama **primer término** y d es la diferencia constante de dos términos consecutivos. También observamos que podemos representar el n término de la sucesión como:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Si queremos calcular la suma s_n de los primeros n términos de una progresión aritmética, tenemos:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 1)d].$$

Que podemos escribir, en el orden opuesto restando d desde a_n, como sigue:

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d].$$

Para obtener, sumando las dos expresiones:

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n),$$

de donde

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Ejemplo 11. Halla la suma de todos los múltiplos positivos de 3 que son menores que 200.

Observamos que la sucesión es aritmética y se va incrementando de tres en tres, así que $d = 3$ y su primer término es $a_1 = 3$. El último entero múltiplo de 3 y menor que 200 es 198, por lo que $a_n = 198$. Para hallar n, aplicamos la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$, en nuestro caso es $198 = 3 + (n-1)3$, de donde $n = 66$. Finalmente, sustituimos en la fórmula para calcular la suma de una progresión aritmética para obtener $s_n = \frac{66}{2}(3 + 198) = 6633$.

Observación. La suma pedida en el ejemplo anterior se puede obtener también de la fórmula de Gauss:

$$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 198 = 3(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 66) = 3\frac{66 \cdot 67}{2} = 6633.$$

Ejemplo 12. En el local de tacos al pastor de la feria de Coatepec se vendieron 1200 órdenes durante los 16 días que duró la feria. Cada día se vendieron 8 órdenes más que el día anterior. ¿Cuántas órdenes se vendieron el primer día?

Observemos que se trata de una sucesión de números, de órdenes vendidas de tacos al pastor, que es aritmética, pues cada día aumenta en 8 unidades. Con $n = 16$, $d = 8$ y el primer término a_1 se tendrá las relaciones:

$$a_{16} = a_1 + 15 \cdot 8 = a_1 + 120,$$

$$1200 = s_{16} = \frac{16}{2}(a_1 + a_{16}) = 8(a_1 + a_1 + 120) = 8(2a_1 + 120),$$

de donde

$$a_1 = 15.$$

Así, el primer día se vendieron 15 órdenes.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tal que el cociente de un término entre el anterior es una constante llamada **razón** de la progresión.

Por ejemplo, la sucesión $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ es una progresión geométrica con razón igual a 2.

Así, una progresión geométrica se puede describir en la siguiente forma:

$$a_1,\ a_1 \cdot r,\ a_1 \cdot r^2,\ a_1 \cdot r^3, \ldots$$

donde el a_1 se llama **primer término** y r es la razón.

También observamos que podemos representar el n término de la sucesión como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Si queremos calcular la suma s_n de los términos de una progresión geométrica, tenemos:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por r para obtener

$$r \cdot s_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \cdots + a_1 \cdot r^n.$$

Si restamos la primera igualdad de la segunda llegamos a

$$s_n - r \cdot s_n = a_1 - a_1 \cdot r^n.$$

Es decir,

$$s_n(1-r) = a_1 - a_1 \cdot r^n,$$

de donde,

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}.$$

Ejemplo 13. Un recipiente contiene 36 litros de alcohol puro. Se sacan 6 litros y se reemplazan con agua. Si esta operación se efectúa 6 veces, calcular la cantidad de alcohol puro que queda en el recipiente.

En el primer paso, al sustiruir 6 litros de alcohol por agua, sólo nos quedarán 30 litros de alcohol de los 36 litros de la nueva mezcla, es decir que la cantidad de alcohol puro en el recipiente será de $\frac{30}{36}$. En el segundo paso, al sustituir 6 litros de la mezcla por agua, lo que queda de alcohol puro en el recipiente será $\frac{30}{36}(\frac{30}{36}) = (\frac{30}{36})^2$. Continuando el proceso notamos que se trata de una progresión geométrica con razón $\frac{30}{36}$, donde en el primer paso obtuvimos $a_1 = \frac{30}{36}$. Por lo que después de que se efectúa la operación 6 veces tenemos $a_6 = (\frac{30}{36})^6 = 0.335$. Por lo tanto, en la mezcla quedan $0.335 \cdot 36 = 12.06$ litros de alcohol puro.

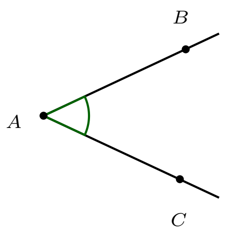
1.2. Geometría

La geometría es una de las ramas más importantes de las matemáticas; Euclides sistematizó el conocimiento de su época estableciendo sus cinco postulados, constituyéndose en uno de los precursores del método axiomático. Esta materia brinda la oportunidad a estudiantes para desarrollar el pensamiento lógico-matemático, pues los resultados geométricos son obtenidos por medio de razonamientos lógicos a partir de ciertos axiomas.

1. 2. 1. Ángulos

Dadas dos rectas en el plano, éstas coinciden o son distintas. En este último caso se cortan en un único punto o no se cortan. Cuando varias rectas pasan a través de un mismo punto decimos que ellas son **concurrentes**.

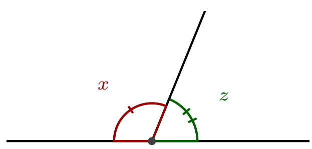
Definición 2. Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. La **bisectriz** de un ángulo es la semirecta que tiene como origen el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.



Dos ángulos son **complementarios** y cada uno es el complemento del otro cuando su suma es igual a $90°$.

Dos ángulos x y z son **suplementarios** si y sólo si su suma es igual a $x + z = 180°$. Diremos que cada uno es el suplemento del otro.

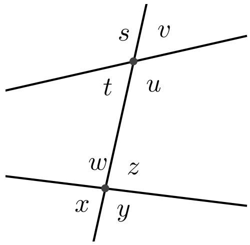
Decimos que dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un mismo vértice, un lado común y son exteriores el uno al otro. En el caso particular de una pareja de ángulos adyacentes x y z subtendidos por una recta a la cual pertenece el vértice común, ellos serán suplementarios.



Si una pareja de ángulos suplementarios son iguales entonces necesariamente tienen que medir $90°$, en este caso diremos que cada uno de ellos es un **ángulo recto**; además, las rectas que generan a estos ángulos son **perpendiculares**.

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son las prolongaciones de los del otro.

Cuando una recta se interseca con otra diferente se forman dos parejas de ángulos opuestos iguales. En un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal, se pueden clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan respecto a los sistemas adyacentes.



Correspondientes
s, w
t, x
u, y
v, z

Alternos	Colaterales	
t, z u, w	t, w u, z	Internos
s, y v, x	s, x v, y	Externos

Dos rectas que se encuentran en el mismo plano son **paralelas** si no se cortan.

Propiedad 1. En todo sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante tenemos:

1. Los ángulos correspondientes son iguales.
2. Los ángulos alternos son iguales.
3. Los ángulos colaterales son suplementarios.

Observación. La propiedad inversa también es cierta, es decir, si en un sistema de rectas, cortadas por una secante, se cumple algunas de las relaciones establecidas anteriormente, entonces esas dos rectas son paralelas.

Ángulos en triángulos

Denotaremos por $\triangle ABC$ al triángulo determinado por sus tres vértices A, B y C no colineales.

Definición 3. Un triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos, es decir, menores de $90°$, se llama **acutángulo**.

Un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un ángulo interior recto, o sea, de $90°$.

Un triángulo que tiene un ángulo obtuso, es decir, mayor de $90°$, se llama **obtusángulo**.

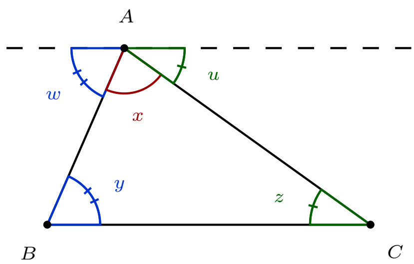
Un triángulo que tiene dos de sus lados iguales se llama **isósceles**.

Un triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama **equilátero** y es un caso particular de un triángulo isósceles.

Un triángulo que no tiene ningún par de lados iguales se llama **escaleno**.

Ejemplo 14. La suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a $180°$.

Para verificar esto, consideremos $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Tracemos una recta paralela al segmento BC que pase por A.



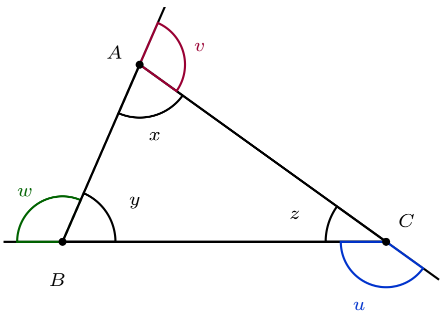
Sabemos que $w + x + u = 180°$. Además, tenemos $w = y$ por ser ángulos alternos internos y, por la misma razón, $u = z$. Sustituyendo los valores de w y u en la primera relación, obtenemos el resultado.

Un **ángulo exterior** de un triángulo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.

Ejemplo 15. A partir de lo anterior se puede ver que en todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir, los que le son opuestos. Además de que la suma de los tres ángulos exteriores (uno en cada vértice) de cualquier triángulo es igual a $360°$.

Para verificar lo anterior, consideremos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$. Sea w el ángulo exterior en el vértice B. Sabemos que $x + y + z = 180°$; y como $w + y = 180°$, entonces:

$$w = x + z.$$



Sean los ángulos exteriores v, w y u, en los vértices A, B y C respectivamente. Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} v &= y + z, \\ w &= x + z, \\ u &= x + y, \end{aligned}$$

de esta manera,

$$v + w + u = 2(x + y + z) = 360°.$$

1. 2. 2. Teorema de Thales

El área de un triángulo $\triangle ABC$ está determinada por las medidas de su base y altura:

$$(\triangle ABC) = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}.$$

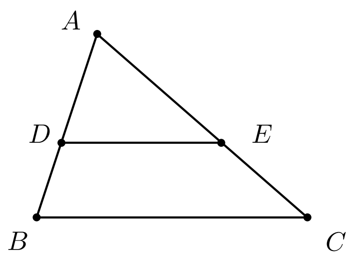
Observación. Para triángulos diferentes, no importa cuánto midan los otros lados, mientras la base y la altura permanezcan iguales, las áreas serán las mismas.

Ejemplo 16. A partir de la fórmula del área es posible verificar que si dos triángulos tienen un par de bases iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las alturas correspondientes. Pues si consideramos los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$, con bases B_1C_1 y B_2C_2, y alturas h_1 y h_2, respectivamente; entonces, asumiendo que $B_1C_1 = B_2C_2$, tenemos:

$$\frac{(\triangle A_1B_1C_1)}{(\triangle A_2B_2C_2)} = \frac{\frac{B_1C_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{B_2C_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Observación. Tenemos un resultado parecido cuando hay bases iguales; es decir, si dos triángulos tienen un par de alturas iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las bases correspondientes.

Teorema 1 (Primer Teorema de Thales). Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros lados, entonces los segmentos formados son proporcionales.



Lo que nos dice este resultado es que para un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, si D y E son puntos en AB y AC, respectivamente, tales que DE es paralelo a BC, entonces se cumple:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demostración. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$, en donde D y E son puntos en AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC. Demostraremos que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Como DE es paralelo a BC, entonces los triángulos $\triangle BED$ y $\triangle CED$ tienen la misma altura respecto a la base común DE, por lo que su área es la misma.

$$(\triangle BED) = (\triangle CED).$$

Como las parejas de triángulos correspondientes tienen las mismas alturas, tenemos que:

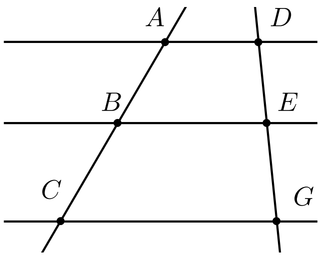
$$\frac{AD}{DB} = \frac{(\triangle ADE)}{(\triangle BED)} = \frac{(\triangle ADE)}{(\triangle CED)} = \frac{AE}{EC}.$$

Observación. Es posible probar que bajo las hipótesis del teorema, también se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC},$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Además, la implicación inversa también es cierta, es decir, si una recta divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales, entonces tal recta es paralela al tercer lado.

Teorema 2 (Segundo Teorema de Thales)**.** Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.



En este caso, si AD, BE y CG son paralelas, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

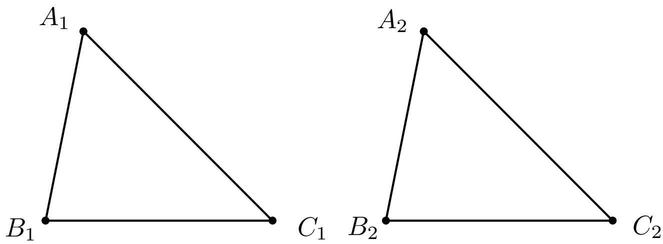
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EG},$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DG}{EG},$$
$$\frac{AC}{AB} = \frac{DG}{DE}.$$

1. 2. 3. Semejanza de triángulos

Congruencia

Definición 4. Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ se llaman **congruentes** o **iguales** si y sólo si tanto sus lados como sus ángulos correspondientes son iguales, es decir:

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_2B_2, \\ B_1C_1 &= B_2C_2, \\ A_1C_1 &= A_2C_2, \\ \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2. \end{aligned}$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son congruentes, lo haremos de la siguiente manera:

$$\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2.$$

Propiedad 2 (Criterios de congruencia). Es suficiente que se cumpla una de las siguientes tres condiciones, para que $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$:

- (ALA) Dos ángulos iguales e igual la pareja de lados comprendidos entre los ángulos, por ejemplo:

  $$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2, A_1B_1 = A_2B_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

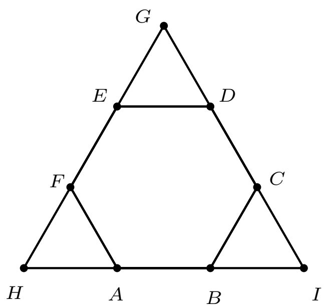
- (LAL) Dos parejas de lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo:

  $$A_1B_1 = A_2B_2, \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 \text{ y } B_1C_1 = B_2C_2.$$

- (LLL) Las tres parejas de lados iguales:

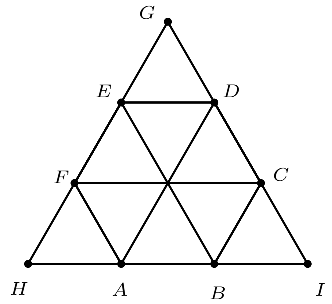
  $$A_1B_1 = A_2B_2, B_1C_1 = B_2C_2 \text{ y } A_1C_1 = A_2C_2.$$

Ejemplo 17. Un hexágono regular $ABCDEF$ tiene un área de $24\ \mathrm{cm}^2$ y está inscrito en un triángulo equilátero $\triangle GHI$ como en la figura. Calcula el área de $\triangle GHI$.



Solución. Las diagonales AD, BE y CF dividen al hexágono en seis triángulos que son congruentes, por el criterio ALA, a los triángulos $\triangle AFH$, $\triangle BIC$ y $\triangle DEG$. Por lo que cada uno de estos triangulitos tiene área 4 cm^2. Por lo tanto el área buscada es:

$$(\triangle GHI) = 24 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2 .$$



Ejemplo 18. Utilizando la congruencia de triángulos, se puede verificar que si un triángulo es isósceles (tiene dos de sus lados iguales), entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a dichos lados.

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$, tal que $AB = AC$. Sea P un punto en BC tal que $\measuredangle BAP = \measuredangle PAC$ (es decir, AP es la bisectriz de $\measuredangle BAC$).

Por el criterio LAL tenemos que:

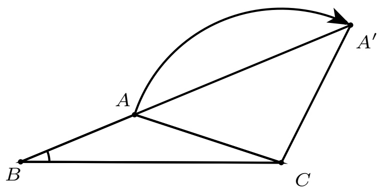
$$\triangle BAP \simeq \triangle CAP$$

de donde, en particular, se cumple:

$$\measuredangle ABP = \measuredangle ACP.$$

Observemos que el segmento AP es, simultáneamente, bisectriz, altura, mediana y mediatriz.

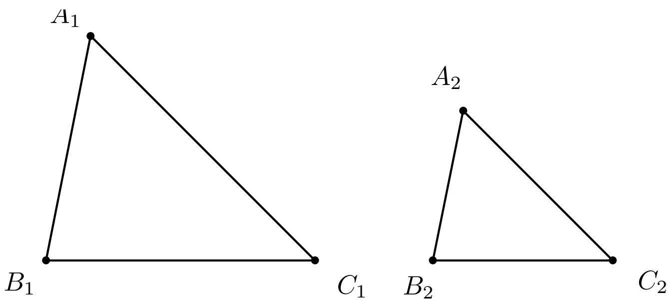
Observación. Es importante que las condiciones se satisfagan como el criterio lo indica, pues es común caer en errores al verificarlas, pero no en el orden requerido. Por ejemplo, en el caso de la figura, tenemos que $AC = AC'$ por lo que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'BC$ tendrían un ángulo y dos lados iguales; sin embargo, ellos no son necesariamente congruentes. Lo anterior no es un contraejemplo para el criterio LAL, pues éste requiere que el ángulo igual esté comprendido entre los lados iguales, lo cual no sucede en este caso.



Semejanza

Definición 5. Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son **semejantes** si y sólo si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, es decir, si cumplen las siguientes relaciones:

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2,$$
$$\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2,$$
$$\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2,$$
$$\tfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \tfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \tfrac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son semejantes, lo haremos de la siguiente manera:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Propiedad 3 (Criterios de semejanza)**.** Es suficiente que se cumpla una de las tres condiciones siguientes, para que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$:

- (AA) Dos ángulos iguales, por ejemplo:

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

- (LAL) Dos parejas de lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

- (LLL) Las tres parejas de lados proporcionales:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Ejemplo 19. Podemos aplicar directamente los criterios de semejanza para ver que el segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera con F y E puntos medios de AB y AC, respectivamente. Tenemos que demostrar que $FE = \frac{1}{2}BC$, y que FE y BC son paralelos.

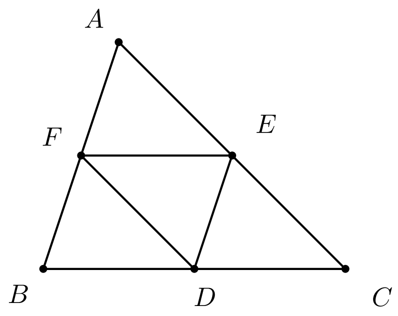
Como $\measuredangle BAC = \measuredangle FAE$ y $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{AC}$, entonces por el criterio LAL, $\triangle ABC \sim \triangle AFE$. Por lo tanto, todos sus lados son proporcionales y así:

$$\frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2},$$

además, los ángulos correspondientes son iguales, por lo que tenemos:

$$\measuredangle AFE = \measuredangle ABC.$$

De donde DE y BC son paralelos, por el Teorema de Thales.

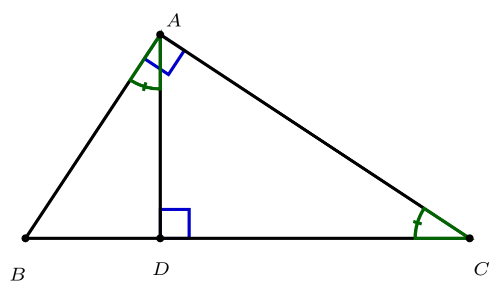


El triángulo formado por los puntos medios de los lados de un triángulo dado se llama el **triángulo medial**.

Observación. Es posible probar que el triángulo medial de cualquier triángulo es siempre semejante a éste y su área es una cuarta parte del área del triángulo original.

Ejemplo 20. Utilizando los criterios de semejanza, podemos ver que la altura trazada desde el vértice correspondiente al ángulo recto en un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos semejantes al original.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, en donde $\measuredangle BAC = 90°$. Sea D el pie de la altura que pasa por A en el lado BC.



Tenemos que:

$$\measuredangle BAD = 90° - \measuredangle DBA = \measuredangle ACD$$

y como $\measuredangle CDA = 90° = \measuredangle ADB$, por el criterio AA tenemos que:

$$\triangle DAC \sim \triangle ABC \sim \triangle DBA.$$

Ejemplo 21. (Teorema de Pitágoras) Lo demostrado anteriormente implica que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos; es decir, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, entonces:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Consideremos un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en A. Si D es el pie de la altura que pasa por A, tenemos que $\triangle DAC \sim \triangle ABC \sim \triangle DBA$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{AC}{BC} &= \frac{DC}{AC}, \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{BD}{AB}. \end{aligned}$$

Utilizando estas relaciones tenemos:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC \cdot BD + BC \cdot DC \\ &= BC(BD + DC) \\ &= BC^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 22. Consideremos la figura del ejemplo 20, en donde $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\measuredangle BAC = 90°$ y D es el pie de la altura que pasa por A en el lado BC. Si $AD = 3$ y $AC = 5$, calcula el valor del área de $\triangle ABD$.

Solución. Por el Teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo $\triangle ADC$, tenemos que:

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Además, por lo visto en el ejemplo 20, los triángulos $\triangle BDA$ y $\triangle ADC$ son semejantes, de donde:

$$\frac{AB}{5} = \frac{3}{4}.$$

Se sigue que $AB = \frac{15}{4}$. Finalmente, tenemos:

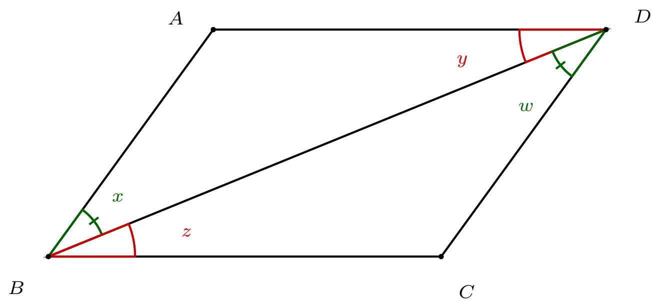
$$(\triangle ABD) = (\triangle ABC) - (\triangle ADC) = \frac{15}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{27}{8}.$$

1. 2. 4. Paralelogramos

Definición 6. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a su opuesto.

Consideremos que tenemos un paralelogramo $ABCD$, en donde AB y BC son paralelos a CD y AD, respectivamente.

Si trazamos la diagonal BD obtenemos dos triángulos, a saber $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$.



Como BC es paralelo a AD entonces $y = z$. Por otra parte, ya que AB y DC son paralelos, $x = w$. Y como el lado BD es compartido por ambos triángulos, por el criterio ALA, tenemos $\triangle ABC \simeq \triangle ACD$. Podemos concluir que $BC = AD$ y $AB = CD$. Además, también tenemos que $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle B = x + z = w + y = \measuredangle D$.

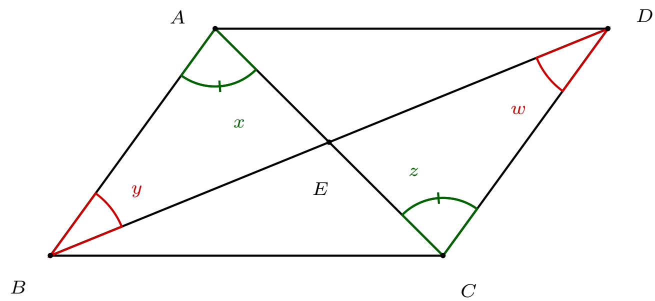
Considerando que los ángulos adyacentes en el paralelogramo son colaterales internos en un sistema de rectas paralelas cortadas por una secante, entonces son ángulos suplementarios.

Podemos concluir que los paralelogramos tienen las siguientes propiedades:

Propiedad 4. En todo paralelogramo se cumplen estas afirmaciones:

1. Los lados opuestos son iguales.
2. Los ángulos opuestos son iguales.
3. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

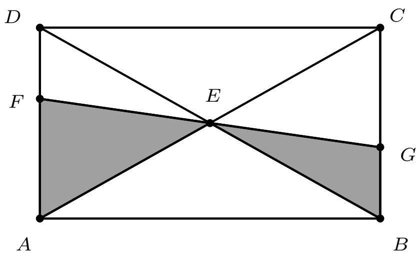
Por otro lado, si E es el punto de intersección de las diagonales AC y BD.



Como AB es paralelo a CD entonces $x = z$ y $y = w$. Además, por el primer inciso, $AB = CD$. Luego, por el criterio ALA tenemos que $\triangle ABE \simeq \triangle CDE$. De aquí $AE = CE$ y $BE = DE$.

Propiedad 5. En todo paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

Ejemplo 23. Sea $ABCD$ un rectángulo de área igual a $12\ \mathrm{cm}^2$ y sea E la intersección de sus diagonales. Si una recta que pasa por E corta a los lados AD y BC en los puntos F y G, respectivamente, calcula el área sombreada.

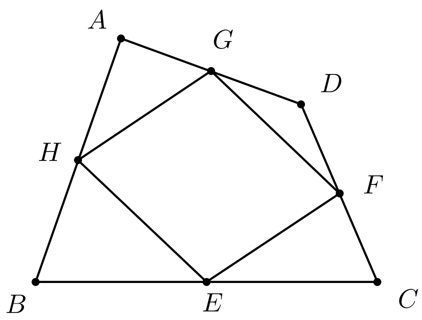


Solución. Como AD y BC son paralelas, entonces $\measuredangle FDE = \measuredangle GBE$. Por otro lado, al ser opuestos por el vértice, $\measuredangle FED = \measuredangle GEB$. Como E es el punto medio de BD, por el criterio ALA, entonces $\triangle FDE$ y $\triangle GBE$ son congruentes; por lo que tienen áreas iguales. Concluimos que:

$$\begin{aligned}(\triangle AEF) + (\triangle GEB) &= (\triangle AEF) + (\triangle FED)\\ &= (\triangle AED)\\ &= \frac{1}{4}(ABCD)\\ &= 3\ \mathrm{cm}^2\,.\end{aligned}$$

El lector debe argumentar la validez de la última igualdad.

Ejemplo 24 (Teorema de Varignon)**.** Probar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo determinan un paralelogramo. Además, probar que el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.



Solución. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean E, F, G y H los puntos medios de los lados BC, CD, DA y AB, respectivamente.

Considerando los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$, tenemos que EH, AC y FG son paralelos y además,

$$EH = \frac{1}{2}AC = FG.$$

De manera semejante podemos probrar que EF, BD y HG son paralelos y $EF = \frac{1}{2}BD = HG$. Se sigue que $EFGH$ es un paralelogramo.

De lo anterior tenemos, además, que el perímetro de $EFGH$ es:

$$\begin{aligned} EF + FG + GH + EH &= \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC \\ &= AC + BD. \end{aligned}$$

Finalmente, el área del paralelogramo será igual al área de $ABDC$ menos el área de los triángulos $\triangle AHG$, $\triangle BEH$, $\triangle CFE$ y $\triangle DGF$, esto es:

$$\begin{aligned} &(EFGH) \\ &\quad = (ABCD) - \{(\triangle AHG) + (\triangle BEH) + (\triangle CFE) + (\triangle DGF)\} \\ &\quad = (ABCD) - \frac{1}{4}\{(\triangle ABD) + (\triangle BCA) + (\triangle CDB) + (\triangle DAC)\} \\ &\quad = (ABCD) - \frac{1}{4}\{2\,(ABCD)\} \\ &\quad = \frac{1}{2}\,(ABCD)\,. \end{aligned}$$

1. 2. 5. Puntos y rectas en los triángulos

En todo triángulo hay algunos segmentos de línea que se destacan:

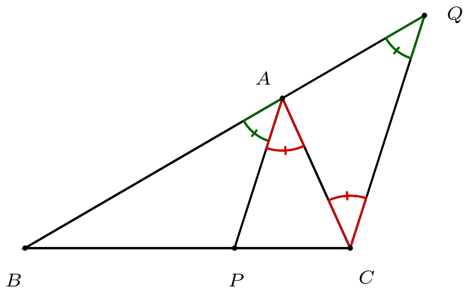
- Una **mediana** es un segmento trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto.
- Una **altura** es un segmento perpendicular a un lado o a su prolongación que va al vértice opuesto.
- La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. En particular, una bisectriz en un triángulo es una línea que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales.
- La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento. En particular, una mediatriz en un triángulo es una línea que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él.

Propiedad 6. Un triángulo es isósceles si y sólo si una misma línea hace todas las funciones de: mediana, altura, mediatriz y bisectriz; correspondiente al vértice entre los lados iguales.

Ejemplo 25. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, sea P un punto en BC tal que AP es bisectriz de $\triangle ABC$. Si Q es la intersección de la prolongación de BA con una paralela a AP que pase por C, probar que $\triangle ACQ$ es isósceles con $AC = AQ$.

Solución. Como PA y CQ son paralelas, entonces:

$$\measuredangle BAP = \measuredangle AQC,$$
$$\measuredangle PAC = \measuredangle ACQ.$$



Como además $\measuredangle BAP = \measuredangle PAC$, por ser AD bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$, entonces $\measuredangle ACQ = \measuredangle AQC$.

Como en $\triangle ACQ$ hay dos ángulos iguales, entonces el triángulo es isósceles con $AC = AQ$.

Observación. Observemos que si utilizamos el Teorema de Thales en $\triangle BCQ$, como PA es paralela a CQ, entonces:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AQ}$$

Sustituyendo AQ por AC tenemos que $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$. Lo anterior demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3 (Teorema de la bisectriz)**.** La bisectriz de cualquier ángulo interior de un triángulo determina, en el lado opuesto, dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado. Es decir, si en $\triangle ABC$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ corta a BC en un punto P interior del segmento, entonces:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

La distancia de un punto a una recta es la magnitud del segmento determinado por el punto y el pie del punto en la recta.

Propiedad 7. En un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes propiedades:

- Cualquier pareja de medianas se cortan en un tercio de su longitud.
- El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de cada lado de un ángulo fijo es la bisectriz del ángulo.
- El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos distintos pertenecientes al mismo plano es la mediatriz del segmento determinado por estos puntos.

Cuando un conjunto de rectas se intersecan en un solo punto decimos que son **concurrentes**.

Propiedad 8. Para un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes propiedades:

- Las tres medianas son concurrentes.
- Las bisectrices de los tres ángulos interiores son concurrentes.
- Las tres mediatrices son concurrentes.
- Las tres alturas son concurrentes.

Al punto de intersección G de las tres medianas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **gravicentro**. Este punto también es conocido como **centroide**, **baricentro** o **centro de gravedad**.

Al punto I en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **incentro**, que es el centro de la circunferencia tangente interiormente a cada uno de los lados de $\triangle ABC$; dicha circunferencia se llama el **incírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **inradio**.

El punto O en donde se intersecan las mediatrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de $\triangle ABC$; dicha circunferencia se llama el **circuncírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **circunradio**.

El punto H, en donde concurren las tres alturas de un triángulo $\triangle ABC$, le llamaremos **ortocentro**.

1.3. Técnicas elementales de conteo

Desde tiempos inmemorables ha sido de interés para las personas saber la cantidad de objetos que pertenecen a algún conjunto; por ejemplo, la cantidad de ovejas de algún rebaño, el número de integrantes de determinado grupo, o algo más sofisticado como la probabilidad de obtener un par de ases en una selección de cinco cartas de una baraja. Algunas veces basta con echar un vistazo para contar, pero la mayoría de las veces se requiere de hacer algún tipo de abstracción o conocer técnicas para contar de manera eficiente. Por ejemplo, si nos piden contar el número de patas de una manada de 1000 ovejas, no es necesario visitar alguna granja y contar cada una de las patas de las ovejas, simplemente hacemos una abstracción y multiplicamos $4\times1000=4000$.

En otras ocasiones estamos interesados en conocer la probabilidad de obtener dos ases de una selección de cinco cartas de una baraja inglesa, donde sabemos que obtener una mano de cinco cartas es igualmente probable. Para ello, requerimos saber el número de resultados posibles y el número de resultados favorables, lo cual implica saber contar correctamente, por lo que debemos conocer algunas técnicas de conteo que veremos posteriormente.

Es necesario, para empezar a contar, conocer dos principios básicos de conteo que a continuación se detallarán.

1. 3. 1. El principio fundamental de conteo

Ejemplo 26. Comencemos suponiendo que deseamos escoger un libro de entre cuatro materias: matemáticas, física, biología y química. Existen seis libros de matemáticas, cuatro de física, cinco de biología y tres de química.

Tenemos $6+4+5+3=18$ opciones de seleccionar un libro.

Otro ejemplo sencillo es el siguiente:

Ejemplo 27. Juan decide comprar un carro. En Honda le ofrecen tres modelos diferentes, en Volkswagen le ofrecen cuatro modelos y en Nissan tres modelos. ¿Cuántas alternativas diferentes tiene Juan?

La respuesta es $3+4+3=10$.

Ejemplo 28. ¿De cuántas formas se puede viajar de la ciudad A a la ciudad B, sabiendo que existen diez corridas de autobús y cuatro vuelos?

Para viajar de A a B se puede hacer en autobús o avión, es decir, $10+4=14$.

Los tres ejemplos anteriores son un caso particular del principio de adición que se enuncia a continuación.

PRINCIPIO DE ADICIÓN. Si se desea escoger un objeto que puede ser de k tipos distintos, y para el primer tipo existen t_1 opciones, para el segundo tipo existen t_2 opciones, y así sucesivamente hasta t_k opciones para el último tipo, entonces el objeto puede escogerse de $t_1+t_2+\cdots+t_k$ maneras.

A continuación mostraremos dos ejemplos bastante simples como preámbulo del principio fundamental de conteo que se enunciará posteriormente.

Ejemplo 29. Consideremos la colección de todos los números de dos cifras tal que el primer dígito es 3 o 4 y el segundo dígito es 7, 8 o 9. Claramente existen seis de estos números:

$$\begin{matrix} 37 & 38 & 39 \\ 47 & 48 & 49 \end{matrix}$$

Ordenados de esta forma, observamos que cada fila corresponde a la selección del primer dígito y cada columna a la selección del segundo dígito. Tenemos dos filas y tres columnas, y por lo tanto $2\times 3=6$ posibilidades.

Ejemplo 30. Consideremos la colección de todos los números de tres cifras en los que el primer dígito sea 1, 2, 3 o 4, el segundo dígito 5 o 6 y el tercer dígito 7, 8 o 9. Los candidatos son los siguientes:

$$\begin{matrix} 157 & 158 & 159 \\ 167 & 168 & 169 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 257 & 258 & 259 \\ 267 & 268 & 269 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 357 & 358 & 359 \\ 367 & 368 & 369 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 457 & 458 & 459 \\ 467 & 468 & 469 \end{matrix}$$

Ordenados de esta forma, observamos que cada bloque corresponde a la elección del primer dígito. Dentro de cada bloque, cada fila corresponde a la elección del segundo dígito y cada columna a la elección del tercer dígito. Se tienen cuatro bloques, cada uno con dos filas y tres columnas, y por lo tanto $4\times 2\times 3=24$ posibilidades.

Estos ejemplos son casos de un principio muy simple, pero bastante útil.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO. Supongamos que una primera tarea podemos realizarla de n_1 maneras diferentes, una segunda tarea podemos realizarla de n_2 maneras diferentes, y así sucesivamente, hasta una $k-$ ésima tarea que podemos realizar de n_k maneras diferentes. Entonces, el número de formas diferentes para que esas k tareas se realicen sucesivamente está dado por $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Ejemplo 31. Consideremos que las placas de control vehicular están formadas por tres letras seguidas de tres dígitos , tal como $ABC012$.

- Determinar la cantidad total de placas diferentes. Observamos que en cada placa existen 27 opciones para cada letra y 10 opciones para cada dígito. Por lo tanto el total de placas posibles es de $27 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 = 19\,683\,000$.
- Si el primer dígito se restringe a ser diferente de cero. El total de placas es únicamente $27 \times 27 \times 27 \times 9 \times 10 \times 10 = 17\,714\,700$.
- Si se requiere que las letras sean distintas y que el primer dígito sea distinto de cero. La cantidad total es $27 \times 26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 15\,795\,000$.
- Si se pide que las letras y los dígitos sean distintos y que el primer dígito sea diferente de cero. El total es únicamente de $27 \times 26 \times 25 \times 9 \times 9 \times 8 = 11\,372\,400$.

Una consecuencia inmediata del principio de conteo es la siguiente: supongamos que debemos llenar n posiciones y cada posición tiene k opciones, el total de formas es:

$$\underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{n} = k^n.$$

Notamos que la expresión anterior es válida sólo cuando en cada posición tenemos la misma cantidad de opciones.

Ejemplo 32. Escribimos las letras a, b, c, d, e, f, g y h en tarjetas distintas y luego revolvemos las ocho tarjetas en una bolsa. Deseamos formar palabras de cuatro letras con esas letras. Extraemos una tarjeta, apuntamos la letra, y la regresamos a la bolsa, repitiendo este proceso cuatro veces. ¿Cuántas palabras se puede formar?

Las palabras son arreglos de cuatro letras, cada letra la podemos elegir de ocho tipos distintos. Entonces el total de palabras es $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 = 4\,096$

1. 3. 2. Permutación

De nuevo, iniciamos analizando dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 33. Supongamos que se deben elegir cinco personas de un grupo de diez y sentarlas en una fila de izquierda a derecha. Para hacer esto escogemos una a la vez. Ocupamos el asiento más a la izquierda por cualquiera de las diez personas; claramente tenemos diez opciones para ocupar este asiento. Una vez hecha esta elección, ocupamos el segundo asiento por una de las nueve personas restantes, de tal modo que existen nueve opciones. Una vez hecha la elección, ocupamos el tercer asiento por una de las ocho personas restantes, de tal manera que quedan ocho opciones, y así sucesivamente. Naturalmente la cantidad de formas de acomodarlos es igual a:

$$P_5^{10} = \underbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}_{5}.$$

Ejemplo 34. ¿De cuántas formas se pueden colocar siete libros sobre una estantería?

$$P_7^7 = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{7}.$$

PERMUTACIÓN. El número de maneras de elegir k objetos de un conjunto con n objetos y arreglarlos en orden es igual a:

$$P_k^n = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Aquí y en adelante, para cada entero positivo n, el número $n!$ indica el producto de los primeros n enteros positivos, es decir, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$. También utilizaremos la convención de que $0! = 1$. En particular, el número de maneras de elegir n objetos de un conjunto con n objetos y arreglarlos en orden es igual a:

$$P_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!.$$

Ejemplo 35. Deseamos conocer la cantidad de números de cinco cifras tal que todos los dígitos son diferentes de cero y al menos un dígito es utilizado más de una vez. Para hacerlo, lo importante es plantear la siguiente estrategia: el número deseado es $N_1 - N_2$, donde N_1 es el total de números de cinco cifras en los que todos los dígitos son distintos de cero y N_2 es el total de números de cinco cifras dónde todos los dígitos son diferentes de cero y ningún dígito se utiliza más de una vez. Entonces:

$$N_1 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 59\,049$$

y además,

$$N_2 = P_5^9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120,$$

por consiguiente, $N_1 - N_2 = 43\,929$.

Ejemplo 36. Debemos elaborar números de cinco cifras tomando los dígitos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, de tal modo que ningún dígito se utilice más de una vez.

- Si no existen más restricciones, claramente se pueden elaborar P_5^8 números.

- Si el número de cinco cifras debe empezar con uno, entonces existen P_4^7 formas de elegir los cuatro dígitos restantes.
- Si el número de cinco cifras debe contener al número uno, entonces hay P_1^5 opciones para colocar el dígito uno. Una vez hecha esta elección, existen P_4^7 formas de elegir los cuatro dígitos restantes. Así, la cantidad total de maneras de elaborar los números es igual a $P_1^5 \times P_4^7$.
- Si el número de cinco cifras debe empezar con el dígito uno y contener al dos, entonces existen P_1^4 opciones para colocar el dígito dos. Una vez hecha esta elección, existen P_3^6 formas de elegir los tres dígitos restantes. Así, la cantidad total es igual a $P_1^4 \times P_3^6$.
- Si el número de cinco cifras debe contener a los dígitos uno y dos, entonces existen P_2^5 opciones para colocar los dígitos uno y dos. Una vez hecha esta elección, existen P_3^6 formas de elegir los tres dígitos restantes. Así, la cantidad total de maneras es igual a $P_2^5 \times P_3^6$.

Ejemplo 37. Queremos determinar la cantidad de formas de ordenar seis personas en un círculo. Para hacerlo ponemos seis sillas en un círculo y la persona A elige una silla. Obviamente no importa qué silla escoja. Lo que importa es qué sillas escojan las demás personas con respecto a la silla que seleccionó A. De tal forma que A únicamente tiene una opción. Ahora la persona B tiene cinco sillas para escoger y C tiene cuatro sillas entre las cuales elegir, y así sucesivamente, mientras que la persona F va a tomar la silla que quede. La cantidad total de formas es, por lo tanto, igual a $P_5^5 = 120$. Alternativamente, elegimos una de las sillas como la primera. Después, ocupamos las sillas en el sentido del reloj. Podemos poner a cualquiera de las seis personas en la primera silla, cualquiera de los cinco restantes en la segunda silla, y así sucesivamente. Por lo tanto, existen P_6^6 formas de lograrlo. Notemos que los dos arreglos siguientes son iguales:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & \\ F & & & C \\ & E & D & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & F & A & \\ E & & & B \\ & D & C & \end{array}$$

En efecto, existen otros cuatro arreglos que son iguales a estos dos. Por lo tanto, hemos contado cada arreglo diferente 6 veces, de tal forma que el número buscado es:

$$\frac{1}{6} \times P_6^6 = 120,$$

como antes.

Ejemplo 38. Queremos encontrar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra:

$$MATE.$$

Existen cuatro letras diferentes, entonces para la primera letra tenemos cuatro opciones, tres para la segunda, dos para la tercera y una para la última, es decir, $P_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Ejemplo 39. Queremos encontrar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra:

$$MATEMATICA.$$

Existen tres A, dos M, dos T, una E, una I y una C, lo que es un total de 10 letras. Primero, etiquetemos las A y las M y T para que sean distintas, es decir, tenemos el siguiente conjunto de letras $\{A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I, C\}$ de modo que:

$$M_1A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3 \text{ y } M_2A_3T_2EM_1A_2T_1ICA_1$$

se consideran distintos arreglos. En este caso, existen $P_{10}^{10} = 10!$ arreglos. Por otro lado, las tres diferentes A están teniendo un concurso privado entre ellas para ver cual es usada primero, cual en segundo lugar, y así sucesivamente, y tienen $P_3^3 = 3!$ formas de resolver esto. De manera similar, las dos diferentes M y T tienen $P_2^2 = 2!$ formas de resolver su pequeña disputa. Desetiquetando las A, las M y las T, observamos que hemos contado de más, y que la cantidad correcta de formas de arreglar las letras es únicamente:

$$\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200.$$

Permutaciones con objetos similares tomados todos a la vez. Si tenemos k conjuntos ajenos con $n_i \geq 0$ elementos indistinguibles entre sí, de manera que $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$ y queremos ordenarlos en una fila, esto lo podemos hacer de:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Ejemplo 40. El centro de una ciudad forma una cuadrícula de 4×7. En la esquina inferior izquierda está la Catedral y en la esquina superior derecha está el cementerio. ¿De cuántas maneras se puede ir de la Catedral al cementerio si únicamente se puede caminar a la derecha y hacia arriba?

Notemos que cada camino se recorre en una distancia de $4 + 7 = 11$, de los cuales siete segmentos se recorren hacia la derecha y cuatro segmentos hacia la arriba. Entonces podemos identificar cada camino como una palabra de once letras donde usamos cuatro A (arriba) y siete D (derecha), por ejemplo, un camino lo podemos representar por ADDADAADDDD. Entonces la solución es:

$$\frac{11!}{4!7!} = 330.$$

1. 3. 3. Combinación

Otra vez, empezamos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 41. Supongamos que se debe elegir a cinco personas de un grupo de diez pero sin un orden en particular. Para hacer esto, regresemos primero al ejemplo 33 en el que cinco personas son elegidas en orden y sentadas de izquierda a derecha. En ese caso, hay P_5^{10} opciones. Sin embargo, si el orden ya no es importante, las cinco personas pueden resolver sus diferencias, y el número de duplicaciones que resultan en las cinco mismas personas es el número de maneras de elegir a cinco personas en orden, igual a P_5^5. De aquí que la cantidad de formas de elegir a cinco personas de diez sin orden en particular es igual a:

$$\frac{P_5^{10}}{P_5^5} = \frac{10!}{5!5!}.$$

Combinación. El número de formas de elegir k objetos de un conjunto de n objetos sin un orden en particular es igual a:

$$\binom{n}{b} = \frac{P_k^n}{P_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 42. Consideremos el conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ de nueve letras. Supongamos que queremos escoger cuatro letras de S.

- Si no existen restricciones, tenemos $\binom{9}{4}$ formas de elegir cuatro letras de S.
- Supongamos que debemos elegir dos vocales y dos consonantes. Entonces existen $\binom{3}{2}$ formas de escoger las vocales y $\binom{6}{2}$ formas de elegir las constantes. De tal modo que el total de formas de elegirlas es igual a $\binom{3}{2} \times \binom{6}{2}$.
- Supongamos que debemos escoger al menos una vocal. Entonces notamos que existen $\binom{6}{4}$ formas de elegir todas constantes. De tal manera que el total es igual a $\binom{9}{4} - \binom{6}{4}$.
- Supongamos que debemos elegir más constantes que vocales. Entonces podemos elegir no vocales o una vocal. Si elegimos que no haya vocales, existen $\binom{6}{4}$ posibilidades. Si elegimos una vocal, existen $\binom{3}{1} \times \binom{6}{3}$ posibilidades. Por lo tanto el número deseado de formas de elegir las letras es igual a:

$$\binom{6}{4} + \binom{3}{1} \times \binom{6}{3}.$$

Ejemplo 43. Un profesor ha puesto un examen que contiene cinco preguntas de historia y seis preguntas de matemáticas. Se le pide a un alumno que elija exactamente ocho preguntas.

- Si no existen más restricciones, entonces la cantidad de formas de lograrlo es $\binom{11}{8}$.
- Supongamos que el alumno tiene que elegir exactamente cuatro preguntas de historia y cuatro de matemáticas. Entonces existen $\binom{5}{4}$ formas de elegir preguntas de historia y $\binom{6}{4}$ de matemáticas. Por lo tanto,

el total de formas en que se puede elegir es igual a:

$$\binom{5}{4} \times \binom{6}{4}.$$

- Supongamos que el alumno tiene que elegir al menos cuatro preguntas de historia. Entonces, además de las $\binom{5}{4} \times \binom{6}{4}$ maneras de elegir exactamente cuatro preguntas de historia y cuatro de matemáticas, existen también $\binom{5}{5} \times \binom{6}{3}$ maneras de elegir exactamente cinco preguntas de historia y tres de matemáticas. Por lo tanto, el total de formas en que se puede elegir es igual a:

$$\binom{5}{4} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{5} \times \binom{6}{3}.$$

- Supongamos que el alumno tiene que elegir máximo cuatro preguntas de historia. Entonces, además de las $\binom{5}{4} \times \binom{6}{4}$ maneras de elegir exactamente cuatro preguntas de historia y cuatro de matemáticas, existen $\binom{5}{3} \times \binom{6}{5}$ de elegir exactamente tres preguntas de historia y cinco de matemáticas, así como $\binom{5}{2} \times \binom{6}{6}$ maneras de elegir exactamente dos preguntas de historia y seis de matemáticas. Por lo tanto, el total de formas en que se puede elegir es igual a:

$$\binom{5}{4} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{3} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{6}.$$

De modo alternativo, la única manera de elegir ocho preguntas es elegir todas las cinco preguntas de historia y tres preguntas de matemáticas. Existen $\binom{5}{5} \times \binom{6}{3}$ maneras de hacer esto. Por lo tanto, el total de maneras de elegir es también igual a $\binom{11}{8} - \binom{5}{5} \times \binom{6}{3}$.

Ejemplo 44. Consideremos un mazo usual de 52 cartas sin comodines. Deseamos elegir 5 cartas de este mazo; usualmente elegir o repartir 5 cartas se conoce como mano. En un mazo cada carta consta de un valor, que puede ser $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K \text{y} A$ y un símbolo (o palo) $\spadesuit \clubsuit \heartsuit \diamondsuit$

- Sin restricciones, el número de opciones es igual a $\binom{52}{5}$.

- Supongamos que deseamos escoger exactamente dos As y tres Ks. Entonces, el total de maneras en que lo podemos hacer es igual a $\binom{4}{2} \times \binom{4}{3}$.

- Supongamos que deseamos tener cuatro cartas con el mismo palo y otra carta con uno diferente. Existen $\binom{4}{1}$ maneras de elegir un palo y $\binom{13}{4}$ de escoger cuatro cartas del mismo. Finalmente, existen $\binom{39}{1}$ formas de elegir la última carta. Por lo tanto, el total de maneras de elegir las cinco cartas es igual a $\binom{4}{1} \times \binom{13}{4} \times \binom{39}{1}$.

- Supongamos que deseamos escoger cuatro cartas con el mismo valor y otra carta. Existen $\binom{13}{1}$ formas de elegir un valor y después $\binom{4}{4}$ de elegir cuatro cartas con este valor. Entonces existen $\binom{48}{1}$ maneras de elegir la carta restante. Por lo tanto, el total de maneras de elegir las cartas es igual a $\binom{13}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$.

- Supongamos que escogemos cinco cartas y deseamos que la suma de los cinco valores sea igual a siete. Para esto supongamos que el valor de A es 1. Entonces, las únicas posibilidades es que haya cuatro $A's$ y un número 3, o tres $A's$ y dos números 2. El número de opciones para la primera es $\binom{4}{4} \times \binom{4}{1}$, mientras que el número de opciones para la segunda es $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$. Por lo tanto, el total de opciones es igual a $\binom{4}{4} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$.

1. 3. 4. Aplicación a la Teoría de la Probabilidad

Ejemplo 45. Supongamos que se lanzan dos monedas y que cada una es, ya sea águila (a) o sol (s), igualmente probable. Entonces los cuatro siguientes resultados son igualmente probables:

$$\begin{array}{cc} (a,a) & (a,s) \\ (s,a) & (s,s) \end{array}$$

- La probabilidad de un par de águilas es $1/4$, representando uno de los cuatro posibles resultados.

- La probabilidad de las dos monedas aterrizando del mismo lado es $1/2$, representando dos de los cuatro posibles resultados.

- La probabilidad de tener al menos una águila es $3/4$, representando tres de los cuatro posibles resultados.

En general, si existen varios resultados de un experimento que son equiprobables, mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, entonces la probabilidad de un suceso ξ está dada por:

$$p(\xi) = \frac{\text{número de resultados favorables para } \xi}{\text{número total de resultados posibles}}.$$

Ejemplo 46. Supongamos que se arrojan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea igual a siete? Para responder esta pregunta observemos todos los posibles e igualmente probables resultados:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \underline{(1,6)} \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \underline{(2,5)} & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \underline{(3,4)} & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & \underline{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & \underline{(5,2)} & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
\underline{(6,1)} & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Los casos en que la suma de los números es igual a siete han sido subrayados. Estos representan 6 de 36 resultados equiprobables. De aquí que la probabilidad es igual a $6/36 = 1/6$.

Ejemplo 47. Regresemos al ejemplo 44 relativo a tomar cinco cartas de un mazo de 52 en un juego de cartas.

- La probabilidad de tomar exactamente dos $A's$ y tres $K's$ es igual a:

$$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{108290}.$$

- La probabilidad de tomar cinco cartas con un valor total de siete es igual a:

$$\frac{\binom{4}{4} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{92820}.$$

Probabilidad de dos eventos. Para cualesquiera dos eventos A y B, tenemos:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Un resultado importante en la teoría de la probabilidad concierne a los eventos independientes. Dos eventos A y B son independientes si cada uno no afecta el resultado del otro.

Probabilidad de eventos independientes. Para cualesquiera dos eventos A y B, tenemos:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Ejemplo 48. Supongamos que seis personas son elegidas de un grupo de diez sin orden particular, y que A y B son dos de estas diez personas. Asumimos que cada una de las diez personas tiene la misma probabilidad de ser elegida. Sea A el evento en que A es elegido y B el evento en que B resulta elegido.

- ¿Cuál es la probabilidad $p(A)$ de que A resulte elegido? Para resolver este problema, consideremos el número de maneras en que se pueden escoger a seis personas del grupo de diez incluyendo a A. Claramente elegimos a A y luego escogemos cinco de las nueve personas restantes. Por lo tanto, el número de maneras de elegir seis personas de un grupo de diez incluyendo a A es igual a $\binom{9}{5}$. Por otro lado, el número de maneras de elegir seis de diez personas es igual a $\binom{10}{6}$. Se sigue que la probabilidad de que A sea elegido es igual a:

$$p(A) = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{6}} = \frac{3}{5}.$$

- De igual forma, la probabilidad de que B sea elegido es también igual a:
$$p(B) = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{6}} = \frac{3}{5}.$$

- ¿Cuál es la probabilidad $p(A \cap B)$ de que ambos, A y B, sean elegidos? Para contestar esta pregunta, consideremos el número de maneras en que se pueden escoger a seis de diez personas. Claramente escogemos a ambos, A y B, y después elegimos cuatro de las ocho personas restantes. Por lo tanto, el número de maneras de escoger a seis personas de diez incluyendo A y B es igual a $\binom{8}{4}$. Por otro lado, el número de maneras de escoger seis de diez personas es igual a $\binom{10}{6}$. De aquí se sigue que la probabilidad de que ambos, A y B, sean escogidos es igual a:
$$p(B) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{1}{3}.$$

- ¿Cuál es la probabilidad $p(A + B)$ de que al menos una, A o B, sean elegidos? Consideremos el evento complementario de que ni A ni B sean elegidos. Para esto simplemente elegimos a seis personas de las ocho restantes y el número de maneras de hacer esto es igual a $\binom{8}{6}$. De aquí que la probabilidad de que ni A ni B sean elegidos es igual a:
$$\frac{\binom{8}{6}}{\binom{10}{6}} = \frac{2}{15}.$$

  Por lo tanto, la probabilidad de que al menos uno, A o B, sea elegido será igual a:
$$p(A + B) = \frac{13}{15}.$$

- Observa que $p(A + B) = p(A) + P(B) - p(A \cap B)$.

- Observa que $p(A \cap B) \neq p(A) \times P(B)$, de modo que los eventos A y B no son independientes. Es claro que el hecho de que A no sea elegido aumenta la posibilidad de que B sí lo sea.

1.4. Teoría de números

1. 4. 1. Criterios de divisibilidad

A los números naturales los denotamos por $\mathbb{N}$ y es el conjunto
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

En ocasiones el cero también es incluido.

Definición 7. Decimos que el número a **divide** al número b, en símbolos $a|b$, si es posible encontrar un k de tal manera que $ak = b$. Si a no divide al número b escribimos $a \nmid b$.

Ejemplo 49. Como ejemplos tenemos los siguientes:

(a) $3|6$, ya que $6 = (3)(2)$.

(b) $2|8$, porque $8 = (2)(4)$.

(c) $3|0$, ya que $0 = (3)(0)$. El número 3 puede ser sustituido por cualquier otro número.

(d) $4 \nmid 7$, ya que 7 no se puede escribir como $4(k)$ para ningún entero positivo k.

Si a es diferente del número 0, entonces el hecho de que $a|b$ equivale a decir que $\frac{b}{a}$ es un entero. Cuando $a|b$ se dice que a es un divisor del número b, o también que b es un múltiplo de a.

Algunas propiedades de la divisibilidad son las siguientes:

(a) Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $a \leq b$.

(b) Para todo entero a se tiene que $a|a$.

(c) Si a, b y c son enteros tales que $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

(d) Es posible que $a|b$ pero que $b \nmid a$.

Como aplicación inmediata de las anteriores propiedades, podemos enumerar los siguientes:

(a) Tenemos que $7|21$ y claramente $7 \leq 21$. También $2|8$ y $2 \leq 8$.

(b) $20|20$, y también $13|13$.

(c) Como $3|6$ y $6|24$, se deduce que $3|24$.

(d) Tenemos que $3|6$, pero $6 \nmid 3$.

Números primos

Decimos que un número p es **primo** si sus únicos divisores son 1 y p. El número 1 no se considera como primo. Un número que no es primo se le llama **compuesto**.

Como ejemplos tenemos los siguientes:

(a) El número 2 es primo, pues sus únicos divisores son 1 y 2.

(b) El número 3 también es primo.

(c) El número 4 no es primo, porque admite un divisor distinto de 1 y 4, pues 2 es divisor de 4.

Teorema 4 (fundamental de la aritmética, primera parte)**.** Todo número es multiplicación de números primos.

El teorema no aplica al 0 ni al 1.

Ejemplo 50. El número 24 se puede escribir como $24 = (2)(2)(2)(3)$. También tenemos que $100 = (2)(2)(5)(5) = (2)^2(5)^2$ y que $870 = (2)(3)(5)(29)$.

Observación. Al escribir un número como producto de primos, se acostumbra poner los primos en orden creciente, agrupando los primos que son iguales en la potencia correspondiente. Esta forma se llama la **descomposición canónica** del número. Por ejemplo, la descomposición canónica de 180 es $(2)^2(3)^2(5)$.

Para decidir si cierto número es primo o no, basta ver que si un número a es producto de dos divisores, entonces alguno de ellos debe ser menor o igual que $\sqrt{a}$.

Como aplicación del comentario anterior, para decidir si el número 53 es primo o no, basta con probar con los números menores a $\sqrt{53} \approx 7$, vemos que $2 \nmid 53$, $3 \nmid 53$, $4 \nmid 53$, $5 \nmid 53$, $6 \nmid 53$ y $7 \nmid 53$, por lo que 53 ya no puede tener más divisores, así que 53 es primo.

Pero más aún, no hace falta probar la divisibilidad con todos los números anteriores a 7, sólo basta probar con los números primos anteriores a 7, por ejemplo, ya no tiene caso preguntar si $6|53$, porque si así fuera el caso, y como $3|6$, desde antes se tendría que $3|53$, por lo que desde antes se habría descartado de ser primo. Así que sólo basta probar con $2, 3, 5$ y 7.

Se enunciarán ahora algunos criterios de divisibilidad por números pequeños.

- **Criterio de divisibilidad por 2.** El entero a es divisible por 2, solamente si a termina en 0, 2, 4, 6 u 8. Por ejemplo, 53 no termina en ninguno de estos números, por lo que 53 no es divisible por 2. Pero el número 52 termina en 2, por lo que este número sí es divisible por 2. A los que son divisibles por 2 se dice que tienen mitad.

- **Criterio de divisibilidad por 3.** Un entero a es divisible por 3 solamente si la suma de las cifras de a es divisible por 3. Por ejemplo, 474 es divisible por 3 porque $4 + 7 + 4 = 15$ y 15 es múltiplo de 3, pero 53 no es divisible por 3, ya que $5 + 3 = 8$ y 8 no es divisible por 3.

- **Criterio de divisibilidad por 4.** Un entero a es divisible por 4 solamente si el número formado por las dos últimas cifras de a lo es. Por ejemplo, 7923 no es divisible por 4, ya que 23 no es múltiplo de 4.

- **Criterio de divisibilidad por 5.** Un entero a es divisible por 5 solamente si termina en 0 o en 5. Es claro que 53 termina en 3, por lo que no es divisible por 5; sin embargo, el número 666555 termina en 5 por lo que sí es divisible por 5.

- **Criterio de divisibilidad por 9.** Un entero a es divisible por 9 solamente si la suma de las cifras de a es divisible por 9. Por ejemplo, 376831 no es múltiplo de 9, pues $3+7+6+8+3+1=28$, que no es múltiplo de 9, pero el número 444444444 sí es divisible por 9.

- **Criterio de divisibilidad por 10.** Un entero a es divisible por 10 solamente si a termina en 0.

1. 4. 2. Factorización y algoritmo de Euclides

Teorema 5 (fundamental de la aritmética, segunda parte)**.**
Todo número distinto de 0 y de 1 es producto de primos en forma única, salvo orden.

Gracias al Teorema fundamental de la aritmética, cada número entero distinto de 0 y 1 tiene una sola descomposición canónica. Agregando potencias de cero a las descomposiciones canónicas de dos o más números, se pueden usar los mismos primos en las factorizaciones de todos ellos. Por ejemplo, si $a = 675 = (3)^3 \times (5)^2$ y $b = 20 = (2)^2 \times (5)$, entonces podemos escribir $a = (2)^0 \times (3)^3 \times (5)^2$ y $b = (2)^2 \times (3)^0 \times (5)$. Con esta escritura es muy fácil determinar si un número es divisible por otro o no, con el siguiente proceso:

(a) Factorizar tanto a como b en números primos, agregando ceros en las potencias si hace falta, para tener los mismos números primos.

(b) Comparar que cada potencia de los primos en a sea menor o igual que las correspondientes potencias en b.

Si se da lo anterior, podemos afirmar que $a|b$.

Ejemplo 51. Si queremos ver si $15|1050$, basta poner ambos números en su descomposición en primos: $15 = (3)^1 \times (5)^1$, mientras que $1050 = (2)^1 \times (3)^1 \times (5)^2 \times (7)^1$, entonces nos conviene escribir $15 = (2)^0 \times (3) \times (5) \times (7)^0$ y hacer la comparación exponente a exponente. Justamente tenemos que los exponentes del 15 son menores o iguales a los del 1050, por lo que decidimos a que $15|1050$.

Ejemplo 52. En otro ejemplo, veamos si $33|1050$. Vemos que nos conviene escribir $33 = (2)^0 \times (3)^1 \times (5)^0 \times (7)^0 \times (11)^1$ y $1050 = (2)^1 \times (3)^1 \times (5)^2 \times (7)^1 \times (11)^0$. Vemos que el exponente del primo 11 de 33 es mayor al exponente del primo 11 de 1050, por lo que 33 no divide a 1050.

Algoritmo de Euclides

Teorema 6 (Algoritmo de la división)**.** Dados dos números a y b con $b \neq 0$, existen números únicos q y r de tal forma que:

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b.$$

El número q en la proposición anterior es el **cociente** (de la división de a entre b) y el número r es el **residuo**. Por ejemplo, si $a = 18$ y $b = 7$, entonces:

$$18 = 7(2) + 4$$

y, en este caso, el cociente q vale 2 y el residuo r vale 4. El residuo tiene que ser menor a $b = 7$.

1. 4. 3. Máximo común divisor

Dados dos números m y n diferentes de cero, es claro que 1 divide a ambos y que existe un número finito de divisores comunes. Definimos su **máximo común divisor** en símbolos $\operatorname{mcd}(m, n)$, como el mayor de los divisores comunes a ellos.

Por ejemplo, vamos a calcular el máximo común divisor entre 8 y 12. Los divisores de 8 son $1, 2, 4$ y 8, mientras que los divisores de 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ y 12. De aquí que los divisores comunes son $1, 2$ y 4; el máximo de estos números es 4, por lo tanto $\operatorname{mcd}(8, 12) = 4$.

Veamos tres métodos para hallar el máximo común divisor.

Método 1

Este método consiste en ir probando los divisores comunes de todos los números a la vez. Calculemos $\operatorname{mcd}(110, 264)$. Se determina si 2 es divisor común; en este caso sí lo es, así que dividimos ambos números por 2:

$$\operatorname{mcd}(110, 264) = \operatorname{mcd}(2 \times 55, 2 \times 132) = 2 \operatorname{mcd}(55, 132).$$

El siguiente paso es preguntar si 2 vuelve a ser divisor común de ambos, y ya no lo es. Luego se pregunta si 3 es divisor común, y no lo es. Lo siguiente es preguntarse si el primo 5 es divisor común, y tampoco lo es. Se puede ver que hasta el primo 11 hay un divisor común, por lo que:

$$\operatorname{mcd}(110, 264) = 2 \operatorname{mcd}(55, 132) = 2 \operatorname{mcd}(11 \times 5, 11 \times 12) = (2)(11) \operatorname{mcd}(5, 12),$$

luego notamos que 5 y 12 ya no tienen más divisores comunes mayores a 1, así que $\operatorname{mcd}(5, 12) = 1$, por lo que:

$$\operatorname{mcd}(110, 264) = (2)(11) \operatorname{mcd}(5, 12) = (2)(11)(1) = 22.$$

Ejemplo 53. Queremos calcular $\operatorname{mcd}(180, 264)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{mcd}(180, 264) &= 2 \operatorname{mcd}(90, 132) \quad \text{ambos tienen mitad} \\
&= 2 \times 2 \operatorname{mcd}(45, 66) \quad \text{vuelven a tener mitad} \\
&= 2 \times 2 \times 3 \operatorname{mcd}(15, 22) \quad \text{3 divide a ambos} \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 1 \quad \text{ya no hay divisores comunes} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Se suele representar el anterior proceso en la siguiente tabla:

180	264	2
90	132	2
45	66	3
15	22	

Para encontrar el máximo común divisor, sólo se multiplican los números de la última columna.

La ventaja es que con este método se puede hallar el máximo común divisor de 3 números o más. La desventaja es que hay que aplicar criterios de divisibilidad muchas veces.

Veamos otro ejemplo. Se encuentra ahora $\text{mcd}(80, 100, 180)$.

80	100	180	2
40	50	90	2
20	25	45	5
4	5	9	

Entonces: $\text{mcd}(80, 100, 180) = (2)(2)(5) = 20$.

Método 2

Aquí habrá que encontrar la factorización en primos de ambos números; por ejemplo, calculemos $\text{mcd}(180, 264)$, y primero hallamos la factorización en primos:

$$\begin{aligned}180 =&2^2 \times 3^2 \times 5,\\ 264 =&2^3 \times 3 \times 11.\end{aligned}$$

Los factores primos repetidos son el 2 y el 3, y las menores potencias de ambos son 2^2 y 3^1, por lo que $\text{mcd}(180, 264) = 2^2 \times 3^1 = 12$.

La ventaja de este método es que se puede aplicar para más de dos números a la vez. La desventaja es que necesitamos la factorización en primos de cada número.

Método 3

Este método se basa en el algoritmo de Euclides. Tenemos que, al hacer la división, $264 = 180(1) + 84$, por lo que $\text{mcd}(264, 180) = \text{mcd}(180, 84)$. Nuevamente, por el algoritmo de la división, $180 = 84(2) + 12$, luego $\text{mcd}(180, 84) = \text{mcd}(84, 12)$, y en este punto nos detenemos, pues $12|84$ y entonces tenemos que $\text{mcd}(84, 12) = 12$.

Podemos resumir los pasos en las siguientes líneas:

$$\begin{aligned}264 = 180(1) + 84 \quad &\to \text{mcd}(264, 180) = \text{mcd}(180, 84),\\ 180 = 84(2) + 12 \quad &\to \text{mcd}(180, 84) = \text{mcd}(84, 12),\\ 84 = 12(7) \quad &\to \text{mcd}(84, 12) = 12.\end{aligned}$$

Se concluye que $\text{mcd}(264, 180) = \text{mcd}(180, 84) = \text{mcd}(84, 12) = 12$.

La ventaja de este método es que no hay que usar criterios de divisibilidad, sino el algoritmo de Euclides en pocos pasos. La desventaja es que no da la factorización en primos y se aplica a sólo un par de números.

Como aplicación inmediata del máximo común divisor, es cuando se reduce una fracción; por ejemplo, si queremos reducir $\frac{180}{264}$, necesitamos hallar el divisor común más grande entre el numerador y denominador, y así eliminarlos, quedando:

$$\frac{180}{264} = \frac{(12)(15)}{(12)(22)} = \frac{15}{22},$$

y esta última fracción ya no se puede reducir.

1. 4. 4. Mínimo común múltiplo

Definición 8. Sean m y n dos números. Consideremos ahora todos los múltiplos de m: $m, 2m, 3m, \ldots$ y los múltiplos de n: $n, 2n, 3n, \ldots$. Notemos que mn es múltiplo tanto de m como de n. Al múltiplo común más pequeño le llamamos el **mínimo común múltiplo** de m y n, y lo denotamos por $\mathrm{mcm}(m, n)$.

Mostraremos dos métodos para hallar el mínimo común múltiplo.

Método 1

Hallaremos $\mathrm{mcm}(180, 264)$. Vemos que ambos tienen mitad, por lo tanto tenemos $\mathrm{mcm}(180, 264) = 2\,\mathrm{mcm}(90, 132)$ y, como vuelven a tener mitad, entonces $\mathrm{mcm}(180, 264) = 2 \times 2\,\mathrm{mcm}(45, 66)$. Luego, sólo uno de ellos tiene mitad, por lo que $\mathrm{mcm}(180, 264) = 2 \times 2 \times 2\,\mathrm{mcm}(45, 33)$. Se sigue que ambos tienen tercera, por lo que $\mathrm{mcm}(180, 264) = 2 \times 2 \times 2 \times 3\,\mathrm{mcm}(15, 11)$. Por lo tanto, sólo uno de ellos tiene tercera, luego quinta y onceava, por lo que

$$\mathrm{mcm}(180, 264) = (2)(2)(2)(3)(3)(5)(11) = 3960.$$

El proceso se resume en la siguiente tabla:

180	264	2
90	132	2
45	66	2
45	33	3
15	11	3
5	11	5
1	11	11
1	1	

Para encontrar $\mathrm{mcm}(180, 264)$ se multiplican los números de la última columna: $\mathrm{mcm}(180, 264) = (2)(2)(2)(3)(3)(5)(11) = 3960$.

Encontremos ahora $\mathrm{mcm}(80, 100, 180)$.

80	100	180	2
40	50	90	2
20	25	45	2
10	25	45	2
5	25	45	3
5	25	15	3
5	25	5	5
1	5	1	5
1	1	1	

Entonces: $\mathrm{mcm}(80, 100, 180) = (2)(2)(2)(2)(3)(3)(5)(5) = 3600$.

Método 2

Este método se basa en la factorización en primos. Nuevamente calculemos $\mathrm{mcm}(180, 264)$. Para esto tenemos:

$$\begin{aligned}180 =& 2^2 \times 3^2 \times 5,\\ 264 =& 2^3 \times 3 \times 11.\end{aligned}$$

Tomamos los factores primos que se repiten de mayor exponente: 2^3 y 3^2, luego los factores que no se repiten 5 y 11. Luego multiplicamos esos números y obtenemos:

$$\mathrm{mcm}(180, 264) = (2^3)(3^2)(5)(11) = 3960.$$

Este método puede ser usado para hallar el mínimo común múltiplo de más de dos números a la vez.

Por ejemplo, calculemos ahora $\mathrm{mcm}(80, 100, 180)$.

$$\begin{aligned}80 =& 2^4 \times 5,\\ 100 =& 2^2 \times 5^2,\\ 180 =& 2^2 \times 3^2 \times 5.\end{aligned}$$

Los factores repetidos de mayor exponente son: 2^4 y 5^2, y los que no se repiten son 3^2, por lo que $\mathrm{mcm}(80, 100, 180) = (2^4)(5^2)(3^2) = 3600$.

Pudiéramos pensar que hay un tercer método, basado en la siguiente propiedad: si a y b son números naturales, entonces $\mathrm{mcd}(a, b) \times \mathrm{mcm}(a, b) = ab$.

Por ejemplo, si ya sabemos que $\mathrm{mcd}(180, 264) = 12$, entonces al mínimo común múltiplo lo encontramos haciendo la división $\frac{(180)(264)}{12}$, lo que nos da igual a 3960, por lo que $\mathrm{mcm}(180, 264) = 3960$.

Una aplicación inmediata del mínimo común múltiplo lo encontramos al sumar o restar fracciones; por ejemplo, si queremos encontrar $\frac{1}{180} + \frac{1}{264}$, una de las formas es hallar el mínimo común múltiplo de ambos denominadores:

$$\frac{1}{180} + \frac{1}{264} = \frac{22 + 15}{3960} = \frac{37}{3960}.$$

1.5. Álgebra

La finalidad del álgebra es plasmar la representación de los números mediante letras, a las que llamaremos variables, así como su manejo operativo. Al igual que los números, las variables estarán relacionadas mediante una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación; aplicadas una o varias veces, en cualquier orden. De esta manera se obtienen cadenas de variables y operaciones matemáticas que, junto con las constantes y los símbolos de agrupación, forman lo que se llama una **expresión algebraica**.

Podemos clasificar las expresiones algebraicas, dependiendo del número de términos que contengan. Se llama **monomio** a un solo término algebraico. Si dos o más monomios se unen por un signo de $+$ o $-$ se tiene una **suma algebraica**. Un **binomio** será la suma algebraica de dos monomios. Un **trinomio** será la suma algebraica de tres monomios. En general, después de la suma de dos monomios (términos), se llama **polinomio** si los términos son racionales enteros y **multinomio** en caso contrario. Por ejemplo:

$$4x^2 - 2x\sqrt{y} + \frac{y^2}{2}$$

es un multinomio, mientras que:

$$2x^2 - 3xy + \sqrt{2}xy^2 + 5ab$$

es un polinomio.

Definición 9. En general, un polinomio de grado n en la variable x es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

en donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y n es un número natural. A a_n le llamaremos **coeficiente principal** y a a_0 **término independiente**.

Al observar la definición de polinomio notamos que es necesario entender a qué se refiere la notación x^n, así como las operaciones que se pueden realizar con términos de este tipo. Es por ello que el presente material considera, primeramente, el tema de exponentes tanto enteros como fraccionarios, y las propiedades que estos cumplen. Una vez que se tengan considerados los exponentes regresaremos a trabajar con polinomios, definiremos las operaciones que pueden realizarse entre ellos y, como parte de éstas, definiremos los productos notables; concluiremos estas notas con la operación opuesta a un producto, la factorización.

1. 5. 1. Exponentes y sus propiedades

Definición 10. Si n es un número natural, el producto de n factores de un mismo número $x \in \mathbb{R}$ lo escribimos como:

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}}$$

y decimos que x es la **base** y n, el **exponente**.

La operación x^n se llama **potenciación** y cuando $n = 1$ se omite el exponente.

A continuación se presentan las propiedades de los exponentes enteros, las cuales pueden ser probadas con la definición anterior. Asimismo, se encuentran propiedades de los exponentes racionales y fraccionarios, los cuales, aunque no están relacionados directamente con el concepto de polinomio, pueden ser de utilidad cuando de simplificar expresiones algebraicas se trata.

Propiedad 9 (Propiedades para exponentes enteros)**.** Las siguientes propiedades pueden utilizarse para cualesquiera bases $x \neq 0$, $y \neq 0$ números reales y exponentes m, n enteros.

1. $x^0 = 1$
2. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
3. $(x^m)^n = x^{mn}$.
4. $(xy)^m = x^m \cdot y^m$.
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$.
6. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
7. $\frac{1}{x^{-m}} = x^m$.

Observación. Es importante notar que la propiedad $x^0 = 1$ sólo ocurre para $x \neq 0$. Si quisiéramos definirlo para cuando $x = 0$, se debería cumplir que

$$0^0 \cdot 0 = 0^0 \cdot 0^n = 0^{0+n} = 0^n = 0, \tag{1.1}$$

pues $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdots 0}_{n \text{ veces}} = 0$. De esta manera, la igualdad (1.1) se cumple para *cualquier* valor que pudiese tomar 0^0, es decir, 0^0 no está determinado.

Propiedad 10 (Propiedades de radicales)**.** Las siguientes propiedades pueden utilizarse para cualesquiera bases x, y reales positivos y m, n enteros positivos. En este caso, entenderemos que $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. $\sqrt[n]{x^n} = x$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
4. $\sqrt[n]{y \cdot x} = \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{x}$
5. $\sqrt[n]{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{x}}$

Ejemplo 54. Simplificaremos $(1\frac{1}{3})^8((\frac{1}{4})^4)^2$.

$$\begin{aligned}
\left(1\frac{1}{3}\right)^8 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^{4\cdot 2} \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \\
&= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)^8 \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^8 \\
&= \frac{1}{3^8}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 55. Encontraremos el valor de m si $(3^m)^2 = 3^8$.

Notemos que del lado derecho de la igualdad se tiene un exponente entero por lo que, utilizando la propiedad 3 para exponentes enteros en la expresión del lado izquierdo obtenemos $3^{2m} = 3^8$ y, dado que ya se tienen las mismas bases, entonces la igualdad se cumplirá siempre y cuando los exponentes sean los mismos, es decir, $2m = 8$, por lo tanto, $m = 4$.

Ejemplo 56. Simplificaremos la expresión:

$$\sqrt[5]{\frac{25x^8y^7z^{-1}}{x^{-2}y^2z^4}}.$$

Utilizando primero las propiedades de los exponentes enteros para la expresión dentro de la raíz tenemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{\frac{25x^8y^7z^{-1}}{x^{-2}y^2z^4}} &= \sqrt[5]{25\ x^{8-(-2)}\ y^{7-2}\ z^{-1-4}} \\
&= \sqrt[5]{25x^{10}y^5z^{-5}} \\
&= (25)^{\frac{1}{5}} \cdot (x^{10})^{\frac{1}{5}} \cdot (y^5)^{\frac{1}{5}} \cdot (z^{-5})^{\frac{1}{5}} \\
&= (25)^{\frac{1}{5}} \cdot (x)^{\frac{10}{5}} \cdot (y)^{\frac{5}{5}} \cdot (z)^{\frac{-5}{5}} \\
&= (25)^{\frac{1}{5}} \cdot (x)^2 \cdot (y)^1 \cdot (z)^{-1} \\
&= \frac{(25)^{\frac{1}{5}}\ x^2\ y}{z}.
\end{aligned}$$

1. 5. 2. Álgebra de polinomios.

El propósito de los ejercicios que aquí se presentan es reforzar los conocimientos adquiridos en cuanto a operación de polinomios, incluyendo división sintética, productos notables y factorización.

Recordemos que dos términos son *semejantes* si difieren únicamente en sus coeficientes, es decir, son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

Definición 11. La **suma** entre polinomios se realiza únicamente entre términos semejantes y consiste en la adición y sustracción de los coeficientes.

Ejemplo 57. Restar $xy^2 - 3y^2z + 4xz$ de la suma de las siguientes expresiones $3zy^2 - 4yz^2 + 2xz$ y $3y^2z - 4zx - 2xy$.

$$\begin{aligned}
&[(3zy^2 - 4yz^2 + 2xz) + (3y^2z - 4zx - 2xy)] - (xy^2 - 3y^2z + 4xz) \\
&\qquad = [(3zy^2 - 4yz^2 + 2xz) + (3y^2z - 4zx - 2xy)] - (xy^2 - 3y^2z + 4xz) \\
&\qquad = [3 + 3 - (-3)]\ zy^2 + [2 + (-4) - (4)]\ xz - 4yz^2 - 2xy - xy^2 \\
&\qquad = 9zy^2 - 6xz - 4yz^2 - 2xy - xy^2.
\end{aligned}$$

Definición 12. El **producto** entre dos polinomios se realiza multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo, utilizando la propiedad distributiva y las propiedades de exponentes enteros.

Ejemplo 58. Multiplicar los polinomios $x^3 + 3x^2 + x + 5$ y $2x + 1$.

$$\begin{aligned}
(x^3 + 3x^2 &+ x + 5)\ (2x + 1) \\
&= (x^3)(2x + 1) + (3x^2)(2x + 1) + (x)(2x + 1) + (5)(2x + 1) \\
&= [(x^3)(2x) + (x^3)(1)] + [(3x^2)(2x) + (3x^2)(1)] \\
&\quad + [(x)(2x) + (x)(1)] + [(5)(2x) + (5)(1)] \\
&= [2x^4 + x^3] + [6x^3 + 3x^2] + [2x^2 + x] + [10x + 5] \\
&= 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 11x + 5.
\end{aligned}$$

Definición 13. El **cociente** entre polinomios sólo es posible cuando el polinomio dividendo tiene grado mayor que el polinomio divisor. Los principales pasos para realizarla son:

1. Organizar los términos del dividendo y el divisor en orden descendente de acuerdo con las potencias de una misma variable.
2. Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
3. Multiplicar el divisor por el término (monomio) resultante del paso anterior y restar esta multiplicación al dividendo.
4. Repetir el proceso ahora con el polinomio resultante en el paso anterior hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor o hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo 59. Dividir $x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 8x + 14$ entre $x^2 - 3x + 5$.
Procedemos como nos indica el algoritmo.

$$\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & -13x & -40 & & \\ \hline
x^2 - 3x + 5 & x^4 & -16x^3 & +4x^2 & -8x & +14 \\
 & -(x^4 & -3x^3 & +5x^2) & & \\ \hline
 & & -13x^3 & -x^2 & -8x & +14 \\
 & & -(-13x^3 & +39x^2 & -65x) & \\ \hline
 & & & -40x^2 & +57x & +14 \\
 & & & -(-40x^2 & +120x & -200) \\ \hline
 & & & & -63x & +214
\end{array}$$

El resultado lo expresamos de la siguiente manera:

$$\frac{x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 8x + 14}{x^2 - 3x + 5} = x^2 - 13x - 40 + \frac{-63x + 214}{x^2 - 3x + 5}.$$

1. 5. 3. Productos notables y factorización

Ciertos productos que ocurren con mucha frecuencia son llamados **productos notables**; tienen una forma específica, la cual no necesita ser verificada cada vez que se realiza dicho producto. Los más importantes son los siguientes:

Producto notable	Fórmula	Resultado
Binomios conjugados	$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$	Diferencia de cuadrados
	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	Trinomio general
	$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$	Suma de cubos
	$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$	Diferencia de cubos
Binomio al cuadrado	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$	Trinomio cuadrado perfecto

Definición 14. Al proceso de expresar un polinomio como un producto de dos o más factores, respecto a un sistema de números, se le llama **factorización**. Entre las formas más comunes para factorizar se encuentran:

- Factor común
- Agrupamiento
- Fórmulas debidas a los productos notables:
  - Diferencia de cuadrados,
  - Trinomio general,
  - Trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 60. Factorizaciones

1. $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$
2. $xy^2-2x^2y+x^3=x(y^2-2xy+x^2)=x(y-x)^2$
3. $2ab^2x^2-4ab^2xy+6a^2b^2y^2=2ab^2(x^2-2xy+3ay^2)$
4. $3x^2-6x+4x-8=3x(x-2)+4(x-2)=(3x+4)(x-2)$
5. $(5a-2b)^2-(3a-7b)^2=[(5a-2b)-(3a-7b)]\,[(5a-2b)+(3a-7b)]$
   $=(2a+5b)\,(8a-9b)$
6. $a^6-7a^3-8=\left(a^3-8\right)\left(a^3+1\right)$
   $=(a-2)\,(a+1)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+2a+4\right)$
7. $a^6-6a^3+9=(a^3)^2-2(3)(a^3)+(3)^2=\left(a^3-3\right)^2$

Notemos que factorizar un polinomio nos ayuda a determinar sus raíces o ceros, lo cual es uno de los problemas fundamentales del álgebra. Este problema es equivalente a resolver ecuaciones del tipo $P(x)=0$, donde $P(x)$, en nuestro caso, es un polinomio. En las siguientes subsecciones se presentan dos resultados importantes relacionados con las raíces o ceros de un polinomio:

- El problema de resolver ecuaciones lineales, es decir, cuando $P(x)$ es un polinomio de grado 1.

- El problema de resolver ecuaciones cuadráticas, es decir, cuando $P(x)$ es un polinomio de grado 2.

- La relación que existe entre los coeficientes de un polinomio de grado mayor que 1 y sus raíces.

1. 5. 4. Ecuaciones lineales

Definición 15. Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones llamadas miembros de la ecuación. En una ecuación hay símbolos conocidos, o que se suponen conocidos, y otros símbolos que representan valores desconocidos o incógnitas.

Definición 16. Todo número que satisface una ecuación se llama **raíz** o **solución** de dicha ecuación; es decir, dicho número convierte a la ecuación en una identidad.

Definición 17. Un **cero de una función** $f(x)$ es raíz de la ecuación $f(x) = 0$. En el caso particular de la función lineal $f(x) = a_0x + a_1$ con $a_0 \neq 0$, x es raíz de $f(x)$ si $a_0x + a_1 = 0$; esta última relación se llama **ecuación lineal**.

Para resolver una ecuación lineal procederemos como se indica a continuación:

1. Sumar y restar términos en la igualdad de tal manera que uno de los lados de ésta quede igual a cero.

2. Realizar la reducción de términos semejantes hasta obtener una ecuación de la forma $ax + b = 0$.

3. Despejar la variable desconocida o incógnita, respetando las propiedades de adición y multiplicación. Es decir, si $a \neq 0$ entonces $x = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 61. Hallar el valor de z en la ecuación $\frac{2}{z} - 7 = -\frac{19}{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{z} - 7 &= -\frac{19}{3} \\
\frac{2}{z} &= -\frac{19}{3} + 7 \\
\frac{2}{z} &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

de donde $z = 3$.

Ejemplo 62. Hallar el valor de x en la ecuación $\frac{5}{x} + \frac{2}{5} = \frac{3}{x} + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} + \frac{2}{5} &= \frac{3}{x} + 1 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{5} &= 1 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{x} &= 1 - \frac{2}{5} \\ \frac{2}{x} &= \frac{3}{5} \\ 2(5) &= 3(x) \end{aligned}$$

de donde $x = \frac{10}{3}$.

Ejemplo 63. Encontrar el valor de x que satisface la ecuación $ax + b^2 = a^2 + bx$, en donde $a \neq b$.

$$\begin{aligned} ax + b^2 &= a^2 + bx \\ ax + b^2 - a^2 - bx &= 0 \\ (a-b)x + (b^2 - a^2) &= 0 \\ x &= \frac{-(b^2 - a^2)}{a-b} \\ x &= \frac{a^2 - b^2}{a-b} \\ x &= \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} \\ x &= a + b \end{aligned}$$

Ejemplo 64. Cierto trabajo puede ser efectuado por A en 4 días y por B en 6 días. ¿Cuánto tiempo necesitan para realizar todo el trabajo juntos?

Sea x igual al número de días para realizar todo el trabajo. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x} &= \text{Parte del trabajo que hagan juntos en un día,} \\ \tfrac{1}{4} &= \text{Parte del trabajo que hace } A \text{ en } 1 \text{ día,} \\ \tfrac{1}{6} &= \text{Parte del trabajo que hace } B \text{ en } 1 \text{ día,} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{x} &= \tfrac{5}{12} \\ x &= \tfrac{12}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, A y B, hacen el trabajo juntos en 2.4 días.

Definición 18. Un **sistema de dos ecuaciones lineales** son ecuaciones que se tienen que satisfacer de forma simultánea, es decir, que las ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

deben ser satisfechas por los mismos valores para x y y.

Existen distintos métodos de solución, entre los que se encuentran:

- Sustitución,
- Suma y resta,
- Igualación

Sustitución. Consideremos el sistema (1.2). Si $a_1 \neq 0$, despejamos la variable x de la primera ecuación:

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \tag{1.3}$$

sustituyendo x en la segunda ecuación obtenemos:

$$a_2 \left(\frac{c_1 - b_1 y}{a_1} \right) + b_2 y = c_2$$

a continuación resolvemos la ecuación obtenida para la variable y. Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} a_2 c_1 - a_2 b_1 y + a_1 b_2 y &= a_1 c_2 \\ y &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de x sustituimos este valor de y en (1.3)

$$x = \frac{c_1 - b_1 \left(\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)}{a_1} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Suma y resta. Consideremos el sistema (1.2). Para cancelar la variable x, multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda por $-a_1$. Sumamos las ecuaciones obtenidas para llegar a una ecuación en la variable y:

$$\begin{array}{rcl} a_1 a_2 x + a_2 b_1 y &=& a_2 c_1 \\ -a_1 a_2 x - a_1 b_2 y &=& -a_1 c_2 \\ \hline (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y &=& a_2 c_1 - a_1 c_2 \end{array}$$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, resolvemos la ecuación obtenida para la variable y:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Procedemos de forma análoga con los coeficientes de y, para eliminar esta última variable:

$$\begin{array}{rcl} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y &=& b_2 c_1 \\ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y &=& -b_1 c_2 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x &=& b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array}$$

Como $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, podemos resolver la ecuación obtenida para la variable x:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Igualación. Consideremos el sistema (1.2). Si $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, despejamos la variable x de ambas ecuaciones e igualamos los valores:

$$\frac{c_1 - b_1y}{a_1} = x = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}.$$

Tomando los extremos de la expresión anterior, resolvemos la ecuación obtenida para la variable y. Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_2c_1 - a_2b_1y &= a_1c_2 - a_1b_2y \\
a_1b_2y - a_2b_1y &= a_1c_2 - a_2c_1 \\
y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.
\end{aligned}$$

Si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, despejamos y, igualamos los valores de y para obtener una ecuación en la variable x y la resolvemos para tal variable, considerando que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{c_1 - a_1x}{b_1} &= y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \\
b_2c_1 - a_1b_2x &= b_1c_2 - a_2b_1x \\
x &= \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.
\end{aligned}$$

Observación. Cuando $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ se sigue que $a_1b_2 = a_2b_1$, entonces $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = r \neq 0$, es decir, $ra_2 = a_1, rb_2 = b_1$. Al sustituir los valores de a_1 y b_1 en (1.2) se obtiene un sistema de ecuaciones en donde, a excepción de los términos independientes, una ecuación es múltiplo de la otra; en efecto:

$$\begin{aligned}
ra_2x + rb_2y &= c_1 \\
a_2x + b_2y &= c_2
\end{aligned}$$

Cuando $c_1 = rc_2$, entonces la solución es toda la recta $a_2x+b_2y = c_2$; mientras que si $c_1 \neq rc_2$, las rectas determinadas por cada una de las ecuaciones del sistema son paralelas y distintas, por lo que no se intersecan, lo cual nos indica que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 65. Resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{array} \right.$$

Aprovechando que el despeje es inmediato, despejamos la variable r de la segunda ecuación,

$$r = -4 + 2s,$$

sustituyendo r en la primera ecuación obtenemos:

$$3(-4+2s)+4s=3.$$

A continuación resolvemos la ecuación obtenida para la variable s:

$$\begin{aligned} -12+10s &= 3 \\ 10s &= 3+12 \\ s &= \frac{15}{10}=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de r simplemente sustituimos este valor de s en la expresión encontrada previamente para r,

$$\begin{aligned} r &= -4+2s \\ r &= -4+2\left(\frac{3}{2}\right) \\ r &= -4+3 \\ r &= -1. \end{aligned}$$

Ejemplo 66. Resolver el sistema de ecuaciones por el método de suma y resta.

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-2 \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=1 \end{cases}$$

Tomando $x'=\frac{1}{x}$ y $y'=\frac{1}{y}$ tenemos:

$$\begin{cases} 2x'+3y'=-2 \\ 4x'-5y'=1 \end{cases}$$

Para cancelar la variable y', multiplicamos por 5 la primera ecuación y por 3 la segunda, de manera que si sumamos las ecuaciones obtenidas, llegamos a una ecuación en la variable x'.

$$\begin{array}{rcl} 10x'+15y' &=& -10 \\ 12x'-15y' &=& 3 \\ \hline 22x' &=& -7 \end{array}$$

De donde $x'=\frac{-7}{22}$. Sustituyendo $x'=\frac{1}{x}$ obtenemos el valor de x.

$$x=\frac{-22}{7}$$

Ahora procedemos a encontrar el valor de la variable y':

$$\begin{aligned}
2x' + 3y' &= -2 \\
2\left(\frac{-7}{22}\right) + 3y' &= -2 \\
3y' &= -2 + \left(\frac{14}{22}\right) \\
3y' &= \frac{-30}{22} \\
y' &= \frac{-5}{11}
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo $y' = \frac{1}{y}$ encontramos el valor de y:

$$y = \frac{1}{y'} = \frac{-11}{5}.$$

Ejemplo 67. El costo total de 41 entradas a un concierto es $\$12600$. Si las entradas cuestan $\$200$ y $\$400$. ¿Cuántas entradas de cada tipo se compraron?

Sean x y y el número de entradas compradas de $\$200$ y $\$400$, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x + y &= 41 \\ 200x + 400y &= 12600 \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que $y = 22$ y $x = 19$; es decir, se compraron 19 entradas de $\$200$ y 22 entradas de $\$400$.

1. 5. 5. Ecuaciones cuadráticas

La forma general o canónica de una **ecuación de segundo grado** o **cuadrática** es:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.4}$$

en donde $a \neq 0$. Los métodos de solución más comunes están basados en el proceso de factorización, como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 68. Resolver la siguiente ecuación por factorización.

$$(x+1)^2 - 4x = 16.$$

Primero se debe poner la ecuación en su forma canónica, es decir,

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - 4x &= 16 \\
(x^2 + 2x + 1) - 4x &= 16 \\
x^2 - 2x - 15 &= 0.
\end{aligned}$$

Una vez que se tiene en esta forma, se factoriza la ecuación:

$$(x-5)(x+3) = 0.$$

Debido a que tenemos el producto de dos expresiones igualado a cero, entonces debe ocurrir que $x-5=0$ o bien $x+3=0$, obteniéndose así las dos soluciones de la ecuación cuadrática inicial:

$$x=5, \quad x=-3.$$

Ejemplo 69. Resolver la siguiente ecuación por factorización.

$$6(x+1)^2-17x=12.$$

Primero se debe poner la ecuación en su forma canónica, es decir,

$$6x^2-5x-6=0.$$

Una vez que se tiene en esta forma, se factoriza la ecuación:

$$(2x-3)(3x+2)=0.$$

Debido a que tenemos el producto de dos expresiones igualado a cero, entonces debe ocurrir que $2x-3=0$ o bien $3x+2=0$, obteniéndose así las dos soluciones de la ecuación cuadrática inicial:

$$x=\frac{3}{2}, \quad x=-\frac{2}{3}.$$

Ejemplo 70. Resolver la ecuación por factorización,

$$4x^2+4x+1=0.$$

En este caso la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que al factorizarlo se obtiene:

$$(2x+1)^2=0$$

Así, sus soluciones serán $x=-\frac{1}{2}$, de multiplicidad 2.

Ejemplo 71. Resolver por factorización lo siguiente:

$$9x^2-4=0.$$

La ecuación se puede factorizar como una diferencia de cuadrados

$$(3x-2)(3x+2)=0.$$

Al igual que en el primer ejemplo se tiene que uno de los dos factores deberá ser cero, obteniéndose así estás dos soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x=\frac{2}{3}, \quad x=-\frac{2}{3}.$$

En general, nos interesa resolver la ecuación de segundo grado

$$ax^2+bx+c=0,$$

donde $a \neq 0$. Dado que es una ecuación con coeficientes no constantes, la manera más sencilla de factorizarla es completando el trinomio cuadrado perfecto, entonces nos percatamos de que la ecuación,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

requiere del cuadrado del término $\frac{b}{2a}$ para que el lado izquierdo de la igualdad sea un trinomio cuadrado perfecto. Al sumarlo en ambos lados de la ecuación y factorizar el lado izquierdo se obtiene:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Así, resolviendo para x se obtiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.5}$$

Observación. La ecuación dada por (1.5) se llama Fórmula General de Segundo Grado y la expresión dentro de la raíz cuadrada $\mathcal{D} := b^2 - 4ac$, se denomina discriminante de la ecuación de segundo grado. Dependiendo de los valores de éste, podemos tener alguna de las siguientes situaciones respecto de las raíces (soluciones) x_1 y x_2 de la ecuación (1.4):

1. Si $\mathcal{D} > 0$, entonces $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$.
2. Si $\mathcal{D} = 0$, entonces $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$. En este caso se dice que la raíz x_1 de la ecuación (1.4) es de multiplicidad dos.
3. Si $\mathcal{D} < 0$, entonces $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ y diremos que la ecuación (1.4) no tiene soluciones reales, sin embargo, sí las tiene en $\mathbb{C}$, además, ellas son conjugadas, es decir, $x_2 = \overline{x_1}$.

Ejemplo 72. Resolver la siguiente ecuación por fórmula general:

$$(x+1)^2 - 4x = 16.$$

Primero se debe poner la ecuación en su forma canónica, es decir,

$$\begin{aligned} (x+1)^2 - 4x &= 16, \\ (x^2 + 2x + 1) - 4x &= 16, \\ x^2 - 2x - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Una vez que se tiene en esa forma, notamos que los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$ y $c = -15$, por lo que al sustituir en (1.5) obtenemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}.$$

Produciéndose así las dos soluciones de la ecuación cuadrática inicial:

$$x = \frac{2+8}{2} = 5, \quad x = \frac{2-8}{2} = -3.$$

Ejemplo 73. Resolver la siguiente ecuación utilizando fórmula general:

$$6(x+1)^2 - 17x = 12.$$

Primero se debe poner la ecuación en su forma canónica, es decir,

$$6x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Con esa forma, notamos que los coeficientes son $a = 6, b = -5$ y $c = -6$, por lo que al sustituir en (1.5) obtenemos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(-6)}}{2(6)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{5 \pm 13}{12}.$$

Generándose así las dos soluciones de la ecuación cuadrática inicial:

$$x = \frac{5+13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{5-13}{12} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Ejemplo 74. Resolver la ecuación recurriendo a la fórmula general:

$$4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Notemos que los coeficientes son $a = 4, b = 4$ y $c = 1$, por lo que al sustituir en la fórmula general (1.5) obtenemos:

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-(4) \pm \sqrt{0}}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Dado que $\mathcal{D} = 0$, la raíz es de multiplicidad dos, coincidiendo con el resultado obtenido por factorización.

Ejemplo 75. En una ciudad la ecuación de la demanda de gasolina es $d = \frac{900}{p}$ y la de la oferta es $s = p - 80$, donde d y s son los números de galones demandados y suministrados en millares y p el precio por galón en pesos. Hallar el costo en el que la oferta sea igual a la demanda.

Para ello, tenemos que

$$\begin{aligned} \tfrac{900}{p} &= p - 80 \\ p^2 - 80p - 900 &= 0 \\ (p-90)(p+10) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p = \$90$.

1. 5. 6. Fórmulas de Vieta

Notemos que si un polinomio mónico de grado 2 como $P(x) = x^2 + p_1x + q_1$ es factorizado, entonces lo podemos ver como el producto de dos factores lineales, es decir,

$$P(x) = (x - a_1)(x - b_1).$$

Al desarrollar esto último y compararlo con los coeficientes del polinomio original obtenemos las siguientes igualdades:

$$p_1 = -(a_1 + b_1), \qquad q_1 = a_1 b_1.$$

Si procedemos de igual forma con un polinomio mónico de grado 3 como $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, tenemos que si sus factores lineales son $x - a$, $x - b$ y $x - c$, entonces se cumplen las siguientes relaciones

$$p = -(a + b + c), \qquad q = ab + bc + ac, \qquad r = -abc.$$

Observemos que los factores lineales nos indican las respectivas raíces de los polinomios ($x = a_1$ y $x = b_1$), por lo que las igualdades con p_1 y q_1 nos indican la relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces. Estas relaciones se llaman **Fórmulas de Vieta**.

Ejemplo 76. Las raíces del polinomio $x^2 + \alpha x + \beta + 1 = 0$ son números naturales. Muestre que $\alpha^2 + \beta^2$ no es primo.

Supongamos que a y b son las raíces del polinomio. Así, por las Fórmulas de Vieta tenemos que:

$$\alpha = -(a + b) \quad \text{y} \quad \beta + 1 = ab.$$

Como a y b son números naturales, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= [-(a + b)]^2 + [ab - 1]^2 = (-1)^2[a + b]^2 + [ab - 1]^2 \\ &= [a^2 + 2ab + b^2] + [(ab)^2 - 2ab + 1] = a^2 + b^2 + (ab)^2 + 1 \\ &= a^2 + b^2(1 + a^2) + 1 = (1 + a^2)(1 + b^2),\end{aligned}$$

es decir, $\alpha^2 + \beta^2$ es el producto de dos números mayores a 1 y debido eso no puede ser primo.

Ejemplo 77. Indicar el signo de las soluciones de:

$$458x^2 + 34592x + 89754 = 0.$$

Debido a la magnitud de los coeficientes de la ecuación cuadrática, intentar hallar las raíces de ésta, por fórmula general o factorización, puede resultar una actividad muy laboriosa.

Notemos que conseguir las soluciones de esta ecuación cuadrática es equivalente a encontrar las soluciones de:

$$x^2 + \frac{34592}{458}x + \frac{89754}{458} = 0.$$

Estas últimas son equivalentes a hallar las raíces del polinomio cuadrático

$$P(x) = x^2 + p_1 x + q_1, \qquad \text{con} \quad p_1 = \frac{34592}{458},\ q_1 = \frac{89754}{458}.$$

Ahora, a partir de las Fórmulas de Vieta tenemos que las raíces de dicho polinomio, llamémoslas r_1 y r_2, deben cumplir que:

$$-(r_1 + r_2) = p_1 = \frac{34592}{458}, \qquad r_1 r_2 = q_1 = \frac{89754}{458}.$$

Es decir:

- La suma de las raíces debe ser un número negativo,
- El producto de las raíces debe ser un número positivo, lo cual implica que las raíces deben tener el mismo signo.

De las dos observaciones anteriores tenemos que ambas raíces de $P(x)$ deben ser negativas, por tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática inicial también.

Ejemplo 78. Un tren recorre $300\ \mathrm{km}$ con velocidad constante. Si la velocidad hubiese sido $10\ \mathrm{km}$ mayor, el tiempo hubiera sido de una hora menos. Hallar la velocidad del tren.

Sean:

$$\begin{aligned} x &= \text{velocidad del tren,} \\ \tfrac{300}{x} &= \text{tiempo original,} \\ \tfrac{300}{x+10} &= \text{tiempo a velocidad mayor.} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tfrac{300}{x} - \tfrac{300}{x+10} &= 1, \\ x^2 + 10x - 3000 &= 0. \end{aligned}$$

Conforme a las Fórmulas de Vieta, las raíces de esta ecuación, digamos x_1 y x_2, deberán cumplir que $x_1 + x_2 = 10$ y $x_1 x_2 = -3000$. De esta última condición observamos que solamente uno de los valores obtenidos deberá ser positivo, por lo que dicho valor debe ser la solución a nuestro problema.

Resolviendo la ecuación cuadrática (por factorización o fórmula general) encontraremos que la solución positiva es $x = 50\ \mathrm{km/h}$.

Capítulo 2

Ejercicios de práctica.

Este capítulo está constituido por tres secciones; en él se presentan ejercicios, con sus respectivas soluciones, diferenciados por nivel de dificultad.

2.1. Ejercicios de nivel básico

22.ª OVMEES, etapa escuela

Ejercicio 1. Un pequeño koala se come las hojas de un árbol en 10 horas. Su papá y su mamá comen el doble de rápido cada uno. ¿Cuánto tiempo tardan los tres juntos en comer todas las hojas del árbol?

Solución. Como el pequeño koala come a una razón de un árbol cada 10 horas, entonces cada uno de sus padres come a una razón de 2 árboles cada 10 horas. De esta forma, entre los tres comerían 5 árboles cada 10 horas.

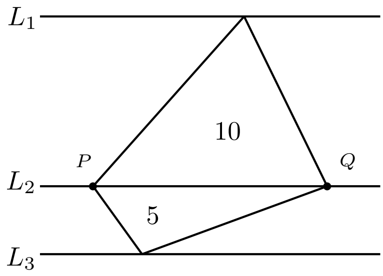
Concluimos que entre los tres tardarían 2 horas en comer todas las hojas del árbol.

Otra solución. El pequeño koala come a una razón de un árbol cada 10 horas, por lo que cada hora come $\frac{1}{10}$ del total del árbol. Como sus padres comen a razón de un árbol cada 5 horas, entonces cada uno de ellos come $\frac{1}{5}$ del total del árbol cada hora. Por lo tanto, en una hora los tres juntos comen:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}$$

del total del árbol. Concluimos que en dos horas entre los tres comerán $\frac{10}{10}=1$ árbol.

Ejercicio 2. Las áreas de los triángulos de la figura son 5 y 10, según se muestra. Las tres líneas L_1, L_2 y L_3 son paralelas, y la distancia entre las dos líneas L_1 y L_3 es de 6. ¿Cuál es la longitud del segmento PQ?

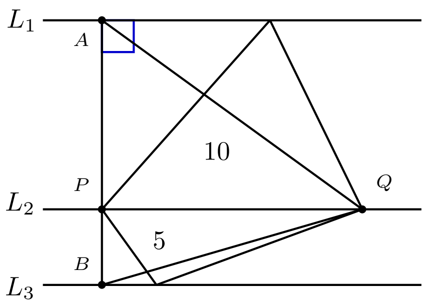


Solución. Sea x la distancia entre las líneas L_1 y L_2, entonces la distancia entre L_2 y L_3 será $6 - x$. Como el área de los triángulos es 10 y 5, entonces al área total es 15. Se sigue que:

$$15 = \frac{PQ \cdot x}{2} + \frac{PQ \cdot (6 - x)}{2} = \frac{PQ \cdot x + PQ \cdot 6 - PQ \cdot x}{2} = \frac{PQ \cdot 6}{2}.$$

Por lo tanto, $PQ = 5$.

Otra solución. Sean A y B en L_1 y L_2, respectivamente, tales que AB pasa por P y es perpendicular a las rectas L_1, L_2 y L_3. Se sigue que el área de $\triangle APQ$ es igual a 10, mientras el área de $\triangle BPQ$ es igual a 5.



Luego, el área de $\triangle ABQ$, con base AB y altura PQ, es igual a 15. Por lo tanto,

$$15 = \frac{AB \cdot PQ}{2} = \frac{6 \cdot PQ}{2}.$$

Concluimos que $PQ = 5$.

Ejercicio 3. Se escriben los dígitos de 2017 como sigue:

$$201722001177222000111777\ldots$$

¿Cuántos dígitos se deben escribir para que la suma de los dígitos escritos sea 1200?

Solución. Observemos que la suma de los dígitos de 2017 es 10, por lo que al agrupar tenemos que:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Dígitos:} & \underbrace{2017} & \underbrace{22001177} & \underbrace{222000111777} & \cdots \\ \text{Suma:} & 10 & 2\cdot 10 & 3\cdot 10 & \cdots \end{array}$$

Deseamos que la suma sea 1200, entonces:

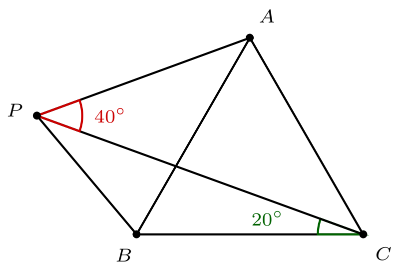
$$1200 = 1\cdot 10 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10 + \cdots + n\cdot 10 = (1+2+3+\cdots+n)10 = 5n(n+1).$$

De ahí que n debe ser solución de la ecuación $n^2 + n - 240 = 0$, es decir, $(n-15)(n+16) = 0$. La única solución positiva de la ecuación anterior es $n = 15$, por ello debemos tener 15 grupos.

Como el número de dígitos en cada grupo va creciendo de 4 en 4, entonces el número total de dígitos que se debe escribir es:

$$1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 + \cdots + 15\cdot 4 = (1+2+3+\cdots+15)4 = 2(15)(15+1) = 480.$$

Ejercicio 4. En la siguiente figura $\triangle ABC$ es equilátero y P es un punto, tal que $\measuredangle BCP = 20^\circ$ y $\measuredangle CPA = 40^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BPC$?



Solución. Como cada ángulo interior de $\triangle ABC$ mide 60°, entonces:

$$\measuredangle ACP = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Por lo tanto, $\triangle ACP$ es isósceles con $AP = AC$. Además,

$$\measuredangle CAP = 180^\circ - 2(40^\circ) = 100^\circ.$$

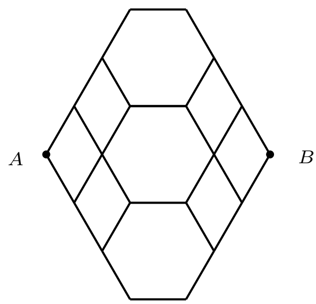
De lo anterior, deducimos que $\measuredangle BAP = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$.

Por otro lado, ya que todos los lados de $\triangle ABC$ miden lo mismo, $AP = AC = AB$. De ahí que $\triangle ABP$ es isósceles, con $\measuredangle APB = \measuredangle ABP$. Como $\measuredangle BAP = 40^\circ$, entonces $\measuredangle BPA = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$. Concluimos que:

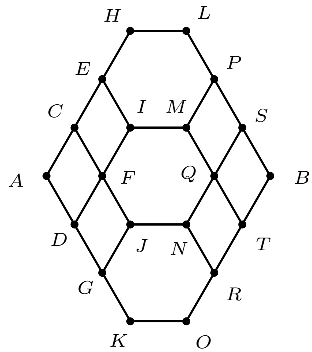
$$\measuredangle BPC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

22.ª OVMEES, etapa zona, examen I

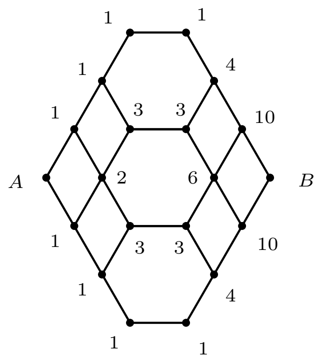
Ejercicio 5. En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B, si sólo está permitido moverse hacia “arriba a la derecha” $\nearrow$, hacia “abajo a la derecha” $\searrow$ o hacia “la derecha” $\rightarrow$?



Solución. Observemos que, para conocer el número de caminos que llegan a un vértice debemos sumar el número de rutas que hay para arribar a los vértices inmediatos anteriores.

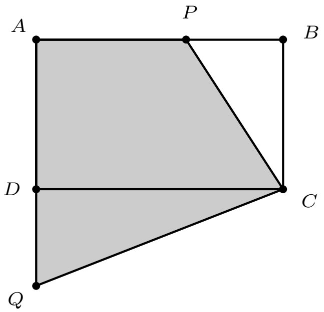


Por ejemplo, para llegar a los vértices C, E, H y L, o bien, a D, G, K y O, solo hay un camino desde A. Para llegar a F hay dos caminos, la suma de los caminos que hay para llegar a C y los que hay para arribar a D. Si procedemos de esta manera podemos indicar en la figura cuántos caminos hay para llegar a cada vértice.



Concluimos que hay 20 caminos para ir del punto A al B.

Ejercicio 6. En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo con AB más grande que AD, de tal modo que BD mide 6. Sea P un punto en AB, tal que $AP = AD$, y sea Q un punto sobre la prolongación del lado AD, tal que $AQ = AB$. ¿Cuánto mide el área sombreada?



Solución. Sean $a = AB = CD = AQ$ y $b = AD = BC = AP$. Por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABD$ tenemos que $a^2 + b^2 = 36$. Por lo tanto,

$$(AQCP) = (\triangle AQC) + (\triangle ACP) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}36 = 18.$$

Otra solución. Sean $a = AB = CD$ y $b = AD = BC$. Por las condiciones del problema, entonces $PB = QD = a - b$. El área de la región sombreada la podemos encontrar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(AQCP) &= (ABCD) + (\triangle DCQ) - (\triangle BCP)\\ &= ab + \frac{1}{2}a(a-b) - \frac{1}{2}b(a-b)\\ &= \frac{1}{2}\left(2ab + a^2 - ab - ab + b^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right).\end{aligned}$$

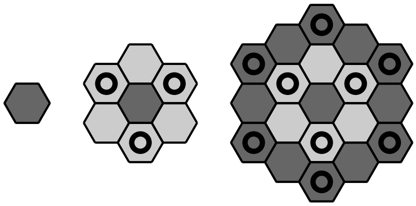
Como $BD = 6$, por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABD$ tenemos que $a^2+b^2 = 36$, de lo cual concluimos que:

$$(AQCP) = \frac{1}{2}36 = 18.$$

Ejercicio 7. Unas abejas empiezan a construir su panal como sigue:

- Construyen una celda hexagonal, y a partir de ésta construyen anillos de celdas hexagonales, rodeando la construcción anterior.
- Cada vez que terminan un anillo rellenan con miel las celdas alternadas de dicho anillo, en la figura están representadas con círculos pequeños.

¿Cuántos anillos completos hay si el número de celdas con miel es 1395?



Solución. Observemos que cada anillo tiene seis celdas más que las que tiene el anillo anterior. Dado que el primer anillo tiene 6 celdas, el segundo 12, etc., por lo que el anillo n-ésimo tiene $6n$ celdas. Como las celdas con miel están alternadas, entonces en cada anillo hay $3n$ celdas con miel. De esta forma, cuando se construye el anillo n-ésimo, el número total de celdas con miel es:

$$3(1) + 3(2) + \cdots + 3(n) = 3(1 + 2 + \cdots + n) = 3\frac{n(n+1)}{2}.$$

Estamos interesados en encontrar el número del anillo cuando hay 1395 celdas con miel, por lo que debemos resolver la ecuación que sigue:

$$3\frac{n(n+1)}{2} = 1395,$$

es decir, n debe satisfacer $n^2 + n - 930 = 0$. Las soluciones, por tanto, son $n = 30$ y $n = -31$. Como la segunda solución no es un número positivo, entonces concluimos que hay 30 anillos completos cuando el número de celdas con miel es 1395.

Ejercicio 8. En un sorteo los boletos se forman con cuatro números, W, X, Y y Z, distintos entre sí. Los números a elegir están entre 1 y 32. ¿Cuántos boletos cumplen que $W < X < Y < Z$, o bien, $W > X > Y > Z$?

Solución. Observemos que la cantidad de conjuntos de 4 números que se puede formar de un conjunto de 32 opciones posibles es:

$$\binom{32}{4} = \frac{32!}{28!4!}.$$

Cada uno de esos conjuntos se puede ordenar de menor a mayor o de mayor a menor, por lo que el número de boletos que cumplen las condiciones es:

$$2\binom{32}{4} = 2\frac{32!}{28!4!}.$$

22.ª OVMEES, etapa zona, examen II

Ejercicio 9. En una entrevista a 2017 estudiantes se reveló que 1500 participan en la Olimpiada de Matemáticas y 1200 en la Olimpiada de Informática. Determina cuántos jóvenes intervienen en ambas olimpiadas si se sabe que exactamente 11 de ellos no participan en ninguna.

Solución. Sea x la cantidad de alumnos que participan en ambas disciplinas, entonces son $1500-x$ y $1200-x$ la cantidad de estudiantes que sólo participan en matemáticas e informática, respectivamente. Vemos que:

$$(1500 - x) + (1200 - x) + x + 11 = 2017,$$

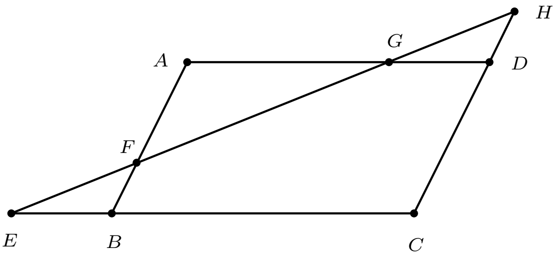
por lo tanto $x = 694$.

Otra solución. Sea x el número de alumnos que participan en ambas olimpiadas. Entonces los que concursan en la Olimpiada de Matemáticas más los que participan en la Olimpiada de Informática menos los que forman parte de las dos olimpiadas debe ser igual al total de estudiantes menos los que no participan en alguna, es decir,

$$1500 + 1200 - x = 2017 - 11.$$

Por lo que $x = 694$.

Ejercicio 10. En el paralelogramo $ABCD$ los puntos F y G son de tal manera que $AF = \frac{2}{3}AB$, $AG = \frac{2}{3}AD$, y el área de $\triangle AFG$ es 4. Se prolonga FG cortando en E y H, respectivamente, las prolongaciones de BC y CD. Determina el área de $\triangle ECH$.



Solución. Tenemos que $\measuredangle EFB = \measuredangle GFA$, al ser ángulos opuestos por el vértice. Por otro lado, $\measuredangle FBE = \measuredangle FAG$, al ser ángulos alternos internos. Debido al criterio de semejanza AA, $\triangle AFG \sim \triangle BFE$. De esta manera,

$$\frac{AG}{BE} = \frac{AF}{BF} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{3}AB} = 2.$$

Por lo tanto $(\triangle AFG) = 4\,(\triangle BFE)$, y como $(\triangle AFG) = 4$, se sigue que $(\triangle BFE) = 1$. Además, tenemos que:

$$BE = \frac{AG}{2} = \frac{\frac{2}{3}AD}{2} = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BC.$$

Por el criterio de semejanza AA vemos que $\triangle CHE \sim \triangle BFE$. De allí que:

$$\frac{CE}{BE} = \frac{\frac{4}{3}BC}{\frac{1}{3}BC} = 4.$$

Así, concluimos que $(\triangle CHE) = 16\,(\triangle EFB) = 16.$

Ejercicio 11. En un salón hay 35 alumnos, el primer día de clase cada uno de ellos es amigo de 17 de sus compañeros; al siguiente día, cada estudiante se hace amigo de los amigos de sus amigos; así cada día siguiente. ¿Será posible que eventualmente todos sean amigos? Justifica tu respuesta.

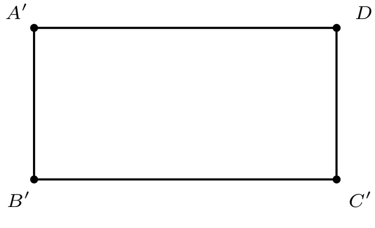
Solución. Observemos que si dos alumnos tienen un amigo en común, entonces serán amigos al segundo día.

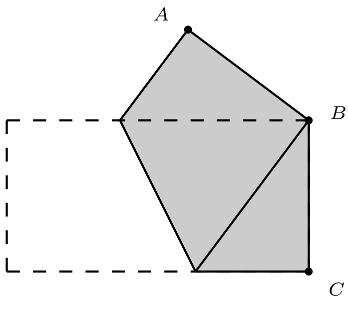
Consideremos una pareja de alumnos que no sean amigos el primer día de clase. El primer alumno es amigo de 17 de sus compañeros, los cuales forman un conjunto de 18 amigos entre sí. Como el segundo estudiante pertenece al complemento de este conjunto, entonces, para ser amigo de 17 de sus compañeros necesariamente debe tener un amigo en el primer conjunto; es decir, existe un amigo en común entre la pareja de alumnos que no eran amigos el primer día, por lo que al segundo día lo serán.

Podemos concluir que al segundo día los 35 alumnos del grupo serán amigos.

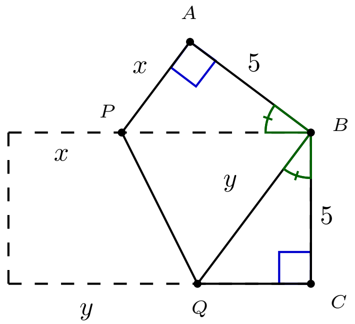
Otra solución. Nos fijamos en un niño P. El primer día el niño P tiene 17 amigos, de los 17 que no son sus amigos al menos hay uno que es amigo de un amigo de P. Por lo tanto al segundo día hay al menos 18 amigos de P. Así, quedan a lo más 16 que no son amigos de P, por lo que al tercer día al menos 19 son amigos de P. Como cada día queda al menos uno menos que aun no es amigo de P, es claro que a más tardar en 17 días todos serán amigos de P. Dado lo anterior, eventualmente todos serán amigos.

Ejercicio 12. Se tiene un rectángulo de lados 5 y 10; luego se dobla de manera que sus esquinas queden juntas, como se muestra en las siguientes figuras. Calcula el valor del área sombreada.





Solución. En la siguiente figura se tiene que $\measuredangle QCB = 90° = \measuredangle PAB$, $BC = 5 = AB$ y $\measuredangle CBQ = 90° - \measuredangle QBP = \measuredangle ABP$. Por el criterio ALA tenemos que $\triangle PAB$ es congruente a $\triangle QCB$. De allí que $10 - y = CQ = AP = x$, y por el Teorema de Pitágoras para $\triangle BCQ$, se sigue que $y^2 = (10 - y)^2 + 5^2$, lo cual implica que $y = \frac{25}{4}$. Luego, $x = \frac{15}{4}$.



Al sustituir los valores obtenidos, el área del trapecio $ABQP$ es

$$5\left(\frac{x+y}{2}\right) = 5\left(\frac{\frac{15}{4}+\frac{25}{4}}{2}\right) = 25.$$

Como el área de $\triangle BCQ$ es $\frac{75}{8}$, concluimos que el área sombreada mide $\frac{275}{8}$.

Otra solución. Una vez que se obtuvieron los valores $y = \frac{25}{4}$ y $x = \frac{15}{4}$, como en la solución anterior, podemos encontrar el área de $\triangle BQP$ al considerar que $PB = y$:

$$(\triangle BPQ) = \frac{5y}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{8}.$$

Observemos que el área sombreada será igual al área del rectángulo original menos el área de $\triangle BPQ$, por lo que concluimos que:

$$(ABCQP) = 5 \cdot 10 - \frac{125}{8} = \frac{275}{8}.$$

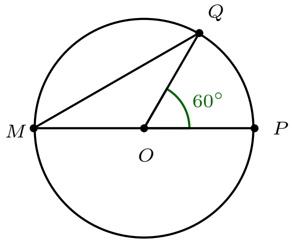
22.ª OVMEES, etapa zona, examen III

Ejercicio 13. Sea C una circunferencia con centro en O y radio igual a 4; sean P y Q puntos sobre la circunferencia C, tales que $\measuredangle POQ = 60°$, y sea M el punto sobre la circunferencia C diametralmente opuesto a P. Determina el área de $\triangle QPM$.

Solución. Como $PO = QO$ y $\measuredangle POQ = 60°$, entonces $\triangle POQ$ es equilátero, por lo que $PQ = 4$. Además, al ser PM diámetro, entonces $\triangle PMQ$ es un triángulo rectángulo. Así, al utilizar el Teorema de Pitágoras en él, tenemos que:

$$MQ^2 = PM^2 - PQ^2 = 8^2 - 4^2 = 48,$$

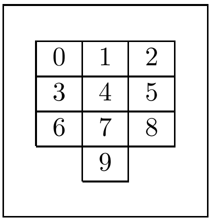
de allí se sigue que $MQ = 4\sqrt{3}$.



Por lo tanto, el área de $\triangle QPM$ es:

$$(\triangle QPM) = \frac{MQ \cdot PQ}{2} = \frac{(4\sqrt{3})(4)}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Ejercicio 14. Para abrir una caja fuerte hay que teclear un código en una pantalla como la siguiente:



El código cuenta con las siguientes características:

- El código tiene cuatro dígitos (el 0 también puede ser un dígito en cualquier posición).
- La suma de sus dígitos es 10.
- Los dígitos son distintos.
- La suma de los dígitos de las unidades y decenas es cuatro veces la suma de los dígitos de las centenas y millares.

Escribe todos los números que satisfacen las condiciones.

Solución. El código está constituido por cuatro dígitos a, b, c, d; y se puede representar por el siguiente número:

$$d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a.$$

Además, por las características del código se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$a + b + c + d = 10,$$
$$a + b = 4(c + d).$$

Al despejar $a+b$ de la primera ecuación y sustituirla en la segunda ecuación obtenemos que:

$$10-(c+d)=4(c+d).$$

De ese modo, $c+d=2$. Al sustituir este último valor en la primera ecuación tenemos que $a+b=8$.

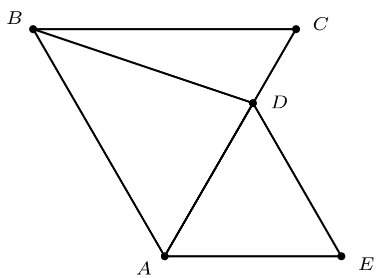
Por lo tanto, para obtener la lista de números que satisfacen las características del código bastará con encontrar todas las combinaciones de números que satisfagan:

$$a+b=8,$$
$$c+d=2.$$

Así, al considerar que los dígitos deben ser distintos, la lista es:

d	c	b	a
0	2	1	7
0	2	7	1
0	2	3	5
0	2	5	3
2	0	1	7
2	0	7	1
2	0	3	5
2	0	5	3

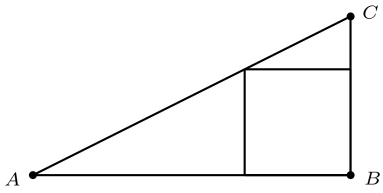
Ejercicio 15. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ equiláteros y $BD=20$. ¿Cuál es la medida del segmento EC?



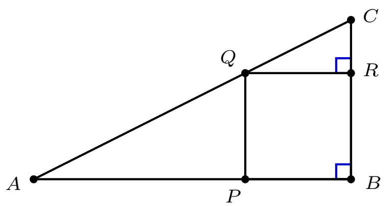
Solución. Por ser $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ equiláteros, tenemos que $AB=AC$, $\measuredangle DAB=60^\circ=\measuredangle EAC$ y $AD=AE$. Por el criterio LAL, $\triangle DAB$ es congruente a $\triangle EAC$. Lo anterior implica que $EC=BD=20$.

22.ª OVMEES, etapa sector, examen I

Ejercicio 16. En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ está inscrito un cuadrado, como se muestra en la figura. Si sabemos que $AB=6$ cm y $BC=3$ cm, ¿cuánto mide el área del cuadrado?



Solución. Sean P, Q y R los otros vértices del cuadrado, además de B, como se muestra en la figura. Sea $x = BR = QR$.



Como $\measuredangle ABC = 90^\circ = \measuredangle QRC$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle QCR$, por el criterio AA, $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle QRC$, a partir de lo anterior tenemos que:

$$\frac{6}{x} = \frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RC} = \frac{3}{3-x}.$$

Al despejar x de esta ecuación obtenemos que $x = 2$. Por lo tanto, el área del cuadrado es $(BPQR) = 4\ \mathrm{cm}^2$.

Ejercicio 17. La siguiente sucesión se forma al escribir los dígitos de los números naturales en orden $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, \ldots$ ¿Cuál es el dígito que ocupa el lugar 2017?

Solución. Observemos que los dígitos del 1 al 9 ocupan nueve lugares, los dígitos de los números del 10 al 99 ocupan $(99 - 9)2 = 180$ lugares; y los dígitos de los números del 100 al 699 ocupan $(699 - 99)3 = 1800$ lugares. De esta forma, cuando se han escrito los dígitos de los números del 1 al 699 se han ocupado $9 + 180 + 1800 = 1989$ lugares en la sucesión.

Como $2017 - 1989 = 28 = 3 \times 9 + 1$, entonces se requiere escribir nueve números adicionales de tres dígitos. Por lo que es necesario escribir del 1 al 708 para ocupar 2016 lugares en la sucesión. De esta forma, el dígito que ocupa el lugar 2017 es el 7.

Ejercicio 18. ¿Cuántos rectángulos distintos tienen sus lados sobre las líneas de una cuadrícula de 10×10?

Solución. Observemos que como los lados del rectángulo deben estar sobre las líneas de la cuadrícula, bastará escoger los vértices que conformen las bases y las alturas. Para determinar la base primero se seleccionan dos vértices de los 11 que existen en la base de la cuadrícula, esto se puede hacer de 55 maneras distintas, ya que:

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{(11-2)!2!} = 55.$$

Para cada una de esas 55 bases, las alturas se determinan de forma semejante a las bases, de entre los 11 vértices de la altura de la cuadrícula; esto es, $\binom{11}{2} = 55$. Por lo tanto, en total hay $55 \times 55 = 3025$ rectángulos distintos entre sí.

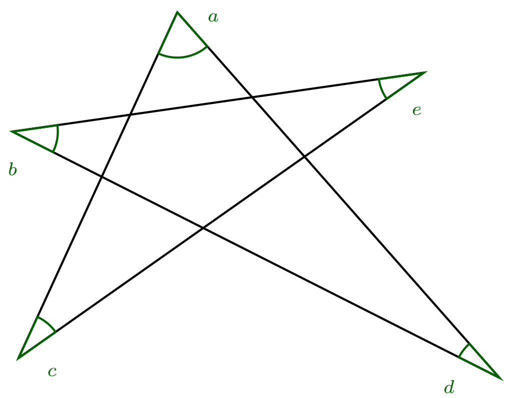
Otra solución. Observemos que cada rectángulo está determinado por dos de sus vértices opuestos. El primer vértice puede ser cualquiera de los $11 \times 11 = 121$ vértices de la cuadrícula. Para escoger el vértice opuesto seleccionamos cualquiera de los vértices que quedan al quitar la fila y columna de vértices correspondientes al primero; es decir, de $10 \times 10 = 100$ formas. Al hacer lo anterior contamos dos veces cada pareja, por lo que el número de parejas distintas es:

$$\frac{121 \times 100}{2} = 6050.$$

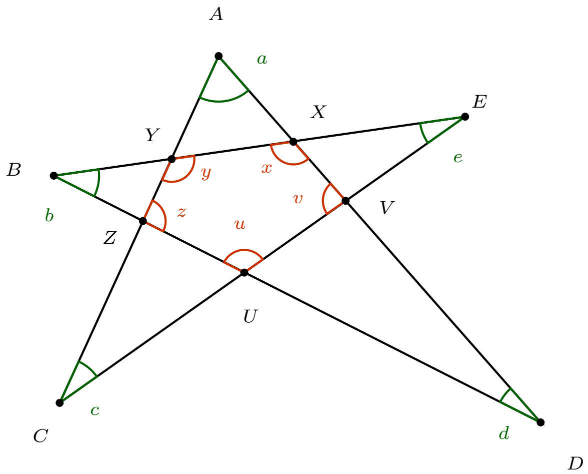
Finalmente, como cada rectángulo tiene dos parejas de vértices opuestos, entonces el número de rectángulos distintos es:

$$\frac{6050}{2} = 3025.$$

Ejercicio 19. En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?



Solución. Sean A, B, C, D y E los puntos que se encuentran en las puntas de la estrella; U, V, X, Y y Z los vértices del pentágono, y u, v, x, y y z los ángulos interiores del pentágono, respectivamente, como en la figura.



Sabemos que la suma de los ángulos interiores del pentágono $UVXYZ$ es:

$$u + v + x + y + z = 3(180°).$$

Como en $\triangle BUE$ la suma de los ángulos interiores es $b + u + e = 180°$, al hacer lo mismo con $\triangle CVA, \triangle DXB, \triangle EYC$ y $\triangle AZD$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
b + u + e =& 180°,\\
c + v + a =& 180°,\\
d + x + b =& 180°,\\
e + y + c =& 180°,\\
a + z + d =& 180°.
\end{aligned}$$

Si sumamos estas cinco igualdades tenemos que:

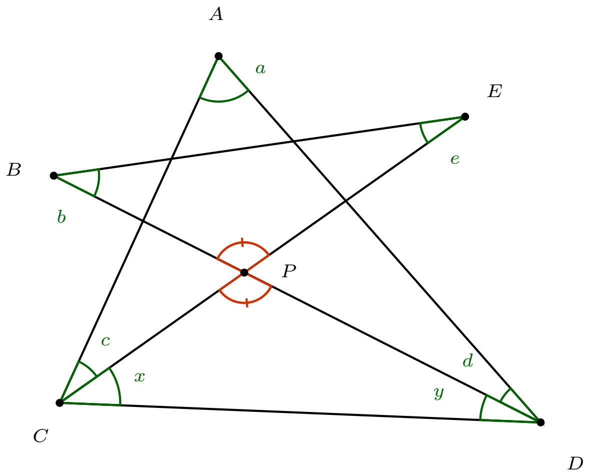
$$2(a + b + c + d + e) + (u + v + x + y + z) = 5(180°),$$

y por la primera ecuación se sigue que:

$$2(a + b + c + d + e) = 2(180°);$$

por lo tanto, $a + b + c + d + e = 180°$.

Otra solución. Sean A, B, C, D y E los puntos que se encuentran en las puntas de la estrella; P la intersección de BD con CE, $x = \measuredangle DCP$ y $y = \measuredangle CDP$, como en la siguiente figura.



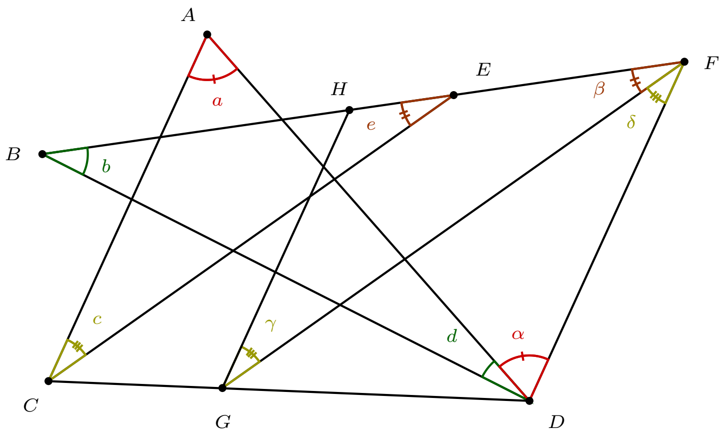
Tenemos que $\measuredangle CPD = \measuredangle BPE$, ya que ellos son ángulos opuestos por el vértice. Por otro lado, como la suma de los ángulos interiores de $\triangle CPD$ y $\triangle BPE$ es igual a $180°$ en cada triángulo, entonces:

$$b + e = x + y.$$

De esta forma, al considerar la suma de los ángulos interiores de $\triangle ACD$, tenemos:

$$a + b + c + d + e = a + (c + x) + (y + d) = 180°.$$

Otra solución. Consideremos los puntos F y H en BE y G en CD, tales que AC, GH y DF son paralelos, al igual que CE con FG. Se forman los ángulos α, β, γ y δ, como en la figura siguiente.



Por estar definidos entre rectas paralelas, tenemos las siguientes igualdades entre los ángulos:

$$\begin{aligned}a &= \alpha,\\ e &= \beta,\\ c &= \gamma = \delta.\end{aligned}$$

De esta forma, al considerar la suma de los ángulos interiores de $\triangle BDF$ tenemos que:

$$a + b + c + d + e = \alpha + b + \delta + d + \beta = 180^\circ.$$

22.ª OVMEES, etapa sector, examen II

Ejercicio 20. El número telefónico de Karla es $ABC\ DEF\ GHIJ$, donde cada letra representa un dígito distinto. Si $A > B > C$; $D > E > F$; $G > H > I > J$; D, E y F son dígitos pares consecutivos; G, H, I y J son impares consecutivos y $A + B + C = 9$; entonces ¿con cuál cifra empieza su número telefónico?

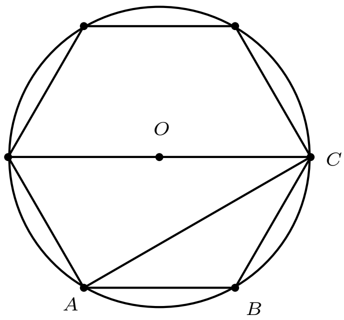
Solución. Observemos que al considerar los números D, E y F como dígitos pares consecutivos, éstos deben escogerse entre los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8. De manera semejante, como las cifras G, H, I y J son impares consecutivos, entonces deben escogerse entre los números 1, 3, 5, 7 y 9.

Para poder escoger los dígitos A, B y C, observemos que no se puede considerar 4 ni 3, 5 o 7, pues si se seleccionara alguno de ellos, los números D, E y F, o bien, G, H, I y J dejarían de ser consecutivos. De esta manera, como los números A, B y C suman 9, las únicas opciones son 8, 1 y 0, o bien, 6, 2 y 1.

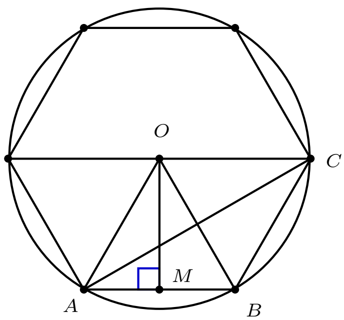
El caso $A = 6$, $B = 2$ y $C = 1$, no deja cifras consecutivas para D, E y F. Por lo que la única opción viable es $A = 8$, $B = 1$ y $C = 0$. Así, el número telefónico debe empezar con 8.

Otra solución. Como G, H, I y J son impares consecutivos, entonces ellos deben pertenecer al conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Lo anterior implica que un sólo dígito entre $A > B > C$ es impar y este únicamente puede ser 1, o bien, 9. Como $A + B + C = 9$, tenemos que $B = 1$, o bien, $C = 1$, y la suma de los otros dos es 8. Además, observemos que las opciones para D, E y F son $D = 0$, $E = 2$ y $F = 4$; $D = 2$, $E = 4$ y $F = 6$; o bien, $D = 4$, $E = 6$ y $F = 8$. En cada caso los dos dígitos pares restantes deben escogerse entre A, B y C. Como su suma es 8, la única posibilidad es $A = 8$, $B = 1$ y $C = 0$, lo cual cumple la condición $A > B > C$. Por lo tanto, el número telefónico debe empezar con 8.

Ejercicio 21. Si el área del círculo es $1\ \mathrm{m}^2$, ¿cuánto mide el área de $\triangle ABC$?



Solución. Como OC es paralela a AB, entonces $\triangle ABC$ y $\triangle ABO$ tienen la misma altura.



Al considerar que $\triangle ABO$ es equilátero, con lados iguales al radio r del círculo, calculamos su altura utilizando el Teorema de Pitágoras para $\triangle AMO$. Al tomar en cuenta que $AM = \frac{1}{2}r$ tenemos que:

$$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

Por lo tanto, el área de $\triangle ABC$ es:

$$(\triangle ABC) = \frac{1}{2}r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Como el área del círculo es $1\ \mathrm{m}^2 = \pi r^2$, entonces $r^2 = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{m}^2$. De allí que:

$$(\triangle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\,\mathrm{m}^2.$$

Ejercicio 22. Los lados de un rectángulo miden a y b. Definimos c como la suma del área y el perímetro de dicho rectángulo. Encuentra el número más pequeño de cuatro cifras que resulta de multiplicar a, b y c, con la condición de que a, b y c sean números primos.

Solución. Como c es la suma del área y el perímetro del rectángulo, tenemos que $c = ab + 2(a + b)$. De lo anterior vemos que si $a = 2$, o bien, $b = 2$, entonces c es un número par, por lo que se descarta esta posibilidad. También descartamos el caso $a = b$, pues $c = a(a + 4)$ no es un número primo. Podemos suponer que además se cumple que $a < b$.

En el caso $a = 3$ y $b = 5$, tenemos que $c = 31$ y $abc = 465$ tiene tres cifras. Lo mismo ocurre si $a = 3$ y $b = 7$, pues $c = 41$ y $abc = 861$.

Si $a = 3$ y $b = 11$, obtenemos $c = 61$ y $abc = 2013$, el cual es de cuatro cifras. Si tomamos $a = 3$ y $b > 11$, entonces $abc > 2013$.

Para $a = 5$ y $b = 7$, tendremos que $c = 59$ y $abc = 2065$, este último número es mayor que 2013. Si $a > 5$, entonces $b > 7$ y $c > 59$; en consecuencia, $abc > 2065$.

De lo anterior concluimos que el número más pequeño es 2013.

Ejercicio 23. Con 5 pelotas negras, 5 blancas y 5 azules, cada una marcada con un número del 1 al 5, ¿de cuántas formas es posible tomar 3 pelotas diferentes si no se quiere tener dos pelotas del mismo color?

Solución. Como cada color, del primero al tercero, se puede tomar de 5 maneras, entonces hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ formas de tomar una pelota de cada color, en el mismo orden de colores. Al considerar que son 3 colores diferentes, se pueden hacer $3 \times 2 \times 1 = 6$ arreglos entre ellos, por lo que en total hay $125 \times 6 = 750$ formas distintas de tomar las pelotas.

Otra solución. Al colocar las pelotas de acuerdo con su número, tenemos un total de 15 pelotas. Si elegimos un color, tendremos 10 pelotas de color distinto al elegido, y si elegimos otro color, tendremos 5 pelotas de un color distinto a los seleccionados anteriormente. Así, basta multiplicar estos números para encontrar el número de posibles formas, que son $15 \times 10 \times 5 = 750$.

Ejercicio 24. Un granjero ha conseguido tener un rebaño de ovejas bastante numeroso, y como es un aficionado a los números, observa que si las cuenta de 2 en 2 le sobra 1. Lo mismo ocurre cuando las cuenta de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, $\ldots$, y así hasta contarlas de 10 en 10. ¿Cuál es el mínimo número de ovejas que tiene?

Solución. El número de ovejas es divisible por 2 si se le resta 1, es divisible por 3 si se le resta 1, es divisible por 4 si se le resta 1, y así sucesivamente. Entonces, basta encontrar el mínimo común múltiplo de los números $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10, y al resultado sumarle 1.

Como $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$ y $10 = 2 \times 5$, entonces:

$$\mathrm{mcm}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Por lo que el granjero debe tener por lo menos 2521 ovejas.

22.ª OVMEES, etapa sector, examen III

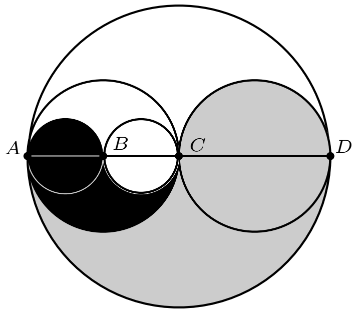
Ejercicio 25. Cada número en una lista se obtiene de la siguiente manera: los dos primeros son 2 y 3; después, cada número es el dígito de las unidades del número que se obtiene al multiplicar los dos anteriores de la lista. Por ejemplo, los primeros cinco elementos de la lista son 2, 3, 6, 8, 8. ¿Cuál es el número que aparece en la posición 2017 de la lista?

Solución. Observemos que la lista inicia de la siguiente forma:

$$2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, \ldots$$

Notemos que hay un ciclo de seis números que se repiten a partir de la tercera posición. Este ciclo es 6, 8, 8, 4, 2, 8. Como $2017 = 2 + 6(335) + 5$, entonces el ciclo completo se repite 335 veces, y del siguiente sólo aparecerán los primeros cinco números. Así, el número que se encuentra en la posición 2017 es el 2.

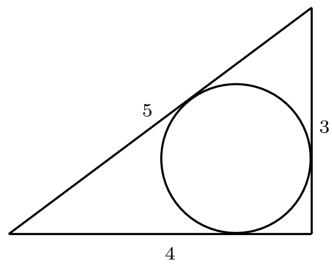
Ejercicio 26. La circunferencia con diámetro AD tiene inscritas dos circunferencias iguales tangentes con diámetro AC y CD, respectivamente, y a la circunferencia de diámetro AC se le inscriben dos circunferencias iguales tangentes de diámetros AB y BC, respectivamente. Encuentra la razón entre las áreas negra y gris de la figura que se muestra.



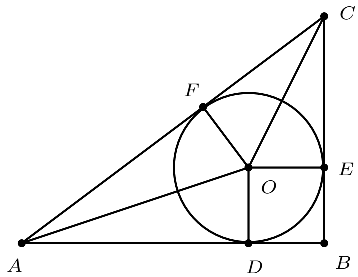
Solución. Nombremos C_1, C_2 y C_3 a las circunferencias de diámetros AD, AC y CD, respectivamente, así como r al radio de C_1, de donde se sigue que C_2 tiene radio $\frac{r}{2}$. Notemos que como el área de C_2 y C_3 es la misma, entonces el área gris es la mitad del área de C_1, es decir, $\frac{\pi r^2}{2}$. De manera análoga, el área negra es la mitad del área de la circunferencia C_2, o sea, $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$. Así, la razón que buscamos es:

$$\frac{\frac{\pi r^2}{8}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 27. Considera el triángulo rectángulo con lados 3, 4 y 5, mismo que tiene inscrito un círculo, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo y el área del triángulo?



Solución. Sea O el centro del círculo tangente, tracemos los radios perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo.



Notemos que $\triangle ADO$ y $\triangle AFO$ son congruentes, por lo que $AD = AF$. De manera análoga tenemos que $\triangle EOC$ y $\triangle FOC$ son congruentes, con lo que $EC = FC$. Como $AD = 4 - r$ y $EC = 3 - r$, entonces $5 = AC = AF + FC = 4 - r + 3 - r = 7 - 2r$, de donde obtenemos que $r = 1$. Así, el área del círculo es π, y como el área del triángulo es 6, la razón que buscamos es $\frac{\pi}{6}$.

Ejercicio 28. Encuentra todos los números naturales n, tales que $\frac{17n+20}{2n+1}$ es un número entero.

Solución. Observemos que $2n + 1$ divide a cualquier combinación lineal de $17n + 20$ y $2n + 1$, por lo que $2n + 1$ divide a $2(17n + 20) - 17(2n + 1) = 23$. Como 23 es un número primo, tenemos dos casos: $2n + 1 = 1$ o $2n + 1 = 23$. Si $2n + 1 = 1$, entonces $n = 0$, lo cual no es posible, ya que n es un número natural. Si $2n + 1 = 23$, tenemos que $n = 11$. Por lo tanto, la respuesta es $n = 11$.

Otra solución. Tenemos que $\frac{17n+20}{2n+1} = k$, donde k es un número entero. Por lo que:

$$\begin{aligned}
17n + 20 &= k(2n + 1) \\
17n + 20 &= 2kn + k \\
17n - 2kn &= k - 20 \\
n(17 - 2k) &= k - 20 \\
n &= \frac{k - 20}{17 - 2k}.
\end{aligned}$$

Como n es un entero positivo, $k-20$ y $17-2k$ deben ser ambos positivos o negativos. Si son positivos tenemos que $k-20>0$ y $17-2k>0$. De estas desigualdades obtenemos que $k>20$ y $\frac{17}{2}>k$, lo cual es imposible, por lo que descartamos este caso. Si son negativos tenemos que $k-20<0$ y $17-2k<0$, de donde obtenemos que $k<20$ y $\frac{17}{2}<k$. Podemos ver que la única k que cumple es 9, por lo anterior $n=11$ es el número natural que buscamos.

2.2. Ejercicios de nivel intermedio

22.ª OVMEES, etapa estatal intermodalidades

Ejercicio 29. Dado un entero positivo n, denotamos la suma de los dígitos de n como $S(n)$. Por ejemplo, $S(903)=9+0+3=12$. Si N es un entero positivo que cumple $S(N)=2017$, ¿cuáles son los valores posibles máximo y mínimo de $S(N+1)$?

Solución. Si el dígito de las unidades de N es 9, $N+1$ tiene como dígito de las unidades al 0, y el dígito de las decenas de $N+1$ aumenta una unidad; por lo que $S(N+1)\leq 2017-9+1=2009$. Es posible que la desigualdad sea estricta, si, por ejemplo, el dígito de las decenas es 9.

Cuando el dígito de las unidades de N es menor que 9, tenemos que $S(N+1)=2017+1=2018$; este valor es el máximo posible para $S(N+1)$. Por ejemplo,

$$S(N+1)=S(\underbrace{11\ldots1}_{2017\text{ unos}}0+1)=S(\underbrace{11\ldots1}_{2018\text{ unos}})=2018.$$

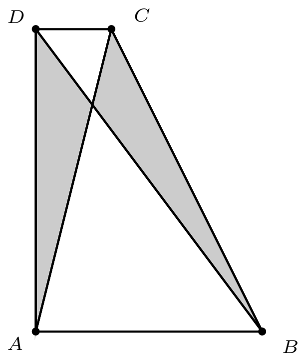
Para encontrar el valor mínimo de $S(N+1)$ debemos reducir el número de dígitos positivos de $N+1$ respecto de los que tenía N. Esto se obtiene al considerar la mayor cantidad de nueves en los últimos dígitos de N, y para que al sumarle 1 cada uno de ellos sumen 10 y desaparezcan los dígitos positivos; lo cual se logra para:

$$N=1\underbrace{99\ldots9}_{224\text{ nueves}}.$$

Por lo que el mínimo valor de $S(N+1)$ es:

$$S(N+1)=S(1\underbrace{99\ldots9}_{224\text{ nueves}}+1)=S(2\underbrace{00\ldots0}_{224\text{ ceros}})=2.$$

Ejercicio 30. En la figura, A, B, C y D son los vértices de un trapecio rectangular con AB paralelo a CD; AD perpendicular a AB y CD, además $AD=4$, $AB=3$ y $CD=1$. ¿Cuánto mide el área sombreada?



Solución. Sea P el punto de intersección de AC con BD. Por un lado, como AB y CD son paralelos, entonces $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ son semejantes con razón de semejanza igual a 3. Como la altura desde P para ambos triángulos conserva esta misma razón, y $AD = 4$, entonces la altura de $\triangle ABP$ desde P es igual a 3. De ello se obtiene que:

$$(\triangle ABP) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

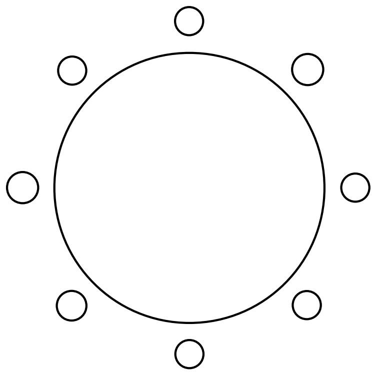
Como AD es altura de $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$, entonces:

$$(\triangle ABD) = (\triangle ABC) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

De esta manera el área sombreada mide:

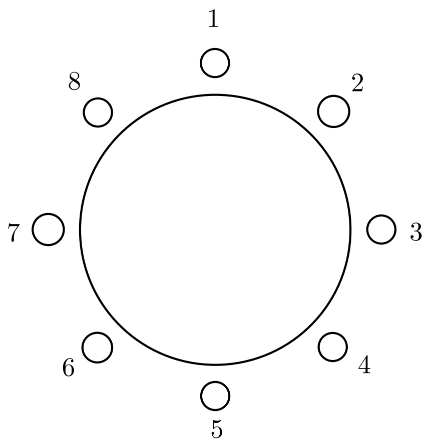
$$\begin{aligned}(\triangle APD) + (\triangle BCP) &= (\triangle ABD) + (\triangle ABC) - 2(\triangle ABP)\\ &= 2 \cdot 6 - 2 \cdot \frac{9}{2}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Ejercicio 31. Ocho personas están sentadas alrededor de una mesa redonda, como se muestra en la figura. Intercambian lugares una pareja a la vez. Sólo está permitido intercambiar lugares con el vecino de la izquierda o con el de la derecha. ¿Cuál es el menor número de intercambios que deben hacerse para que todos ocupen el lugar del compañero que tenían enfrente al comienzo del juego?



Solución. Observemos que para mover una persona a la silla opuesta necesitamos al menos 4 movimientos. Además, en cada movimiento se mueven dos personas, por lo que al menos se necesitarán $\frac{4\times 8}{2} = 16$ movimientos para llevar a cada persona a la silla opuesta. De esta manera, sólo necesitamos encontrar una forma de mover a todos al lugar opuesto en exactamente 16 movimientos.

Numeramos los lugares del 1 al 8 en sentido horario, como se muestra en la figura.



Para llevar la persona que está en la silla 1 a la silla 5 procedemos como sigue: intercambiamos a los individuos que están en las sillas 1 y 2; luego a los que están en las sillas 2 y 3; después a los que están en las sillas 3 y 4, y finalmente a los que están en las sillas 4 y 5.

Al usar el procedimiento anterior, llevamos la persona que está en la silla 8 a la silla 4; la que está en la silla 7 a la silla 3, y finalmente la persona que está en la silla 6 a la silla 2.

Es claro que los sujetos que faltan quedan acomodados en la silla opuesta a la que estaban al principio, por tanto, necesitamos exactamente 16 movimientos.

Ejercicio 32. Demuestra que para todo entero positivo n, el número n^4+2n+1 no es primo.

Solución. Observemos que:

$$\begin{aligned} n^4+2n+1 &= (n^4-n^2)+(n^2+2n+1) \\ &= n^2(n^2-1)+(n+1)^2 \\ &= n^2(n+1)(n-1)+(n+1)^2 \\ &= (n+1)(n^3-n^2+n+1). \end{aligned}$$

Para que $(n+1)(n^3-n^2+n+1)$ sea un número primo debemos considerar que $n^3-n^2+n+1=1$, es decir, que $n(n^2-n+1)=0$, lo cual no puede ocurrir para ningún número n entero positivo.

31.ª OMM, eliminatorio, DGETI-DGETA

Ejercicio 33. Laura tiene 200 monedas que por un lado tienen un 1 y, por el otro, un 3. Ella lanza todas las monedas y suma los números en las caras que quedaron hacia arriba. ¿Cuántos posibles resultados tiene esta suma?

Solución. Si hay x monedas con el número 3 arriba, tendremos $200-x$ monedas con el 1 arriba y su suma es igual a:

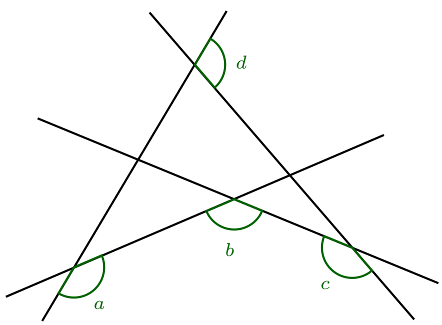
$$3x+(200-x)=200+2x.$$

Para cada valor de x entre 0 y 200 esta suma toma un valor diferente, por lo que concluimos que hay 201 valores posibles.

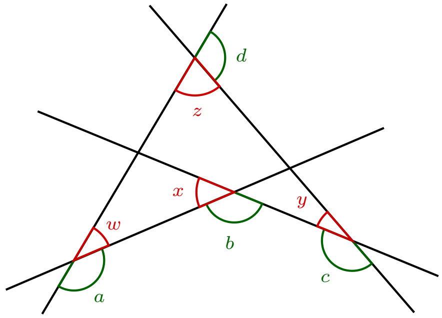
Ejercicio 34. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $5^{15}+3^{15}+8^{15}$?

Solución. Notemos que 8^1 termina en 8; 8^2 termina en 4; 8^3 termina en 2 y 8^4 termina en 6. Además, a partir de aquí se repite esta secuencia, es decir, 8^5 termina en 8, 8^6 en 4, etc. Luego, 8^{15} terminará en el mismo dígito en el que termina 8^3, o sea, en 2. Con un análisis similar llegamos a que 3^{15} termina en 7. Como las potencias de 5 siempre terminan en 5, sólo tenemos que sumar $5+7+2$ para ver que el número $5^{15}+3^{15}+8^{15}$ termina en 4.

Ejercicio 35. ¿Cuál es la suma de los ángulos a, b, c y d en la siguiente figura?



Solución. Además de los ángulos a, b, c y d de la siguiente figura, consideraremos sus ángulos suplementarios w, x, y y z (por ejemplo, $a + w = 180°$).



Tenemos que $w + x = 180° - z - y$, usando la medida del ángulo exterior del triángulo de ángulos w y x y los ángulos del triángulo que tiene y y z. Así, $w + x + y + z = 180°$, de modo que $a + b + c + d = 540°$.

Ejercicio 36. Juan pintará los números del 2 al 60 de manera que se cumpla la siguiente regla: cada número debe tener el mismo color que todos sus múltiplos. ¿Cuál es la mayor cantidad de colores que puede usar Juan?

Solución. Si $2 \leq x \leq 30$, entonces $2x \leq 60$, por lo que x y $2x$ quedan pintados del mismo color. Como 2 y $2x$ también están pintados del mismo color, concluimos que todos los números entre el 2 y 30 quedan pintados del mismo color, digamos de azul.

Por otro lado, cada número x, con $60 \geq x \geq 31$, es primo o tiene un divisor menor o igual que 10; de otro modo podríamos escribirlo como el producto de dos números $a, b > 10$, con lo que $ab > 100 > 60$. Luego, si $x \geq 31$ no es primo, deberá tener el mismo color que dicho divisor, es decir, azul.

Finalmente, si $x \geq 31$ es primo, no tendrá divisores (salvo el 1, que no está considerado) ni múltiplos. Por lo tanto, los siete primos que hay entre 31 y 60 pueden pintarse de cualquier color. Si cada uno tiene un color diferente, tendremos como máximo 8 colores.

2.3. Ejercicios de nivel alto

31.ª OMM, estatal, Veracruz

Ejercicio 37. Águeda olvidó el número que abre su candado, pero tiene apuntado que es un número de cuatro cifras, que el producto de las cifras es 72 y que la suma de las cifras es 15. ¿Cuál es el máximo número de combinaciones que deberá intentar Águeda para lograr abrir el candado bajo las condiciones anteriores?

Solución. Dado que el producto de las cifras del número es 72, lo primero que haremos es escribirlo en factores: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Como el número es de cuatro cifras, alguna de ellas debe ser un número compuesto. En nuestro caso, los posibles números compuestos son 4, 6, 8 y 9.

Si el número compuesto que se toma el 4, no hay manera de elegir los otros tres dígitos para que multiplicados los cuatro den 72 y sumados den 15.

Si el número compuesto que se toma es 6, para que la suma sea 15 se deben elegir $6,\ 2,\ 1$. Tendremos 12 maneras de acomodar estos dígitos con uno que se repite.

Si el número compuesto que se toma es 8, para que la suma sea 15 se deben seleccionar $3,\ 3,\ 1$. Por lo que hay 12 maneras de acomodar estos dígitos con uno que se repite.

Si el número compuesto que se toma es 9, para que la suma sea 15 se deben elegir $2,\ 2,\ 2$. Hay cuatro maneras de acomodar estos dígitos con tres que se repiten.

Por lo tanto, Águeda deberá intentar como máximo 28 combinaciones.

Ejercicio 38. ¿Cuál es el número entero positivo mínimo n para el cual $n!$ tiene más de 2017 ceros al final?

Solución. Como $n!$ tiene menos factores 5 que factores 2, basta contar los factores 5 que hay.

Dado un entero positivo n, se tendrá que en $n!$ hay $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ múltiplos de 5, pero los múltiplos de 25 nos aportan otro factor 5 que no estaba contado anteriormente, mismos que son $\lfloor \frac{n}{5^2} \rfloor$. Análogamente, hay que contar los factores 5 que aportan también los múltiplos de 125, los cuales son $\lfloor \frac{n}{5^3} \rfloor$. Si definimos k como el mayor entero positivo, tal que $\lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor > 0$, entonces el número de factores 5 en $n!$ es

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor .$$

La expresión anterior debe compararse con 2018, que es el mínimo número de ceros que se necesitan. Al simplificar la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^k} &= 2018 \\
n\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^k}\right) &= 2018 \\
n\left(\frac{\frac{1}{5}(1-(\frac{1}{5})^k)}{1-\frac{1}{5}}\right) &= 2018 \\
n\left(1 - \frac{1}{5^k}\right) &= 8072,
\end{aligned}$$

se sigue que $n > 8072$.

Para el caso $n = 8072$, el valor de k es 5 y se tendrán 2014 ceros en $8072!$, puesto que:

$$\left\lfloor \frac{8072}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8072}{5^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{8072}{5^5} \right\rfloor = 1614 + 322 + 64 + 12 + 2 = 2014.$$

Por otro lado, 8075 nos proporciona dos ceros más por ser divisible entre 25, y 8080 nos da sólo un cero más. Por lo que el mínimo entero positivo n, para el cual $n!$ tiene más de 2017 ceros al final, es 8085.

Ejercicio 39. Encontrar todas las funciones f que satisfacen que para cada n entero positivo o cero se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} 2f(n) + f(n+1) &= 0, \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Solución. Afirmamos que $f(n) \neq 0$ para todo n no negativo. En caso contrario, consideremos el entero positivo más pequeño n_0 para el cual $f(n_0) = 0$. Observemos que $f(0)$ y $f(1)$ son distintos de cero. Por la condición del problema, $2f(n_0 - 1) + f(n_0) = 0$, lo cual implica que $f(n_0 - 1) = -\frac{1}{2}f(n_0) = 0$, esto es una contradicción, puesto que n_0 era el entero positivo más pequeño para el que esto ocurre. Por lo anterior $f(n) \neq 0$ para todo n no negativo.

Como $2f(n) + f(n+1) = 0$, tenemos en particular que:

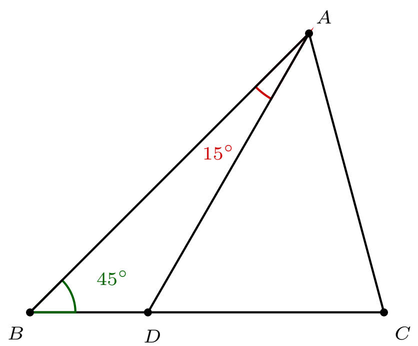
$$\frac{f(k)}{f(k-1)} = -2$$

para todo $k = 1, 2, \ldots n$. De allí que:

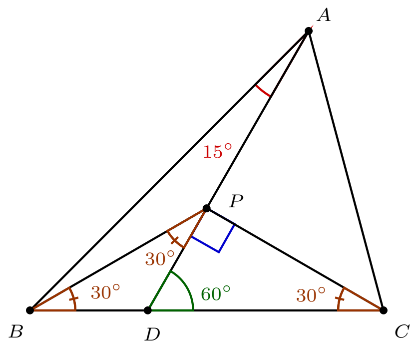
$$\frac{f(n)}{f(0)} = \frac{f(n)}{f(n-1)} \cdot \frac{f(n-1)}{f(n-2)} \cdots \frac{f(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(1)}{f(0)} = \underbrace{(-2)(-2)\cdots(-2)(-2)}_{n \text{ veces}} = (-2)^n.$$

Lo anterior implica que $f(n) = (-2)^n$ para cualquier n entero positivo o cero.

Ejercicio 40. Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que D es un punto sobre el segmento BC, de tal forma que $2BD = CD$, $\measuredangle ABD = 45°$ y $\measuredangle BAD = 15°$, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle ACB$?



Solución. Observemos que como $\measuredangle ABD = 45°$ y $\measuredangle BAD = 15°$, entonces $\measuredangle BDA = 120°$, lo cual implica que $\measuredangle CDA = 60°$. Si P es el pie de C en AD, de lo anterior se desprende que $CD = 2DP$. De esta forma, $\triangle BDP$ es isósceles con $BD = DP$.

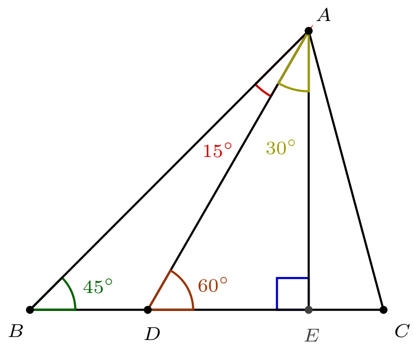


Como $\measuredangle BDA = 120°$ y $\triangle BDP$ es isósceles, entonces $\measuredangle DBP = \measuredangle DPB = 30°$, lo cual implica que $\measuredangle PBA = 15°$. Como $\measuredangle BAD = 15°$, por consiguiente, $\triangle ABP$ es isósceles con $AP = BP$.

Por otro lado, como $\measuredangle DBP = \measuredangle DCP = 30°$, entonces $\triangle BCP$ es isósceles con $BP = CP$.

De esta manera $\triangle ACP$ es isósceles, y como $\measuredangle APC = 90°$, en consecuencia, $\measuredangle ACP = \measuredangle CAP = 45°$. Concluimos que $\measuredangle ACB = 75°$.

Otra solución. Sean $a = BD$, $b = AC$ y $c = AD$. Observemos que como $\measuredangle ABD = 45°$ y $\measuredangle BAD = 15°$, entonces $\measuredangle BDA = 120°$, lo cual implica que $\measuredangle CDA = 60°$. De esta forma, al considerar E como el pie de A en BC tenemos que $DE = \frac{1}{2}c$ y $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.



Además, como:

$$\measuredangle BAE = \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = 15° + 30° = 45°,$$

observamos que $\triangle ABE$ es isósceles con $AE = BE$, lo cual implica que:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}c = a + \frac{1}{2}c,$$

por lo tanto,

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}-1}a = (\sqrt{3}+1)a.$$

Por la Ley de los Senos, aplicada a $\triangle ABD$ para los lados $AD = c$ y $BD = a$, tenemos:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} 15^\circ}.$$

Lo anterior implica que $\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Por la Ley de los Cosenos, aplicada a $\triangle ADC$, y ya que $DC = 2BD = 2a$, entonces:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + (2a)^2 - 4ac\cos 60^\circ \\ &= (\sqrt{3}+1)^2a^2 + 4a^2 - \frac{4a}{2}(\sqrt{3}+1)a \\ &= 6a^2. \end{aligned}$$

Se sigue que $b = \sqrt{6}a$.

Observemos que para $\triangle AEC$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \measuredangle ACB) &= \frac{EC}{AC} \\ &= \frac{2a - \frac{1}{2}c}{b} \\ &= \frac{4a - (\sqrt{3}+1)a}{2\sqrt{6}a} \\ &= \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \\ &= \operatorname{sen} 15^\circ. \end{aligned}$$

Como $90^\circ - \measuredangle ACB$ es un ángulo agudo, entonces $90^\circ - \measuredangle ACB = 15^\circ$, de lo cual concluimos que $\measuredangle ACB = 75^\circ$.

31.ª OMM, Veracruz, selectivo 1

Ejercicio 41. En una universidad hay 10001 estudiantes que se juntan en pandillas (un estudiante puede estar en varias pandillas) y las pandillas se juntan en sociedades (una pandilla puede estar en varias sociedades). Además, se cumplen las siguientes reglas:

- Cada pareja de alumnos está en exactamente una pandilla.
- Por cada estudiante y cada sociedad el estudiante pertenece a, exactamente, una pandilla de la sociedad.
- Cada pandilla tiene una cantidad impar de alumnos. Si una pandilla tiene $2m + 1$ estudiantes, entonces está en exactamente m sociedades.

Si hay k sociedades, entonces determina los posibles valores de k.

Solución. Dado un estudiante E, consideramos $Y_E = \{(P,S) : E \in P \in S\}$. Por la segunda condición tenemos, exactamente, k de estas parejas; es decir, que Y_E tiene k elementos.

A continuación vamos a contar el número de elementos en Y_E de otra manera.

Consideremos ahora una pandilla P' a la que pertenezca E. Por la tercera condición, en P' hay otros $2m$ estudiantes distintos de E, y P' está exactamente en m sociedades, por lo que tenemos m parejas del tipo (P', S), con P' la pandilla dada.

Como E está exactamente en una pandilla con cada uno de los restantes 10000 estudiantes, tenemos que el número de pandillas P' es exactamente $\frac{10000}{2} = 5000$. El conteo de los elementos en Y_E lo realizamos de la siguiente manera: tomamos un nuevo estudiante E_1 que estará en una pandilla junto con $2m_1$ estudiantes; lo cual nos da una pandilla P_1 y m_1 parejas en Y_E; tomamos un nuevo estudiante E_2 con $E_2 \notin P_1$, lo cual nos da una pandilla P_2 que verifica $P_1 \cap P_2 = \{E\}$ y tiene $2m_2$ estudiantes; luego, P_2 determina m_2 nuevas parejas en Y_E. Así continuamos hasta llegar a que hay 5000 parejas (P,S) en Y_E.

Como hemos contado los elementos de Y_E de dos formas, éstas deben coincidir, es decir, que $k = 5000$.

En conclusión, tenemos un caso degenerado en el que hay una sola pandilla y 5000 sociedades, todas iguales y formadas por la única pandilla que hay.

Ejercicio 42. Encuentra todos los enteros positivos n, que cumplan que $20n+2$ divida a $2017n + 2016$.

Solución. Dada la condición de divisibilidad, observamos que $2017n + 2016$ debe ser par, por lo que n debe ser par: digamos $n = 2m$. Al sustituir tenemos que $20(2m) + 2$ divide a $2017(2m) + 2016$, lo cual implica que $20m + 1$ divide a $2017m + 1008$. Pero $2017m + 1008 = 100(20m + 1) + 17m + 908$, por lo que $20m + 1$ divide a $17m + 908$.

Cuando $\frac{17m+908}{20m+1}$ vale $1, 2, 3, 4$ o 5, m no es un entero positivo. Por lo tanto,

$$\frac{17m + 908}{20m + 1} \geq 6.$$

De allí que:

$$1 \leq m \leq \frac{902}{103} < 9.$$

Sin embargo, todo entero positivo m de 1 a 8 satisface que $20m + 1$ no divide a $17m + 908$.

Debido a lo anterior no hay ningún entero positivo n que satisfaga la condición.

Otra solución. Buscamos los n, tales que $20n+2$ divide a $2017n+2016$. Como $20n + 2$ divide a $100(20n + 2)$, tenemos que $20n + 2$ divide a $2000n + 200$. De allí que:

$$20n + 2 \mid (2017n + 2016) - (2000n + 200) = 17n + 1816.$$

Como $20n + 2$ divide a $20n + 2$, entonces:

$$20n + 2 \mid (20n + 2) - (17n + 1816) = 3n - 1814.$$

Luego, para algún entero k tenemos que $3n - 1814 = (20n + 2)k$, es decir, que $2k + 1814 = -n(20k - 3)$. Por lo tanto, $20k - 3$ divide a $2k + 1814$.

Como $20k - 3$ divide a $10(2k + 1814)$ y a $20k - 3$, entonces $20k - 3$ divide a la diferencia que es el número primo: 18143. De esta manera, $20k - 3$ debe ser un divisor positivo o negativo de 18143. Pero el único caso posible para que k sea entero es cuando $k = -907$, de allí que $n = 0$.

Concluimos que no hay ningún entero positivo n que cumpla la condición del problema.

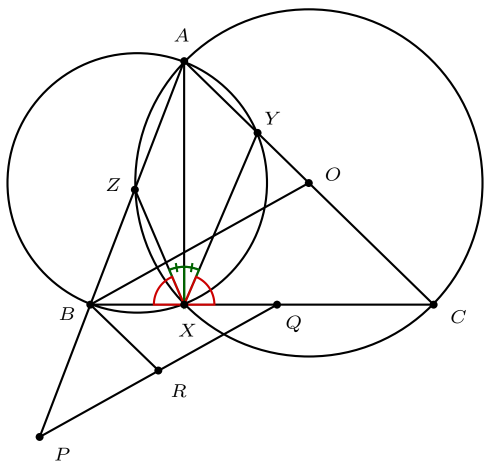
Ejercicio 43. Sean X, Y y Z puntos en los lados BC, AC y AB, respectivamente, de $\triangle ABC$, tales que $ABXY$ y $AZXC$ son cíclicos. Sea O el circuncentro de $\triangle AXC$. Sean P y Q los puntos de intersección de AB y BC con una recta paralela a BO. Si AX es la bisectriz de $\measuredangle ZXY$, demuestra que la recta paralela a AC, la cual pasa por B, corta a PQ en su punto medio.

Solución. Como $ABXY$ y $AZXC$ son cíclicos, entonces:

$$\begin{aligned}\measuredangle BXY &= 180° - \measuredangle BAY,\\ \measuredangle CXZ &= 180° - \measuredangle ZAC.\end{aligned}$$

De esa forma $\measuredangle BXY = \measuredangle CXZ$, ya que $\measuredangle BAY = \measuredangle ZAC$.

Dado que AX es bisectriz de $\measuredangle ZXY$, entonces $\measuredangle ZXA = \measuredangle AXY$, lo cual implica que $\measuredangle BXZ = \measuredangle CXY$. De lo cual se sigue que $\measuredangle AXC = \measuredangle BXA = 90°$. De esta manera, podemos asegurar que AC es el diámetro del circuncírculo de $\triangle AXC$, en consecuencia, que O es el punto medio de AC.



Por otro lado, como BO y BR son paralelas a PQ y AC, respectivamente; por el criterio AA tenemos que $\triangle PBR$ y $\triangle QBR$ son semejantes a $\triangle BAO$ y

$\triangle BCO$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\frac{PR}{BO} = \frac{BR}{AO},$$
$$\frac{BR}{CO} = \frac{QR}{BO}.$$

Como $AO = CO$, entonces $\frac{PR}{BO} = \frac{QR}{BO}$, de lo cual concluimos que $PR = QR$.

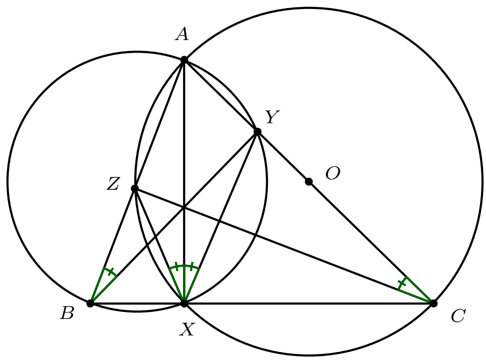
Otra solución. Como $ABXY$ es cíclico, entonces $\measuredangle ABY = \measuredangle AXY$ y $\measuredangle AYB = \measuredangle AXB$. A su vez, como $AZXC$ es cíclico, entonces $\measuredangle ZXA = \measuredangle ZCA$ y $\measuredangle AZC = \measuredangle AXC$. Al ser AX bisectriz de $\measuredangle ZXY$, entonces

$$\measuredangle ABY = \measuredangle AXY = \measuredangle ZXA = \measuredangle ZCA.$$

Por el criterio AA tenemos que $\triangle ABY$ y $\triangle ACZ$ son semejantes, donde:

$$\measuredangle AXB = \measuredangle AYB = \measuredangle AZC = \measuredangle AXC.$$

Dado que estos ángulos son suplementarios, tenemos las relaciones entre los ángulos: $\measuredangle AXB = \measuredangle AXC = 90°$. De lo anterior se sigue que AC es el diámetro del circuncírculo de $\triangle AXC$, por lo tanto, O es el punto medio de AC.



Una vez que garantizamos que $AO = CO$, el resultado se concluye como en la solución anterior.

Ejercicio 44. Sean x, y, z números reales positivos. Demuestra que:

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 18)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 12(x + y + z)^2.$$

Solución. Por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos que

$$\frac{x^2 + x^2 + x^2 + 1 + 1 + 1}{6} \geq \sqrt[6]{x^6} = x.$$

De lo cual resulta que $x^2 + 1 \geq 2x$. De la misma forma obtenemos las relaciones $y^2 + 1 \geq 2y$ y $z^2 + 1 \geq 2z$. Al sumar estas desigualdades conseguimos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z).$$

Falta demostrar que $x^3 + y^3 + z^3 + 18 \geq 6(x + y + z)$. Nuevamente, por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos que:

$$\frac{x^3 + 2 + 4}{3} \geq \sqrt[3]{8x^3} = 2x.$$

De esto obtenemos que $x^3 + 6 \geq 6x$. De manera semejante logramos las relaciones $y^3 + 6 \geq 6y$ y $z^3 + 6 \geq 6z$. Por lo que:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 18 \geq 6(x + y + z).$$

Así concluimos que:

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 18)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 12(x + y + z)^2.$$

Otra solución. Como $(x - 1)^2 \geq 0$, entonces $x^2 + 1 \geq 2x$. Análogamente, podemos demostrar que $y^2 + 1 \geq 2y$ y $z^2 + 1 \geq 2z$. Al sumar estas relaciones obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z).$$

Por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos que:

$$\frac{x^3 + 3 + 3}{3} \geq \sqrt[3]{9x^3}.$$

Lo cual implica que $x^3 + 6 \geq 3x\sqrt[3]{9}$. De igual forma se cumplen $y^3 + 6 \geq 3y\sqrt[3]{9}$ y $z^3 + 6 \geq 3z\sqrt[3]{9}$. Por lo que:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 18 \geq 3\sqrt[3]{9}(x + y + z).$$

Notemos que $\sqrt[3]{9} > 2$, entonces:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 18 > 3(2)(x + y + z) = 6(x + y + z).$$

Concluimos que:

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 18)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 12(x + y + z)^2.$$

Otra solución. Por la Desigualdad entre Medias Potenciales tenemos que:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}.$$

De allí que $x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3^2}$.

Por otro lado, de la Desigualdad Media Cuadrática-Media Aritmética encontramos que:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}.$$

Por lo tanto, $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$. De esta manera:

$$(x^3+y^3+z^3+18)(x^2+y^2+z^2+3) \geq \left(\frac{(x+y+z)^3}{3^2}+18\right)\left(\frac{(x+y+z)^2}{3}+3\right).$$

Sea $a = x+y+z$. Para probar la desigualdad del problema, basta verificar que:

$$\left(\frac{a^3}{9}+18\right)\left(\frac{a^2}{3}+3\right) \geq 12a^2.$$

Lo anterior es equivalente a corroborar que $a^5+9a^3+1458 \geq 162a^2$. Por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos que:

$$a^5+9a^3 \geq 2\sqrt{9a^8} = 6a^4.$$

Luego, $a^5+9a^3+1458 \geq 6a^4+1458$.

Observemos que $6a^4+1458 \geq 162a^2$, puesto que:

$$\begin{aligned} 6a^4-162a^2+1458 &= 6[a^4-27a^2+243] \\ &= 6\left[\left(a^2-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{243}{4}\right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo que se cumple que:

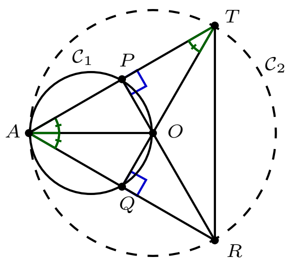
$$\left(\frac{a^3}{9}+18\right)\left(\frac{a^2}{3}+3\right) \geq 12a^2.$$

Lo cual era lo que queríamos verificar.

31.ª OMM, Veracruz, selectivo 2

Ejercicio 45. Sea $\mathcal{C}_1$ una circunferencia de diámetro AO y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia de centro O y radio AO. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}_1$ (distinto de A y O), tal que $PO < AP$. Sea T la intersección de la recta AP con la circunferencia $\mathcal{C}_2$ (con T y A puntos distintos). Sea Q la intersección de TO con $\mathcal{C}_1$ (con Q y O puntos distintos). Sea R la intersección de AQ con PO. Demuestra que R está sobre $\mathcal{C}_2$ si y sólo si $\measuredangle PAO = 30°$.

Solución. Consideremos inicialmente que R está sobre $\mathcal{C}_2$. Tenemos que O es el circuncentro de $\triangle ART$, por lo que RP y TQ son mediatrices y alturas correspondientes a AT y AR. Por lo tanto, $\triangle ART$ es equilátero, donde AO es bisectriz. Lo anterior implica que $\measuredangle PAO = 30°$.



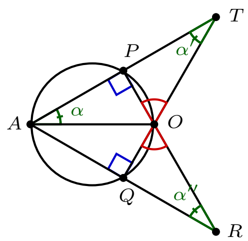
Consideremos ahora que $\measuredangle PAO = 30^\circ$. Como $\triangle AOT$ es isósceles, entonces $\measuredangle PTO = \measuredangle PAO = 30^\circ$; por lo que $\measuredangle TOA = 120^\circ$. Se sigue que $\measuredangle QOA = 60^\circ$ y $\measuredangle QAO = 30^\circ$. Por lo tanto, Q es simétrico a P respecto de AO y, por construcción, R es simétrico de T respecto a AO. De esta manera, como T está sobre $\mathcal{C}_2$, entonces R está sobre $\mathcal{C}_2$.

Otra solución. Si R está sobre $\mathcal{C}_2$, entonces O es el circuncentro de $\triangle ART$. Por lo tanto, P y Q son puntos medios de AT y AR, respectivamente. Como $OT = OA = OR$, por ser radios de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, y por el criterio LLL tenemos que $\triangle OPT$ y $\triangle OQA$ son semejantes a $\triangle OPA$ y $\triangle OQR$, respectivamente. Como $\measuredangle POT = \measuredangle QOR$, se sigue que $\triangle OPT$, $\triangle OPA$, $\triangle OQA$ y $\triangle OQR$ son congruentes.

Sea $\alpha = \measuredangle PAO$. Por la congruencia entre $\triangle OPA$, $\triangle OQA$ y $\triangle OQR$ tenemos que $\measuredangle QAO = \measuredangle QRO = \alpha$. Como $\measuredangle APR = 90^\circ$, se sigue que $3\alpha = 90^\circ$, lo cual implica que $\measuredangle PAO = \alpha = 30^\circ$.

Inversamente, si $\measuredangle PAO = 30^\circ$, como en la solución anterior, se cumple que $\measuredangle QOA = 60^\circ$ y $\measuredangle QAO = 30^\circ$. Si observamos que $\measuredangle QOR = \measuredangle POT = 60^\circ$, entonces $\measuredangle ARO = 30^\circ$, por lo que $\triangle AOR$ es isósceles con $AO = OR$. De allí se concluye que R está sobre $\mathcal{C}_2$.

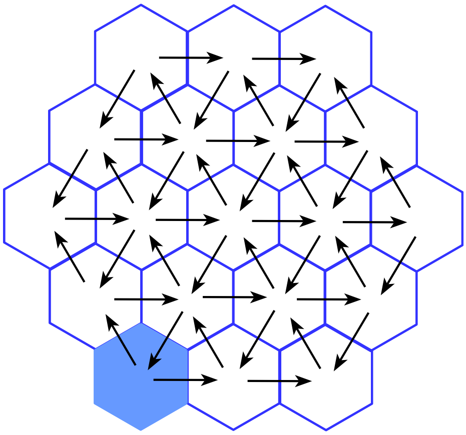
Otra solución. A partir de las hipótesis del problema, $\triangle AOT$ es isósceles; por lo que si $\alpha = \measuredangle PAO$, entonces $\measuredangle PTO = \alpha$ y $\measuredangle QOR = \measuredangle POT = 90^\circ - \alpha$, de lo cual se sigue que $\measuredangle QRO = \alpha$.



El resultado se deduce a partir de la siguiente serie de equivalencias:

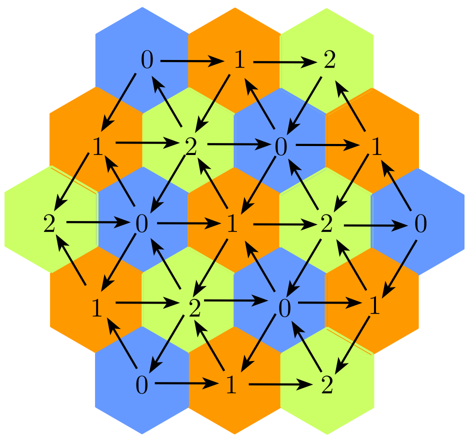
$$
\begin{aligned}
R \in \mathcal{C}_2 &\Leftrightarrow AO = OR \\
&\Leftrightarrow \measuredangle OAR = \measuredangle ARO = \measuredangle PAO = \alpha \\
&\Leftrightarrow 3\alpha = 90^\circ \\
&\Leftrightarrow \measuredangle PAO = \alpha = 30^\circ.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 46. Prueba que es imposible hacer un recorrido siguiendo las flechas de la figura, de tal manera que se empiece y termine en el hexágono sombreado y que pase exactamente una vez por cada uno de los hexágonos.



Solución. Supongamos que existe un camino que cumple lo que pide el problema. Llamemos a al número de flechas que suben $(\nwarrow)$, b al número de las flechas que bajan $(\swarrow)$ y c al número de flechas que van a la derecha $(\rightarrow)$. Al ser un camino cerrado se sube lo mismo que se baja, por lo que $a = b$. Análogamente, la cantidad de los movimientos a la derecha son los mismos que los que tienen dirección a la izquierda. Así, notemos que los movimientos a la izquierda son los que usan a o b, y cualquiera a la derecha avanza el doble que cualquiera de éstos, por lo que $2c = a + b$; luego, $c = a = b$. Como por cada flecha que se usa se avanza un hexágono, en total se usan 19 flechas, lo cual es una contradicción, pues 19 no es múltiplo de 3.

Otra solución. Denotemos cada hexágono con uno de los números 0, 1, o bien, 2, de tal forma que cada triángulo formado por las flechas tenga un número distinto en cada vértice, como se aprecia en la siguiente figura.



De esa forma podemos observar que si estamos en un “1”, sólo podemos movernos a un “2”; si estamos en un “2”, únicamente podemos movernos a un “0”, y de un “0” sólo podemos pasar a un “1”.

Por lo tanto, la secuencia que sigue cualquier camino es 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, $1, 2, \cdots$

Por otra parte, observamos que hay seis números “0”, siete números “1” y seis números “2”. Dado que la secuencia debe terminar en “0”, al usar seis números de cada uno tendría que seguir un “0”; al usar seis números de cada uno sobraría un “1”, por lo que la secuencia que forma un camino no puede continuar, por lo tanto, no se puede realizar un camino que pase por todos los hexágonos.

Ejercicio 47. Encuentra todas las ternas de primos (p, q, r) no necesariamente distintos, tales que:

$$\frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r} = 1.$$

Solución. La igualdad del problema es equivalente a:

$$p^2 + q^2 = pq + r^2,$$

la cual, a su vez, es equivalente a:

$$(p-q)^2 = -pq + r^2,$$

con lo que obtenemos:

$$pq = r^2 - (p-q)^2 = (r-p+q)(r+p-q).$$

Como p y q son positivos, no se cumple que $r-p+q < 0$ y $r+p-q < 0$, pues a partir de eso obtendríamos el absurdo $r < p-q$ y $r < q-p$. Razón por la cual debemos tener que $r-p+q > 0$ y $r+p-q > 0$.

Bastará analizar los siguientes casos:

- Para el caso $r-p+q = 1$ y $r+p-q = pq$, tenemos que $pq-p+q = r = 1+p-q$, de donde se obtiene que $pq-2p+2q-1 = 0$. Así, $(p+2)(q-2) = -3$, lo cual no tiene solución en números primos.
- El caso $r-p+q = pq$ y $r+p-q = 1$ es análogo al anterior.
- Si $r-p+q = p$ y $r+p-q = q$, entonces $r = 2p-q$ y $r = 2q-p$, lo cual implica que $p = q$, en consecuencia, $p = q = r$.
- Cuando $r-p+q = q$ y $r+p-q = p$, se cumple que $r = q$ y $r = p$, por lo tanto, $p = q = r$.

Por lo antes visto, las ternas de primos que cumplen son (s, s, s) para cualquier s primo.

Otra solución. Sean a y b enteros, tales que $m = a(q+r) = b(p+r)$, donde m es el mínimo común múltiplo de $q+r$ y $p+r$. Notemos que $(a, b) = 1$, pues si $(a, b) = g$, con $g > 1$, entonces $\frac{m}{g} = \frac{a}{g}(q+r) = \frac{b}{g}(p+r)$ es un múltiplo común de $q+r$, y $b+r$ menor que m. Por lo que, a partir de la relación del problema, tenemos que:

$$1 = \frac{ap}{a(q+r)} + \frac{bq}{b(p+r)} = \frac{ap+bq}{m},$$

lo cual implica la siguiente serie de igualdades:

$$ap + bq = m = a(q+r) = b(p+r).$$

Notemos que $ap+bq = aq+ar$, luego $a(p-q) = ar-bq$, por lo que a divide a $ar-bq$, en consecuencia, a divide a bq. Por otro lado, $ap+bq = bp+br$, lo cual implica que $b(p-q) = ap-br$; luego, b divide a $ap-br$ y se sigue que b divide a ap.

Como $(a,b)=1$, se tiene que a divide a q, por lo que $a=1$, o bien, $a=q$. De manera análoga b divide a p, por lo que $b=1$, o bien, $b=p$.

- Para el caso $a=1$ y $b=1$, la relación $ap+bq = a(q+r) = b(p+r)$ nos dice que $p+q = q+r$, y que $p+q = p+r$, por lo tanto $p=q=r$.
- Cuando $a=1$ y $b=p$, la relación $ap+bq = a(q+r) = b(p+r)$ implica que $p+pq = q+r = p^2+pr$. De allí que $2(q+r) = p^2+pr+p+pq$, es decir, $(q+r)(2-p) = p^2+p$, lo cual es imposible para los números primos.
- En el caso $a=q$ y $b=1$, la relación $ap+bq = a(q+r) = b(p+r)$ implica que $qp+q = q^2+qr = p+r$. Por lo que $2(p+r) = qp+q+q^2+qr$, es decir, $(p+r)(2-q) = q+q^2$, lo cual también es imposible para los números primos.
- Si $a=q$ y $b=p$, entonces $ap+bq = a(q+r) = b(p+r)$ nos dice que $2pq = q^2+qr$ y que $2pq = p^2+pr$. Luego, $2p = q+r$ y $2q = p+r$, por lo tanto $2(p-q) = q-p$. Se sigue que $p-q=0$, es decir, $p=q$, de ahí se concluye que $p=q=r$.

Dado lo expuesto, las ternas de primos que cumplen son (s,s,s) para cualquier s primo.

Ejercicio 48. Demuestra la siguiente desigualdad para $a>0$:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2},$$

donde el lado izquierdo de la desigualdad tiene n radicales.

Solución. Demostraremos por inducción que la desigualdad se cumple. Primero probaremos que se cumple para el caso $n=1$. Como $0<a$, tenemos que $0<4a+1$, en consecuencia, $0<\sqrt{4a+1}$. Entonces:

$$4a < 4a+1+2\sqrt{4a+1}+1.$$

Al factorizar la expresión del lado derecho y sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad es inmediata la siguiente relación:

$$\sqrt{a} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Por lo que que se cumple la relación para $n = 1$.

Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir,

$$S_k = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2},$$

donde S_k tiene k radicales. Queremos probar que se cumple para el caso $n = k+1$. Por la Hipótesis de Inducción tenemos:

$$4S_k < 2 + 2\sqrt{4a+1}.$$

Al sumar $4a$ en ambos lados de la desigualdad tenemos:

$$4a + 4S_k < 2 + 4a + 2\sqrt{4a+1} = (1+\sqrt{4a+1})^2.$$

De allí que:

$$\sqrt{a + S_k} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Como S_k tiene k radicales, entonces $\sqrt{a+S_k}$ tiene $k+1$ radicales, lo cual demuestra el caso $n = k+1$.

Por lo tanto, la desigualdad es válida para todo n natural.

Otra solución. Para $n = 1$, la desigualdad se demuestra como en la solución anterior.

Para el caso $n \geq 2$, sea:

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}},$$

donde n es el número de radicales.

Notemos que $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ para $n = 2, 3, \ldots$ Lo anterior implica que $x_n^2 = a + x_{n-1}$. Observemos que $x_n > x_{n-1}$, ya que al pasar de $n-1$ a n, el radical interior $\sqrt{a}$ se sustituye por un número mayor $\sqrt{a+\sqrt{a}}$; por lo que $x_n^2 < a + x_n$.

Sabemos que las raíces del polinomio $y^2 - y - a$ son:

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},$$

$$y_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Como los números x_n satisfacen la desigualdad $x_n^2 - x_n - a < 0$, tenemos que ellos están entre en las raíces y_1 y y_2. Por lo tanto, para $n = 2, 3, \ldots$ obtenemos que:

$$x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

lo cual es lo que se quería demostrar.

Ejercicio 49. En un círculo hay nueve casillas numeradas del 1 al 9. Determina de cuántas maneras pueden colocarse 3 pelotas de color rojo, 3 de azul y 3 de verde en las casillas si dos pelotas del mismo color no deben quedar juntas.

Solución. Observemos que las posiciones donde pueden quedar las pelotas rojas, a las cuales denominaremos por R, son de 3 tipos distintos que dependen de cuántos espacios quedan entre ellas:

- Las posiciones $(1, 3, 5)$ y sus ocho rotaciones:

  $$(2, 4, 6), (3, 5, 7), \ldots, (9, 1, 2).$$

  Digamos que son del tipo $[1, 1, 4]$, pues esos son el número de espacios para acomodar las pelotas azules y verdes. Por ejemplo, en la posición $(1, 3, 5)$ tenemos:

  $$R - R - R - - - -.$$

  En las cuatro posiciones a la derecha se deben poner alternadas azul y verde, y se puede empezar con cualquiera de los dos colores. También en la segunda casilla es posible poner cualquiera de los dos colores. Como deben ser tres de cada color, la pelota que va en la cuarta casilla queda determinada. Entonces, en cada una de las posiciones de este tipo hay cuatro posibilidades de completar. En total, de este tipo son $9 \times 4 = 36$ posibilidades.

- Los otros acomodos de las pelotas rojas son:

  $$(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9),$$

  en los cuales hay dos espacios entre cada dos pelotas rojas. Por lo que diremos que son del tipo $[2, 2, 2]$. Por ejemplo, en el acomodo $(1, 4, 7)$ tenemos que:

  $$R - -R - -R - -.$$

  Notemos que hay ocho posibilidades, pues en cada pareja de casillas juntas basta escoger el color para la primera; luego, hay $8 \times 3 = 24$ posibilidades.

- El acomodo $(1, 3, 6)$, sus rotaciones y reflexiones:

  $$(1, 3, 6), (2, 4, 7), (3, 5, 8), \ldots, (9, 2, 5),$$

  $$(1, 8, 5), (2, 9, 6), (3, 1, 7), \ldots, (2, 7, 4),$$

  son del tipo $[1, 2, 3]$. Por ejemplo, con el acomodo $(1, 3, 6)$ tenemos que:

  $$R - R - -R - - - .$$

  En las tres casillas de la derecha basta escoger el color de la última para que quede determinado el de esas tres y el de la segunda casilla, ya que deben ser tres de cada color. En las dos casillas (lugares cuatro y cinco) basta escoger el color de una de ellas. Entonces, tenemos cuatro posibilidades en cada uno de los acomodos de las rojas, lo cual resulta en un total de $18 \times 4 = 72$.

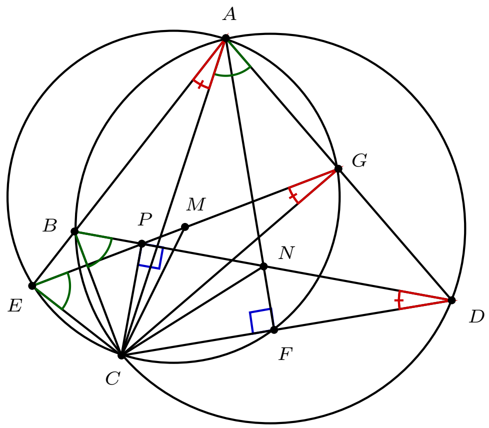
Finalmente, el número total de acomodos es $36 + 24 + 72 = 132$.

Ejercicio 50. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, con ángulos interiores no rectos. Sean E, F y G las intersecciones de la circunferencia de diámetro AC con las rectas AB, CD y AD, respectivamente. Sea M el punto medio de EG. Sean P y N las intersecciones de BD con EG y AF, respectivamente. Si $BN = ND$, demuestra que $CFNMP$ es cíclico.

Solución. Como $ABCD$ y $AECG$ son cuadriláteros cíclicos, entonces:

$$\measuredangle CEP = \measuredangle CAG = \measuredangle CAD = \measuredangle CBP.$$

Lo anterior implica que $BECP$ es cíclico. Como $\measuredangle CEA = 90°$, entonces CP es perpendicular a BD; de ahí que $CFNP$ es cíclico.



De nuevo, al considerar $ABCD$ y $AECG$ cuadriláteros cíclicos tenemos:

$$\measuredangle EGC = \measuredangle EAC = \measuredangle BAC = \measuredangle BDC.$$

Por el criterio AA se sigue que $\triangle EGC$ y $\triangle BDC$ son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{EC}{BC} = \frac{EG}{BD} = \frac{\frac{1}{2}EG}{\frac{1}{2}BD} = \frac{EM}{BN},$$

ya que M y N son puntos medios de EG y BD, respectivamente.

Por el criterio LAL garantizamos que $\triangle ECM$ y $\triangle BCN$ son semejantes, lo cual implica que:

$$\measuredangle PMC = \measuredangle EMC = \measuredangle BNC = \measuredangle PNC.$$

De esta manera, $CNMP$ es un cuadrilátero cíclico.

Por ser $CFNP$ y $CNMP$ cuadriláteros cíclicos concluimos que $CFNMP$ es un pentágono cíclico.

Capítulo 3

Lista de problemas.

3.1. Problemas de niveles: básico, intermedio y alto

Esta lista de problemas se utilizó como parte del entrenamiento de la delegación que representó a Veracruz en el Concurso Nacional de la 31.ª OMM. Las soluciones a estos ejercicios las encontraremos en el capítulo 5.

Problema 1. [Problema B del examen estatal de la 25.ª OMM, 2011, en Veracruz]. Sean $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$ circunferencias del mismo radio con centros A y B respectivamente, y tales que A está sobre $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. Tomemos un punto C en $\mathcal{K}_A$ que cumpla que la medida g del ángulo $\measuredangle ABC$ esté entre 30 y 60 grados. Después, tomemos D en $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ (distinto de A), de manera que $\measuredangle CBD = g$ y construyamos la circunferencia $\mathcal{K}_C$ con centro en C que pase por A. Finalmente, desde D trazamos una recta hacia C hasta tocar $\mathcal{K}_C$, siendo E el punto de intersección. Demuestra que $\measuredangle AEC = g$.

Observación. El punto C debe quedar entre D y E.

Problema 2. [Modificación del problema 4 de la séptima etapa de la 29.ª OMM, 2015, en Sonora]. Un número entero positivo N es completo si satisface la siguiente propiedad: si a es un dígito del número N, entonces $9-a$ también es un dígito de N. Por ejemplo, 435690 es un número completo, pero 1367 no lo es. ¿Cuántos números completos hay entre 1 y 10000?

Problema 3. [Problema 5 del tercer examen estatal de la 18.ª OMM, 2004, en San Luis Potosí]. Sea n un entero positivo de cuatro digitos. Se sabe que n es un cuadrado perfecto y que todos sus dígitos son distintos de 9. Cuando cada uno de los dígitos de n se incrementa en 1, el número que resulta sigue siendo un cuadrado perfecto. Determina todos los valores posibles de n.

Problema 4. [Problema 5 de la segunda etapa del examen estatal, nivel dos, de la 29.ª OMM, 2015, en Baja California]. En una casa hay 100 gatos, algunos blancos, otros negros y los restantes grises. Se sabe que los negros son más que el doble de los blancos; que 3 veces los blancos son más que 4 veces los grises, y que 3 veces los grises son más que los negros. Determina cuántos gatos de cada clase hay en la casa.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$. ¿Cuál es la razón del área de $\triangle FDE$ entre el área de $\triangle DOC$?

Problema 6. [Problema B del examen estatal de la 22.ª OMM, 2008, en Veracruz]. Encuentra todos los números N de tres cifras, tales que N es igual a la suma del dígito de las centenas, el cuadrado del dígito de las decenas y el cubo del dígito de las unidades.

Problema 7. Dado un triángulo equilátero, cuyos lados miden $1\ \mathrm{cm}$, ¿es posible elegir en su interior cinco puntos, tales que cualesquier pareja de dichos puntos se encuentren a una distancia mayor o igual que $\frac{1}{2}\ \mathrm{cm}$?

Problema 8. Sean a, b y c reales positivos, tales que $abc = 1$. Entonces, prueba que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Problema 9. [Problema 1 del segundo examen estatal de la 12.ª OMM, 1998, en San Luis Potosí]. Demuestra que si p y q son números primos, tales que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es un entero; entonces, $p = q$.

Problema 10. El número que sigue:

$$\sqrt{104\sqrt{6} + 468\sqrt{10} + 144\sqrt{5} + 2008}$$

se puede escribir en la forma $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, donde a, b y c son enteros positivos. ¿Cuánto vale el producto abc?

Problema 11. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D el pie de la perpendicular desde B sobre AC y sea E el punto de intersección de la bisectriz de $\measuredangle BDC$ con BC. Sean M y N los puntos medios de BE y DC, respectivamente, así como sea F el punto de intersección de MN con BD. Encuentra el valor de $\frac{AD}{BF}$.

Problema 12. El producto de ciertos números primos no necesariamente distintos es 10 veces su suma. Determina dichos números.

Problema 13. Considera un cuadrado $ABCD$ con lados de longitud l y cuatro puntos arbitrarios M, N, P y Q sobre sus lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestra que:

$$\sqrt{(\triangle MNB)} + \sqrt{(\triangle NPC)} + \sqrt{(\triangle PDQ)} + \sqrt{(\triangle QAM)} \leq l\sqrt{2}.$$

Problema 14. Considera cuatro puntos en el plano, tales que tres cualesquiera de ellos no son colineales. Para cada uno de estos puntos se trazan las perpendiculares a las rectas que determinan los otros tres. Considera que no hay dos de esas perpendiculares que coincidan. Encuentra el máximo número de puntos de intersección determinados por estas rectas perpendiculares.

Problema 15. Consideremos $\triangle ABC$ con $\measuredangle CAB = 90°$ y $\measuredangle BCA = 30°$. Una circunferencia que pasa por A y que es tangente a BC en su punto medio M interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en los puntos A y P e interseca a AC en los puntos A y Q. Demuestra que PQ es perpendicular a BC.

Problema 16. [Problema 2 del segundo examen estatal de la 10.ª OMM, 1996, en San Luis Potosí]. Demuestra que, para todo entero n mayor o igual que 1, los números $2000\cdots004$ y $1000\cdots008$, con n ceros intermedios cada uno, no son ni cuadrados perfectos ni cubos perfectos.

Problema 17. Denotemos por $S(n)$ a la suma de los primeros n enteros positivos. Diremos que un entero positivo n es fantástico si ambos n y $S(n)$ son cuadrados perfectos. Por ejemplo, $n = 49$ es fantástico porque $n = 49 = 7^2$ y $S(49) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19 = 1225 = (35)^2$.

1. Encuentra un entero $n > 49$ que sea fantástico.

2. Encuentra una infinidad de números fantásticos.

Problema 18. [Modificación del problema 1 de la I Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, 1999, realizada en San José, Costa Rica]. Supongamos que nueve personas tienen, cada una, información parcial y diferente de cierto suceso. Cada vez que la persona A telefonea al sujeto B, A le proporciona a B toda la información que posee en ese momento, mientras que B no le dice nada a A. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos tengan toda la información?

Problema 19. [Problema 4 del tercer examen estatal de la 19.ª OMM, 2005, en San Luis Potosí]. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 6, con E punto medio del lado AD y F punto medio del lado AB. La diagonal BD corta a CF en G y a CE en H. Determina al área del cuadrilátero $EFGH$.

Problema 20. [Problema 2 del concurso nacional de la 14.ª OMM, 2000, realizado en Morelia, Michoacán]. Se construye un triángulo como el de la figura, pero con los números del 1 al 2000 acomodados en el primer renglón. Cada número en el triángulo (excepto los del primer renglón) es la suma de los dos números arriba de él. ¿Cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo?

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & 8 & & 12 & & 16 & & \\
& & & 20 & & 28 & & & \\
& & & & 48 & & & &
\end{array}$$

Problema 21. [Modificación del problema 1 de la etapa eliminatoria de la 4.ª Olimpiada Lechona de Matemáticas, 2013]. Considera n y k enteros positivos. Sea $\bigoplus$ la operación concatenación, por ejemplo, $123 \bigoplus 456 = 123456$.

1. Demuestra que $2^n \bigoplus 2^{n+1}$ es múltiplo de 3.

2. Encuentra los valores de k para los cuales $2^n \bigoplus 2^{n+k}$ es múltiplo de 9.

Problema 22. [Problema 4 de la VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, 2004, realizada en Managua, Nicaragua]. Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. El lado común a dos casillas en el tablero se llama "lado frontera" si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determina el mínimo y el máximo número de lados frontera que pueden haber en el tablero.

Problema 23. En una semicircunferencia con centro en O y diámetro AB se dibuja en su interior otra semicircunferencia con diámetro OA. Sea C un punto en OA, y la recta perpendicular a OA que pasa por C corta a la semicircunferencia pequeña en D y a la grande en E. Sea F la intersección de AD con la semicircunferencia grande, diferente de A. Demuestra que el circuncírculo de $\triangle DEF$ es tangente a la cuerda AE en E.

Problema 24. ¿Qué dígitos deben sustituirse por a y b en $30a0b03$ de tal forma que el entero resultante sea divisible por 13?

Problema 25. [Problema 4 del concurso nacional de la 22.ª OMM, 2008, realizado en San Carlos, Sonora]. Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros. Para ello, acomoda a los L caballeros en una mesa redonda; les ordena que digan los números $1, 2, 3$; que repitan $1, 2, 3$ y así sucesivamente lo hacen: en el sentido de las manecillas del reloj cada caballero menciona un número. Aquellos que dicen 2 o 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un caballero: el ganador. Al iniciar se les numera del 1 al L. Encuentra todos los valores de L, de tal manera que el ganador sea el caballero 2017.

Problema 26. Sea la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

Demuestra que dicha desigualdad se cumple para todo entero $n \geq 2$, y para todos los números reales no negativos $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 27. Sean p y q enteros mayores o iguales que cero. Prueba que el número $2^{2p} + 2^{2q}$ no puede ser el cuadrado de ningún entero.

Problema 28. Sea H el ortocentro de $\triangle ABC$. Denotamos como O_1, O_2 y O_3 los circuncentros de $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ y $\triangle ABH$, respectivamente. Demuestra que $\triangle O_1O_2O_3$ es congruente a $\triangle ABC$ y que su circuncentro es H.

Problema 29. Considera un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es a lo más 1. Demuestra que el conjunto de puntos puede ser encerrado en círculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 30. Si a, b y c enteros positivos distintos, entonces demuestra que:

$$\operatorname{mcd}(ab+1, ac+1, bc+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Problema 31. Sean a, b y c números reales positivos, tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Problema 32. Considera $\triangle ABC$ acutángulo. Sean D y E puntos en las bisectrices de $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle ABC$, tales que CD y BE son perpendiculares a BD y CE, respectivamente. Si F y G son los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB y AC, respectivamente, demuestra que D, F, G y E son colineales.

Problema 33. Los números p y q son números primos que para algún entero positivo n satisfacen:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Determina todos los valores posibles de $q - p$.

Problema 34. [Problema 8 de la China Mathematical Competition, 2004, realizada en Hainan]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

- $f(0) = 1$.
- Para cualesquiera x, y números reales se cumple:

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

Entonces, determina: $f(x)$.

Problema 35. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{11}$ dos permutaciones de los números naturales $1, 2, 3, \ldots, 11$. Prueba que si cada uno de los números $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots, a_{11}b_{11}$ es dividido entre 11, entonces al menos dos de ellos tienen el mismo residuo.

Problema 36. [Problema 2 de la tercera fase, nivel 3, de la 34.ª Olimpíada Brasileira de Matemática, 2012]. Sean I_a, I_b e I_c los excentros de un triángulo escaleno $\triangle ABC$, correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. Sean X, Y y Z los puntos medios de los segmentos I_bI_c, I_cI_a e I_aI_b, respectivamente. El incírculo de $\triangle ABC$ toca los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Prueba que las rectas DX, EY y FZ tienen un punto en común que pertenece a la recta IO, donde I y O son el incentro y el circuncentro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Problema 37. Decimos que un entero positivo es fuerte, si es divisible por cada uno de sus dígitos no nulos. Demuestra que no puede haber más de trece números fuertes consecutivos, y encuentra una lista de trece números fuertes consecutivos.

Problema 38. [Problema 1 de la 44th International Mathematical Olympiad, 2003, realizada en Tokyo, Japón]. Sea A un subconjunto del conjunto

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, 1000000\},$$

de manera que A cuenta con exactamente 101 elementos.

Demuestra que existen números $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{100}$ que pertenecen a S, tales que los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a + t_1, \text{ donde } a \in A\}, \\ A_2 &= \{a + t_2, \text{ donde } a \in A\}, \\ A_3 &= \{a + t_3, \text{ donde } a \in A\}, \\ &\vdots \\ A_{100} &= \{a + t_{100}, \text{ donde } a \in A\}, \end{aligned}$$

son disjuntos a pares (es decir, siempre que tomamos dos conjuntos distintos no comparten algún elemento).

Problema 39. Sean a,b,c y d números reales, tales que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$. Determina el valor máximo de la suma:

$$(a + b)^4 + (a + c)^4 + (a + d)^4 + (b + c)^4 + (b + d)^4 + (c + d)^4.$$

Problema 40. Sean $\triangle ABC$ acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de $\triangle ABC$. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\measuredangle ANH = 90°$.

Problema 41. Determina todos los números primos p, q, r, k, tales que $pq + qr + rp = 12k + 1$.

Problema 42. Se tiene un tablero de $m \times n$ casillas, y en cada una hay lámpara que originalmente se encuentra apagada. En un movimiento se pueden elegir tres casillas consecutivas de una misma fila o de una misma columna y cambiar el estado de las lámparas, pasando de apagado a encendido y viceversa. ¿Qué parejas de enteros positivos (m, n) hacen posible llegar al estado en donde todas las lámparas se encuentren encendidas?

Problema 43. Sea p un número primo. Encuentra todos los enteros positivos a y b, tales que $a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$.

Problema 44. Sean m y n enteros positivos. Prueba que si el último dígito del número $m^2 + mn + n^2$ es 0, entonces sus últimos dos dígitos son 0.

Problema 45. [Problema 5 de la tercera fase, nivel 3, de la 33.ª Olimpíada Brasileira de Matemática, 2011]. Sea $\triangle ABC$ acutángulo y H su ortocentro. Sean D y E los puntos de intersección de las rectas BH y CH con los lados AC y AB, respectivamente. Sea F la intersección del circuncírculo de $\triangle ADE$ con el circuncírculo de $\triangle ABC$, diferente de A. Prueba que BC y las bisectrices internas de $\measuredangle BFC$ y $\measuredangle BHC$ son concurrentes.

Problema 46. [Modificación del problema 4 del concurso nacional de la 18.ª OMM, 2004, realizado en Ixtapan de la Sal, Estado de México]. Al final de un torneo de Mateball donde hay n equipos participantes, cada par de equipos jugó entre sí exactamente una vez, sin empates. Se observa que para cualesquiera de los tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C, entonces A le ganó a C.

1. Demuestra que hay un equipo ganador y un perdedor; es decir, uno que ha ganado el mayor número de partidos y otro el menor número de partidos.

2. Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número en los que perdió. Calcula la suma de todas estas diferencias, si hay 2016 equipos.

3. Cada equipo contabilizó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 544. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo?

Problema 47. Encuentra todos los enteros positivos m y n, tales que el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, \ldots, n$ sea 224 veces el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, \ldots, m$.

Problema 48. [Problema 5 del concurso nacional de la 17.ª OMM, 2003, realizado en Guanajuato, Guanajuato]. Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a \leq b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige una tarjeta (a, b) [que se retira del juego] y escribe el producto ab en un pizarrón [ambos jugadores usan el mismo pizarrón]. Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene la estrategia ganadora? Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método que le asegure su triunfo?

Problema 49. [Problema 3 de la tercera fase, nivel 2, de la 34.ª Olimpíada Brasileira de Matemática, 2012]. Sean M y N los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente, de un triángulo $\triangle ABC$. Sea W un punto, tal que BC es la bisectriz de los ángulos $\measuredangle MBW$ y $\measuredangle NCW$. Sean D y E las intersecciones de MN con BW y CW, respectivamente. Sean X y Y los puntos de intersección de los circuncírculos de $\triangle DBM$ y $\triangle NCE$. Si Z es la intersección de CD con BE, demuestra que BC, XY y WZ son concurrentes.

Problema 50. Los habitantes de cierta isla hablan un idioma, en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f, g. Se dice que una palabra produce a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

1. Cambiar una letra por dos letras de acuerdo con la siguiente regla:

$$a \to bc,\ b \to cd,\ c \to de,\ d \to ef,\ e \to fg,\ f \to ga,\ g \to ab.$$

2. Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Es decir: $dfd \to f$.

Por ejemplo, $cafed$ produce $bfed$ porque:

$$cafed \to cbcfed \to bfed.$$

Demuestra que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

3.2. Problemas de nivel extremo

Los problemas que aparecen a continuación constituyeron el examen del Concurso Nacional de la 31.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, realizado en Bahía Escondida, municipio de Santiago, Nuevo León, del 5 al 10 de noviembre de 2017.

Problema 51. En un tablero de ajedrez de 2017×2017 se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultánea desplazarlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible lograr que, a través de varias tiradas, todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.

Observación. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectángulo de 3×2 o de 2×3.

Problema 52. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es equilibrado, si el promedio de k números cualesquiera del conjunto es un número entero para toda k con $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

Problema 53. Sea $\triangle ABC$ acutángulo con ortocentro en el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersecar las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las rectas AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B se localizan sobre un círculo, y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

Problema 54. Un subconjunto B de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ tiene la propiedad T si cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva).

Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad de T.

Problema 55. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj, de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC, respectivamente, recorridos en el sentido de las manecillas del reloj. Sea P la intersección de los segmentos AC y BD. Sea Q un punto sobre MB, de forma que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R, de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

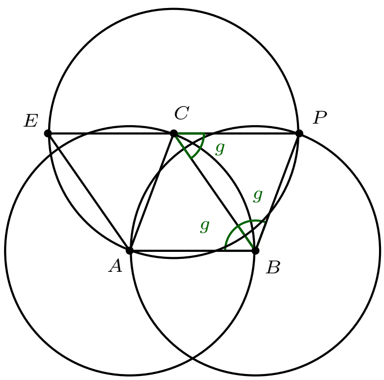
Problema 56. Sean n y m enteros positivos, con $n \geq 2$. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera: en cada turno A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna y elimina todos los votos de esa. El jugador A gana si logra que haya una urna con n votos después de algún turno de B. Determina para cada n el mínimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

Capítulo 4

Soluciones a la lista de problemas.

4.1. Problemas de niveles: básico, intermedio y alto

Solución del problema 1. Sea P la intersección de $\mathcal{K}_B$ con $\mathcal{K}_C$, diferente de A. Observemos que las tres circunferencias tienen el mismo radio, por lo que $AC = AB = PB = PC$. Al utilizar el criterio LLL tenemos que $\triangle ABC$ y $\triangle PBC$ son congruentes, lo cual implica que $\measuredangle PBC = \measuredangle ABC = g$. Por lo tanto, $D = P$.



Además, $\triangle PBC$ es isósceles, por lo que $\measuredangle PCB = g$. Lo anterior implica que DE es paralela a AB. De esta forma, en el cuadrilátero $ABCE$ tenemos dos lados iguales y paralelos, AB y CE; ello implica que $ABCE$ es un paralelogramo. Se sigue que $\measuredangle AEC = \measuredangle ABC = g$.

Solución del problema 2. Primero observamos que si a es un dígito de N, entonces $9 - a$ debe ser un dígito distinto de a, ya que si $a = 9 - a$, entonces

$2a = 9$, lo cual no es posible en los enteros. Por eso, no hay números completos de una sola cifra. También observamos que 10000 no es un número completo, por lo que los casos que nos restan son los siguientes:

- Si N consta de dos dígitos, es decir, $N = ab$ con $a \neq 0$, se tiene que $9 - a = b$; por lo tanto, $a + b = 9$. Así, tenemos las 9 posibilidades siguientes: $18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54$ y 90.

- Si N tiene tres dígitos, $N = abc$ con $a \neq 0$, entonces $9 - a$ debe ser b, o bien, c; elección con la cual se obtienen los mismos números que el caso que se analizará. Para elegir a tenemos 9 opciones, y si $b = 9 - a$, ya estará determinado; por lo tanto, c debe ser a, o bien, b; es decir, tenemos dos opciones. Así, hay $9 \times 2 = 18$ posibilidades. Nos falta considerar permutar b con c, pero sólo se obtiene un nuevo número cuando $b \neq c$, es decir, hay 9 opciones más. Por lo tanto, en este caso tenemos $18 + 9 = 27$ posibilidades.

- Cuando N está formado por cuatro dígitos tenemos dos subcasos.

  Si N solo tiene dos cifras distintas, digamos a y b con a el dígito de los millares, por lo que $a \neq 0$, entonces estas cifras pueden estar acomodadas de 3 maneras. En la primera, $N = abab$, se puede escoger a de 9 maneras, pero podemos intercambiar dos posiciones de a y b en los últimos tres dígitos, por lo que hay $3 \times 9 = 27$ posibles números completos. En la segunda, $N = abbb$, por lo que hay 9 posibilidades en este caso. Finalmente, en la tercera, $N = aaab$, es posible elegirlo de 9 maneras, y como podemos intercambiar dos posiciones de a y b en los últimos tres dígitos, hay $3 \times 9 = 27$ números completos en este caso. Así, tenemos en total $27 + 9 + 27 = 63$ posibles números completos.

  Si N tiene todos sus dígitos diferentes, $N = abcd = a(9 - a)c(9 - c)$; entonces, podemos elegir a entre nueve dígitos y c entre cuatro dígitos, pues $9 - c$ nos dará los otros cuatro dígitos que se obtienen al permutar los dígitos de las unidades y de las decenas. Así, tenemos que hay $9 \times 4 = 36$ opciones y, al permutar las últimas tres cifras, encontramos que hay $36 \times 6 = 216$ posibles números completos.

Por lo enterior, hay $9+27+63+216 = 315$ números completos entre 1 y 10000.

Otra solución. Para el caso N con dos dígitos, si $N = ab$ con $a \neq 0$, se tiene que $9 - a = b$; por lo tanto, $a + b = 9$; es decir, N debe ser múltiplo de 9. Así, tenemos los 9 múltiplos de dos dígitos siguientes: $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$ y 90.

El resto de los casos se analizan como en la solución anterior.

Solución del problema 3. Sea $n = abcd = 1000a + 100b + 10c + d$, donde a, b, c, d son los dígitos de n; además, $n = m^2$, donde m es un número entero. Entonces:

$$\begin{aligned} 1000(a+1)+100(b+1)+10(c+1)+(d+1) &= 1000a + 100b + 10c + d + 1111 \\ &= m^2 + 1111 \\ &= r^2, \end{aligned}$$

donde r es entero. Luego, $r^2 - m^2 = 1111$, es decir, $(r-m)(r+m) = 11 \times 101$. Como 11 y 101 son primos, $r - m = 11$ y $r + m = 101$, o bien, $r - m = 1$ y $r + m = 1111$. Si sucede lo primero, tenemos que $m = 45$, $r = 56$ y $n = 2025$, en el segundo caso obtenemos que $m = 555$, $r = 556$ y $n = 308025$ no cumple con ser un número de cuatro dígitos. Por lo que el único valor posible de n es 2025.

Solución del problema 4. Sean n, b y g el número de gatos negros, blancos y grises, respectivamente. Por hipótesis se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} b + n + g &= 100, \\ n &> 2b, \\ 3b &> 4g, \\ 3g &> n. \end{aligned}$$

A partir de las primeras dos desigualdades se deduce que $3n > 6b > 8g$, por lo que al sustituir en la igualdad se tiene que:

$$300 = 3b + 3n + 3g > 4g + 8g + 3g = 15g,$$

es decir, $20 > g$. Por otro lado, de la primera y última desigualdad se tiene que $2b < n < 3g$, por lo que:

$$200 = 2b + 2n + 2g < 3g + 6g + 2g = 11g,$$

es decir, $g > \frac{200}{11} > 18$. Así, se tiene que $18 < g < 20$, y como debe ser un número entero, la única opción es $g = 19$.

Como $n > 2b$, al considerar el valor de g, tenemos que $100 = n + b + 19 > 3b + 19$, lo cual implica que $b < 27$. Además, como $3b > 4g = 4(19)$, se sigue que $25 < b < 27$, en consecuencia, $b = 26$.

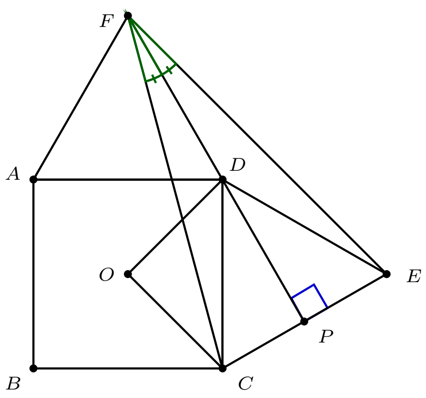
Finalmente, $n = 100 - g - b = 100 - 19 - 26 = 55$, por lo que se concluye que hay 55 gatos negros, 26 gatos blancos y 19 gatos grises.

Solución del problema 5. Sea x la medida del lado del cuadrado $ABCD$. Así, el área de $\triangle DOC$ es:

$$(\triangle DOC) = \frac{1}{4}x^2.$$

Para calcular el área de $\triangle FAD$ consideraremos tres casos que dependen de la construcción que se realice de $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$, ya sea hacia afuera o hacia adentro del cuadrado.

- Consideremos que $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ se construyen hacia afuera del cuadrado.



Observemos en este caso que:

$$\measuredangle FDC = \measuredangle FDA + \measuredangle ADC = 150^\circ,$$
$$\measuredangle FDE = 360^\circ - 150^\circ - \measuredangle CDE = 150^\circ.$$

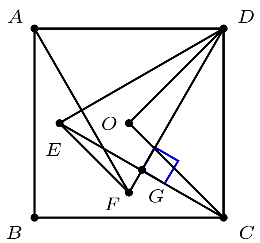
Por el criterio LAL, tenemos que $\triangle FDC$ y $\triangle FDE$ son congruentes. De allí que $FC = FE$ y $\measuredangle CFD = \measuredangle DFE$. Si P es la intersección de FD con CE, al ser FP bisectriz del triángulo isósceles $\triangle FCE$, entonces también es altura y mediana. Luego, $PE = \frac{1}{2}x$, por lo tanto,

$$(\triangle FDE) = \frac{1}{2} FD \cdot PE = \frac{1}{4}x^2.$$

De esa forma, para este caso:

$$\frac{(\triangle FDE)}{(\triangle DOC)} = 1.$$

- Consideremos que $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ se construyen hacia adentro del cuadrado.



Sea P la intersección de CE con DF. En este caso tenemos:

$$\measuredangle CDP = \measuredangle CDA - \measuredangle PDA = 30^\circ.$$

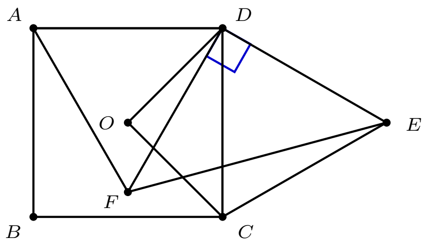
Por lo que DP es bisectriz de $\measuredangle CDE$, y como $\triangle CDE$ es isósceles, entonces P es punto medio de CE; además, DP es perpendicular a PE. De esta forma,

$$(\triangle FDE) = \frac{1}{2} FD \cdot PE = \frac{1}{4}x^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{(\triangle FDE)}{(\triangle DOC)} = 1.$$

- Consideremos que los triángulos se construyen uno hacia adentro y el otro hacia afuera del cuadrado. Sin pérdida de generalidad, supongamos que F está adentro y E afuera de $ABCD$, respectivamente.



Tenemos que $\measuredangle FDE = \measuredangle FDC + \measuredangle CDE = 90°$. Por lo tanto,

$$(\triangle FDE) = \frac{1}{2} FD \cdot DE = \frac{1}{2}x^2.$$

Concluimos en este caso que:

$$\frac{(\triangle FDE)}{(\triangle DOC)} = 2.$$

Otra solución. Como en la solución anterior, si x es la medida del lado del cuadrado $ABCD$, tenemos que:

$$(\triangle DOC) = \frac{1}{4}x^2.$$

Por otro lado, independientemente de la forma de $\triangle FDE$, tenemos que:

$$(\triangle DOC) = \frac{FD \cdot DE}{2} \operatorname{sen} \measuredangle FDE.$$

Por la forma en que se construyen los triángulos $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ en los lados de $ABCD$, tenemos dos casos para el valor de $\operatorname{sen} \measuredangle FDE$.

- Como vimos en la solución anterior, si $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ se construyen hacia afuera, o bien, hacia adentro del cuadrado, tenemos que $\measuredangle FDE = 150°$, o bien, $\measuredangle FDE = 30°$, respectivamente.

En este caso,

$$(\triangle DOC) = \frac{FD \cdot DE}{2} \operatorname{sen} \measuredangle FDE = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 150^\circ = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} \measuredangle 30^\circ = \frac{1}{4}x^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{(\triangle FDE)}{(\triangle DOC)} = 1.$$

- Si $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ se construyen uno hacia adentro y el otro hacia afuera del cuadrado, entonces $\measuredangle FDE = 90^\circ$, por lo que:

  $$(\triangle DOC) = \frac{FD \cdot DE}{2} \operatorname{sen} \measuredangle FDE = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 90^\circ = \frac{1}{2}x^2.$$

  En este caso,

  $$\frac{(\triangle FDE)}{(\triangle DOC)} = 2.$$

Solución del problema 6. Sean a, b y c los dígitos de las centenas, decenas y unidades de N, respectivamente. Sabemos que $N = 100a + 10b + c$ y, por las condiciones del problema, tenemos que $N = a + b^2 + c^3$. Al igualar estas expresiones obtenemos que $b(10 - b) + 99a = c(c^2 - 1)$.

Como N tiene tres cifras, los dígitos a, b, c deben cumplir que $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ y $0 \leq c \leq 9$. De aquí que $0 \leq b(10 - b) \leq 25$, en consecuencia,

$$99a \leq 99a + b(10 - b) = c(c^2 - 1) \leq 99a + 25.$$

Debido a que $1 \leq a$, la desigualdad de la izquierda implica que $99 \leq 99a \leq c(c^2 - 1)$, por lo que c sólo puede tomar los valores 5, 6, 7, 8 o 9. Analicemos a continuación el comportamiento de ambas desigualdades, es decir, $99a \leq c(c^2 - 1) \leq 99a + 25$ para cada uno de los valores de c.

- Si $c = 5$, entonces las desigualdades toman la forma $99a \leq 120 \leq 99a + 25$, lo cual implica que $a \leq \frac{120}{99}$ y $\frac{120-25}{99} = \frac{95}{99} \leq a$. Como a es entero, el único valor que satisface ambas condiciones es $a = 1$. Así, al sustituir en $b(10 - b) + 99a = c(c^2 - 1)$ tenemos que $b(10 - b) + 99 = 120$, por lo tanto $b = 3$ o $b = 7$. De esta forma, los números N que satisfacen las condiciones del problema son 135 y 175.

- Si $c = 6$, entonces tenemos que $99a \leq 210 \leq 99a + 25$, lo cual implica que $a \leq \frac{210}{99}$ y $\frac{210-25}{99} = \frac{185}{99} \leq a$. Luego, $a = 2$ es el único entero que satisface ambas condiciones. Así, al sustituir en $b(10-b)+99a = c(c^2-1)$ tenemos que $b(10 - b) = 210 - 99(2) = 12$, por lo tanto, no existe algún valor entero para b que satisfaga esta igualdad.

- Si $c = 7$, entonces tenemos que $99a \leq 336 \leq 99a + 25$, lo cual implica que $a \leq \frac{336}{99}$ y $\frac{336-25}{99} = \frac{311}{99} \leq a$. En este caso no existe algún valor entero para a que satisfaga ambas condiciones.

- Para $c = 8$ tenemos que $99a \leq 504 \leq 99a + 25$, se sigue que $a \leq \frac{504}{99}$ y $\frac{504-25}{99} = \frac{479}{99} \leq a$ se cumplen únicamente para $a = 5$. Al sustituir los valores de a y c en la ecuación $b(10-b) + 99a = c(c^2-1)$, encontramos que $b(10-b) = 504 - 99(5) = 9$; entonces, $b = 1$, o bien, $b = 9$. Así, los posibles números N que satisfacen las condiciones del problema son 518 y 598.

- Finalmente, para $c = 9$ tenemos que $99a \leq 720 \leq 99a + 25$, por lo tanto $a \leq \frac{720}{99}$ y $\frac{720-25}{99} = \frac{695}{99} \leq a$. En este caso no existe algún entero para a que satisfaga ambas condiciones.

En conclusión, los únicos números con tres cifras que satisfacen las hipótesis del problema son:

$$135,\ 175,\ 518 \text{ y } 598.$$

Otra solución. Al igual que en la solución anterior, si consideramos que $N = 100a + 10b + c$, por las hipótesis del problema obtenemos que:

$$99a = b(b-10) + c(c-1)(c+1).$$

Como 3 divide a 99, entonces debe dividir a $b(b-10)+c(c-1)(c+1)$, debido a que $c-1$, c y $c+1$ son enteros consecutivos, 3 divide al producto de estos, en consecuencia, 3 debe dividir a $b(b-10)$, es decir, b o $b-10$ son múltiplos de 3. Así, los posibles valores de b que satisfacen alguna de estas dos condiciones son $0, 1, 3, 4, 6, 7$ y 9. Supongamos ahora que x es uno de los valores que puede tomar b, entonces debe satisfacer:

$$\begin{aligned} 99a &= x(x-10) + c(c^2-1) \\ &= (-x)(10-x) + c(c^2-1) \\ &= ((10-x)-10)(10-x) + c(c^2-1), \end{aligned}$$

es decir, la igualdad se mantiene para $b = 10 - x$. Luego, basta considerar casos donde $b = 0, 1, 3$ o 4.

- Para $b = 0$ tenemos que $99a = (0)(0-10)+c(c^2-1) = c(c^2-1)$, y puesto que 11 divide a $99a$, entonces debe dividir a $c(c^2-1)$. Como 11 es primo, entonces alguno de los factores debe ser múltiplo de 11. Debido a que c es dígito, los únicos múltiplos de 11 que puede tomar $c(c^2-1)$ son 0 y 11. Si el múltiplo es 0, entonces tenemos que $99a = c(c^2-1) = 0$, lo cual implica que $a = 0$; una contradicción, pues es el dígito de las centenas de un número de tres cifras. Si el múltiplo es 11, y como 9 también debe dividir a $c(c^2-1)$, entonces $c(c^2-1) = (9)(11)(k)$. Por otro lado, $c(c^2-1) = (c-1)c(c+1)$ es el producto de tres enteros consecutivos, por lo que $c = k = 10$, lo cual es una contradicción por el hecho de que c es dígito.

- Si $b = 1$, entonces $99a = (1)(1-10) + c(c^2-1) = c(c^2-1) - 9$; es decir, $9(11a+1) = c(c^2-1) = (c-1)c(c+1)$, donde se sigue que 9 es uno de los tres factores del producto $c(c-1)(c+1)$. Como c es dígito,

$c-1$ no puede ser 9, por tanto, $c+1=9$ o $c=9$. Cuando $c+1=9$, tenemos que $9(11a+1)=(c-1)c(c+1)=(7)(8)(9)=504$, es decir, $a=5$, y el número $N=518$ satisface las condiciones del problema. Por el argumento usado para $b=10-x$, el número $N=598$ también cumple con las hipótesis del problema.

- Si $b=3$, entonces $99a=(3)(3-10)+c(c^2-1)=c(c^2-1)-21$. Como 11 divide a 99, buscaremos los valores de c, tales que $c(c^2-1)-21\equiv 0 \pmod{11}$ o, equivalentemente, $c(c^2-1)\equiv 10 \pmod{11}$. Al sustituir los valores $0\leq c\leq 9$ en la expresión anterior tenemos que el único valor que satisface la congruencia señalada es $c=5$. Así, $99a=c(c^2-1)-21=(5)(25-1)-21=99$, por lo cual $a=1$. Se concluye que el número $N=135$ satisface las condiciones del problema. Por el argumento usado para $b=10-x$, el número $N=175$ también satisface las condiciones requeridas.
- Finalmente, si $b=4$, entonces $99a=(4)(4-10)+c(c^2-1)=c(c^2-1)-24$. Por un argumento similar al del caso anterior, se busca que c sea tal que $c(c^2-1)\equiv 2 \pmod{11}$. Al sustituir los valores $0\leq c\leq 9$ se verifica que ninguno de ellos satisface la relación de congruencia anterior.

Concluimos que los únicos números que satisfacen las condiciones del problema son:

$$135,\ 175,\ 518 \text{ y } 598.$$

Solución del problema 7. Al dividir el triángulo en cuatro triángulos equiláteros de $\frac{1}{2}$ cm de lado, todo par de puntos en cada uno de estos triángulos pequeños, sin incluir los vértices, se encuentran a una distancia menor que $\frac{1}{2}$ cm.

Por el principio de casillas, si elegimos cinco puntos en el interior del triángulo original, dos estarán en alguno de los triángulos pequeños. Por lo que no es posible que dos cualesquiera de ellos se encuentren a una distancia mayor o igual que $\frac{1}{2}$ cm.

Solución del problema 8. Por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética sabemos que:

$$\begin{aligned} a^2+1 &\geq 2a,\\ b^2+1 &\geq 2b,\\ c^2+1 &\geq 2c. \end{aligned}$$

Al sumar las desigualdades anteriores obtenemos que $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$ o, equivalentemente,

$$a^2+b^2+c^2\geq 2(a+b+c)-3.$$

Nuevamente, por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos que $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{1}=3$, entonces $2(a+b+c)\geq 3+(a+b+c)$. Por transitividad concluimos que:

$$a^2+b^2+c^2\geq 2(a+b+c)-3\geq a+b+c.$$

Otra solución. Sabemos que $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0$, es decir,

$$a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3 \geq 0.$$

El resto de la demostración se sigue como en la solución anterior.

Otra solución. De la Desigualdad Media Cuadrática-Media Aritmética obtenemos que $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Al elevar al cuadrado tenemos que:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2.$$

Como en la primera solución, se puede ver que $3 \leq a+b+c$. Así, por transitividad:

$$(a+b+c)\cdot 1 \leq (a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)}{3} \leq a^2+b^2+c^2.$$

Otra solución. Observemos que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$. Luego, al desarrollar los binomios al cuadrado tenemos que $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac) \geq 0$ o, equivalentemente, $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$. A partir de aquí se tiene que:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Al igual que en la primera solución, obtenemos que $a+b+c \geq 3$. Al usar este hecho en la desigualdad previa se tiene que:

$$3(a+b+c) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2),$$

del cual concluimos el resultado.

Otra solución. De la Desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Como en la primera solución, se tiene que $a+b+c \geq 3$, y como a, b y c son reales positivos, su suma lo es. Así, $(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c)$. Por transitividad tenemos que $3(a+b+c) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, lo cual implica que:

$$a+b+c \leq a^2+b^2+c^2.$$

Otra solución. La función $f(x)=x^2$ es una parábola que abre hacia arriba, por lo que es convexa y le podemos aplicar la Desigualdad de Jensen:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = f\left(\frac{a+b+c}{1+1+1}\right) \leq \frac{1\cdot f(a)+1\cdot f(b)+1\cdot f(c)}{1+1+1} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Ahora, al igual que en la segunda solución, por la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética y el hecho de que a, b y c son reales positivos, en consecuencia, su suma también, tenemos que $(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c)$. Por transitividad tenemos que:

$$\frac{3(a+b+c)}{3^2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

por lo que concluimos que $a+b+c \leq a^2+b^2+c^2$.

Solución del problema 9. Supongamos que $p \neq q$ y, sin pérdida de generalidad, $q > p$. Entonces, p y q son primos relativos, por lo que pq y $p+q$ también lo son.

Como $p+q$ divide a p^2+q^2, se tiene que $p+q$ divide a $p^2+2pq+q^2-2pq$, de donde $p+q$ divide a $(p+q)^2-2pq$, así $p+q$ divide a $2pq$. Se sigue que $p+q$ divide a 2, lo cual es una contradicción, puesto que $p \geqslant 2$ y $q \geqslant 3$. Por lo tanto, $p=q$.

Otra solución. Si completamos cuadrados en la expresión dada, tenemos que:

$$\frac{p^2+q^2}{p+q} = \frac{p^2+2pq+q^2-2pq}{p+q} = p+q-\frac{2pq}{p+q}.$$

Para que la primera fracción de la relación anterior sea un entero, el número $\frac{2pq}{p+q}$ también debe serlo.

Como p y q son primos positivos, tenemos que $p+q \geq 4$. Así, sólo existen las siguientes opciones:

- Si $p+q=p$, entonces $q=0$, lo cual no es posible.
- Si $p+q=q$, entonces $p=0$, lo cual no es posible.
- Si $p+q=2p$, entonces $p=q$.
- Si $p+q=2q$, entonces $p=q$.
- Si $p+q=pq$, entonces $1+\frac{q}{p}=q$, es decir, $p=q=2$.
- Si $p+q=2pq$, entonces $1+\frac{q}{p}=2q$, es decir, $p=q=1$, lo cual no es posible.

En conclusión, $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es un entero cuando $p=q$.

Solución del problema 10. Queremos encontrar $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$, tales que:

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{5}+2008} = a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{5}+2008 =& 2a^2+3b^2+5c^2 \\ &+2(ab\sqrt{6}+ac\sqrt{10}+bc\sqrt{15}),\end{aligned}$$

lo cual es equivalente a:

$$2008 - 2a^2 - 3b^2 - 5c^2 = (2ab - 104)\sqrt{6} + (2ac - 468)\sqrt{10} + (2bc - 144)\sqrt{15}.$$

Notemos que el lado izquierdo de la última igualdad es entero, por lo que el lado derecho deberá serlo. Como $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$ y $\sqrt{15}$ son irracionales, y sus coeficientes son enteros, entonces la única posibilidad para que se tenga la igualdad es que:

$$\begin{aligned} 2ab - 104 &= 0, \\ 2ac - 468 &= 0, \\ 2bc - 144 &= 0. \end{aligned}$$

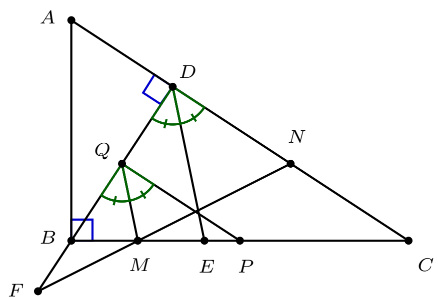
Se sigue entonces que $ab = 52$, $ac = 234$ y $bc = 72$, es decir,

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2 = (ab)(ac)(bc) = (52)(234)(72).$$

Por lo tanto,

$$abc = \sqrt{(52)(234)(72)} = \sqrt{(2^2 \cdot 13)(2 \cdot 3^2 \cdot 13)(2^3 \cdot 3^2)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13.$$

Solución del problema 11. Sean P y Q los puntos medios de los segmentos BC y BD, respectivamente.



Tenemos que PQ y NP son paralelos a CD y BD, respectivamente. Además de que:

$$\frac{BD}{NP} = 2.$$

De esta forma, como DE es bisectriz de $\measuredangle BDC$, y QM lo es de $\measuredangle BQP$, de acuerdo con el Teorema de la Bisectriz:,

$$\frac{BM}{MP} = \frac{BQ}{QP}.$$

Por otro lado, como D es el pie de B en AC y QP es paralela a CD, entonces $\triangle ADB$ y $\triangle BQP$ son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{BQ}{QP} = \frac{AD}{BD}.$$

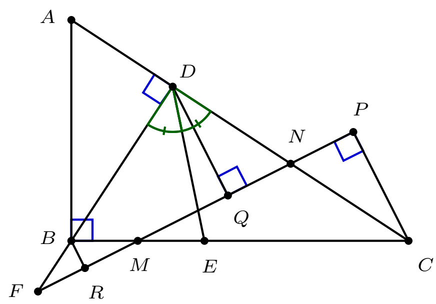
Además, al ser NP paralela a BF, entonces $\triangle BFM$ y $\triangle PNM$ son semejantes, se sigue que $\frac{BF}{NP} = \frac{BM}{PM}$. A partir de las relaciones encontradas anteriormente tenemos que:

$$\frac{BF}{NP} = \frac{BQ}{QP} = \frac{AD}{BD},$$

lo cual implica que:

$$\frac{AD}{BF} = \frac{BD}{NP} = 2.$$

Otra solución. Sean P, Q y R los pies de C, D y B en MN, respectivamente.



Como BR, DQ y CP son paralelas, entonces:

$$\triangle DFQ \sim \triangle BFR,$$
$$\triangle CPN \simeq \triangle DQN,$$
$$\triangle CPM \sim \triangle BRM.$$

De allí obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DQ}{BR},$$
$$CP = DQ,$$
$$\frac{CP}{BR} = \frac{CM}{BM}.$$

Se sigue que:

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DQ}{BR} = \frac{CM}{BM}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{DB}{BF} = \frac{DF - BF}{BF} = \frac{DF}{BF} - 1 = \frac{CM}{BM} - 1 = \frac{CM - BM}{BM} = \frac{CM - EM}{BM} = \frac{CE}{BM}.$$

Por otro lado, al ser $\triangle ADB$ y $\triangle BDC$ semejantes tenemos que $\frac{AD}{BD} = \frac{DB}{DC}$. Por el Teorema de la Bisectriz,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EB}{CE}.$$

Al multiplicar las dos últimas relaciones tenemos que:

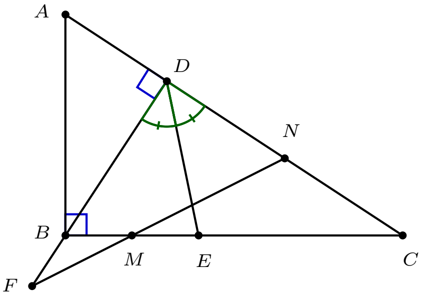
$$\frac{AD}{BF} = \frac{DB}{BF} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BM} \cdot \frac{EB}{CE} = \frac{EB}{BM} = 2\frac{BM}{BM} = 2.$$

Otra solución. Como D es el pie de B en AC, entonces $\triangle BAD$ y $\triangle CBD$ son semejantes, donde $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$. Por el Teorema de la Bisectriz,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{EC},$$

lo cual implica que:

$$AD = \frac{BD \cdot BE}{EC}.$$



Por el Teorema de Menelao aplicado a $\triangle BDC$ para los puntos colineales F, M y N tenemos que:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} = -1.$$

Como por hipótesis $CN = ND$, tenemos que $\frac{FD}{BF} = \frac{MC}{MB}$. Y debido a que $MB = ME$, se sigue que $MC = MB + EC$. Por lo tanto,

$$1 + \frac{BD}{BF} = \frac{FB + BD}{BF} = \frac{FD}{BF} = \frac{MC}{MB} = \frac{MB + EC}{MB} = 1 + \frac{EC}{MB}.$$

Luego,

$$BF = \frac{BD \cdot MB}{EC}.$$

Finalmente, al tomar la razón entre AD y BF tenemos que:

$$\frac{AD}{BF} = \frac{\frac{BD \cdot BE}{EC}}{\frac{BD \cdot MB}{EC}} = \frac{BE}{MB} = 2.$$

Solución del problema 12. Consideremos n números primos, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, no necesariamente distintos. Definamos que $P = p_1 p_2 \cdots p_n$ y $S = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Por las condiciones del problema tenemos que $P = 10S$. De aquí que 10 divide a P; y como P es producto de primos, entonces 5 divide a P y 2 divide a P, por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p_1 = 5$ y $p_2 = 2$. Al sustituir estos valores en $P = 10S$ obtenemos que $10p_3p_4 \cdots p_n = 10(5 + 2 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n)$, es decir,

$$p_3p_4 \cdots p_n = 7 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n.$$

Observemos que si $n = 3$, entonces tenemos una contradicción, ya que tendríamos que $p_3 = 7 + p_3$, es decir, $0 = 7$. Basta analizar qué pasa para $n \geq 4$.

- Si $n = 4$, entonces tenemos que $p_3p_4 = 7 + p_3 + p_4$, lo cual implica que $p_3p_4 - p_3 - p_4 + 1 = (p_3 - 1)(p_4 - 1) = 8$. Al considerar los posibles divisores de 8 tenemos:

  - Si $p_3 - 1 = 1$ y $p_4 - 1 = 8$, entonces $p_3 = 2$ y $p_4 = 4$, lo cual contradice el hecho de que son primos.
  - Si $p_3 - 1 = 2$ y $p_4 - 1 = 4$, entonces $p_3 = 3$ y $p_4 = 5$; y ya que ambos son primos, este es un resultado válido para el problema.

  Enseguida, los casos en los que $p_3 - 1 = 8$ y $p_4 - 1 = 1$, o bien, $p_3 - 1 = 4$ y $p_4 - 1 = 2$ nos dan, respectivamente, el mismo resultado que los casos ya expuestos. Por tanto, si $n = 4$, tenemos que los 4 números primos que satisfacen las condiciones del problema son $2, 3, 5$ y 5.

- Si $n = 5$, entonces tenemos que $p_3p_4p_5 = 7 + p_3 + p_4 + p_5$. Basta considerar los siguientes casos, los cuales dependen de los valores de p_3, p_4 y p_5:

  - Si los tres primos son impares, entonces el producto $p_3p_4p_5$ es impar, mientras que $7 + p_3 + p_4 + p_5$ es par, en consecuencia, no se podría tener la igualdad.
  - Si alguno de los primos es 2, digamos $p_3 = 2$, entonces $p_3p_4p_5$ es par, mientras que $7 + 2 + p_4 + p_5$ nuevamente es impar.
  - Si dos de los primos son pares, por ejemplo, si $p_3 = p_4 = 2$, entonces tenemos que $4p_5 = 7 + 2 + 2 + p_5 = 11 + p_5$, es decir, $3p_5 = 11$; y no existe primo alguno que cumpla con esta igualdad.
  - Si $p_3 = p_4 = p_5 = 2$, tenemos que $p_3p_4p_8 = 8$, mientras que $7 + p_3 + p_4 + p_5 = 13$, en consecuencia, no se tiene la igualdad.

  Para este caso vemos que no existe un lista de cinco números primos que cumpla con las hipótesis del problema.

- Veamos que para $n \geq 6$ tampoco es posible encontrar una lista de n números primos que cumpla con las condiciones del problema. En efecto, sabemos que $p_i \geq 2$, para los índices i con $3 \leq i \leq n$, entonces los mínimos valores que pueden tenerse para el producto y la suma son $p_3p_4p_5 \cdots p_n = 2^{n-2} = \frac{1}{4}2^n$ y $7 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n = 7 + 2(n-2) = 3 + 2n$, respectivamente. Posteriormente, se puede probar que $\frac{1}{4}2^n > 2n + 3$, mediante inducción.

Como el producto es una progresión geométrica y la suma una progresión aritmética, se tiene que un incremento en el valor de alguno de los primos involucrados implica que el producto $p_3p_4\cdots p_n$ aumenta más de lo que lo hace la suma $7+p_3+p_4+\cdots+p_n$, en consecuencia, no será posible tener la igualdad.

En conclusión, la única lista de primos que cumple con las condiciones del problema es $2, 3, 5$ y 5.

Otra solución. Por un argumento similar al de la solución anterior, se tiene que 2 y 5 deben estar en la lista de números buscados y el número de éstos debe ser al menos 4. Sean $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ los primos que faltan en la lista. Por lo tanto, $p_1p_2\cdots p_n = 7+p_1+p_2+\cdots+p_n$.

Veamos que para enteros cualesquiera x y y, tales que $x \geq 2$ y $y \geq 2$, se cumple que $0 \leq (x-1)(y-1)-1 = xy-x-y$, es decir, $xy \geq x+y$. Se aplica repetidamente esta desigualdad para obtener:

$$x_1x_2\cdots x_{k-1}x_k \geq (x_1x_2\cdots x_{k-1}) + x_k \geq \cdots \geq x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k,$$

para números cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ mayores o iguales que 2. En particular:

$$7+p_1+p_2+\cdots+p_n = p_1p_2\cdots p_n \geq (p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\cdot p_n.$$

Definimos que $s = p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$, entonces la desigualdad anterior se puede ver como $7+s+p_n \geq s\cdot p_n$, es decir, $(s-1)(p_n-1) \leq 8$. De aquí que $1 \leq p_n - 1 \leq 8$, por tanto, los posibles valores que el primo p_n puede tomar son $2, 3, 5$ y 7. Analicemos cada uno de estos valores en la igualdad $p_1p_2\cdots p_n = 7+p_1+p_2+\cdots+p_n$.

- Si $p_n = 2$, entonces tenemos que $p_1p_2\cdots p_n = 2^n$ es par; mientras, $7+p_1+p_2+\cdots+p_n = 2n+7$ es impar, en consecuencia, no se puede tener la igualdad entre estas expresiones.

- Si $p_n = 3$, entonces a partir de la desigualdad $(s-1)(p_n-1) \leq 8$ tenemos que $s = p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+3 \leq 5$ o, equivalentemente, $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1} \leq 2$, es decir, la suma del lado izquierdo de esta desigualdad consta de un sólo sumando: $p_1 = 2$. Así, $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$; luego, $p_1p_2 = 2\cdot 3 = 6$, mientras que $7+p_1+p_2 = 7+2+3 = 12$, en consecuencia, no se tiene la igualdad.

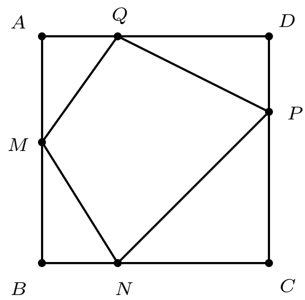
- Si $p_n = 5$, entonces, debido a que $(s-1)(p_n-1) \leq 8$, tenemos que $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1} \leq 3$. De aquí se tiene que el lado izquierdo de esta desigualdad consta de un sólo término, el cual puede tomar los valores $p_1 = 2$, o bien, $p_1 = 3$. Si $p_1 = 2$, debido a que $p_2 = 5$, entonces $p_1p_2 = 2\cdot 5 = 10$, mientras que $7+p_1+p_2 = 7+2+5 = 14$, en consecuencia, no se satisface la igualdad. Por otro lado, si $p_1 = 3$, como $p_2 = 5$, entonces $p_1p_2 = 3\cdot 5 = 15$, mientras que $7+p_1+p_2 = 7+3+5 = 15$. Por tanto, los números $p_1 = 3$ y $p_2 = 5$ son dos números que complementan la lista de números buscados.

- Finalmente, si $p_n = 7$, entonces $p_n - 1 = 6$. Así, la desigualdad $(s - 1)(p_n - 1) \leq 8$ se cumple únicamente si $s - 1 = 1$, es decir, $s = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} = 2$; en consecuencia, s consta de un sólo sumando: $p_1 = 2$. Cuando $p_1 = 2$ y $p_2 = 7$, tenemos que $p_1 p_2 = 2 \cdot 7 = 14$, mientras que $7 + p_1 + p_2 = 7 + 2 + 7 = 16$, por lo que no se da la igualdad.

Concluimos que la única lista de números primos que satisface las condiciones del problema es $2, 3, 5$ y 5.

Solución del problema 13. De la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{AQ + AM}{2} &\geq \sqrt{AQ \cdot AM}, \\
\frac{MB + BN}{2} &\geq \sqrt{MB \cdot BN}, \\
\frac{NC + CP}{2} &\geq \sqrt{NC \cdot CP}, \\
\frac{PD + DQ}{2} &\geq \sqrt{PD \cdot DQ}.
\end{aligned}$$



Al considerar el área de los triángulos rectángulos $\triangle AMQ$, $\triangle BMN$, $\triangle CNP$ y $\triangle DPQ$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
AQ \cdot AM &= 2(\triangle AMQ), \\
MB \cdot BN &= 2(\triangle BMN), \\
NC \cdot CP &= 2(\triangle CNP), \\
PD \cdot DQ &= 2(\triangle DPQ).
\end{aligned}$$

Al sumar las cuatro desigualdades y considerar las igualdades anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(AQ + AM + MB + BN + NC + CP + PD + DQ) \\
&\qquad \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{(\triangle AMQ)} + \sqrt{(\triangle BMN)} + \sqrt{(\triangle CNP)} + \sqrt{(\triangle DPQ)}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que $AQ + QD + DP + PC + CN + NB + BM + MA = 4\,l$, por lo que la desigualdad anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2}(4\,l) \geq \sqrt{2}(\sqrt{(\triangle AMQ)} + \sqrt{(\triangle BMN)} + \sqrt{(\triangle CNP)} + \sqrt{(\triangle DPQ)}),$$

a partir de la cual concluimos que:

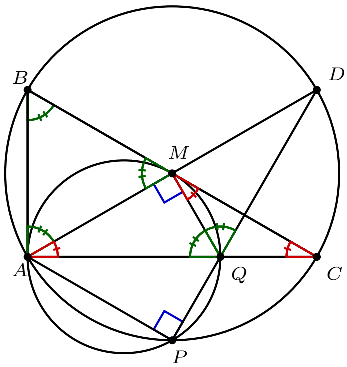
$$l\sqrt{2} \geq \sqrt{(\triangle MNB)} + \sqrt{(\triangle NPC)} + \sqrt{(\triangle PDQ)} + \sqrt{(\triangle QAM)}.$$

Solución del problema 14. Para cada uno de los cuatro puntos existen tres proyecciones: una sobre cada recta, que se forma con dos cualesquiera de los tres puntos no colineales restantes. Así, en total tendremos $4 \cdot 3 = 12$ proyecciones, y si suponemos que cada una de ellas se interseca con el resto una sola vez, entonces tendremos a lo más $\binom{12}{2} = 66$ puntos de intersección. Sin embargo, de las doce rectas consideradas, algunas son paralelas, por tanto, no se intersecan, otras se intersecan por ternas (como las que se intersecan en los cuatro puntos dados), por tanto, el número total de puntos de intersección se verá disminuido. Analicemos cuántos casos de rectas paralelas o intersecadas por ternas se pueden encontrar; para ello, denotemos como A, B, C y D a los cuatro puntos dados.

Sea ℓ la recta que pasa por dos cualesquiera puntos, digamos A y B; y por hipótesis, como C y D no están en dicha recta, entonces es posible trazar perpendiculares a ℓ desde ellos. Estas rectas perpendiculares serán paralelas (por hipótesis no pueden ser la misma recta), y como esto ocurre para cada dos puntos de los cuatro dados, tenemos $\binom{4}{2} = 6$ posibles rectas paralelas, por tanto, se tiene a lo más $66 - 6 = 60$ puntos de intersección.

Analicemos ahora el número de rectas que se intersecan por ternas. Sabemos que para cada punto A, B, C o D hay una terna de rectas que se intersecan en ellos. Además, al considerar tres cualesquiera de los puntos A, B, C o D se forma un triángulo en cuyo ortocentro se interseca también una terna de rectas; dado que hay $\binom{4}{3} = 4$ posibles triángulos, habrá cuatro ternas más. Para cada una de estas $4+4=8$ ternas, los puntos en los que se intersecan se cuentan tres veces (una vez por cada par de rectas que coinciden en un mismo punto). En conclusión, se tiene a lo más $60 - 8(2) = 44$ puntos de intersección determinados por las rectas construidas conforme a las condiciones del problema.

Solución del problema 15. Como $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en el vértice A, entonces M es su circuncentro.



Por lo tanto, $BM = AM = CM$, por lo que $\measuredangle CAM = 30°$ y $\measuredangle AMB = \measuredangle BAM = \measuredangle ABM = 60°$.

Por ser BC tangente en M al circuncírculo de $\triangle AQM$, entonces tenemos que $\measuredangle QMC = \measuredangle CAM = 30°$, por lo cual ocurre que $\triangle CMQ$ es isósceles con $QM = QC$ y $\measuredangle CQM = 120°$. Además, también tenemos que $\measuredangle AMQ = 90°$.

Como $APQM$ es cíclico, entonces $\measuredangle APQ = 90°$. Por lo que, si D es la intersección de PQ con el circuncírculo de $\triangle ABC$, entonces D es diametralmente opuesto a A. Se sigue que $\triangle AQD$ es ísosceles y que QM es la bisectriz de $\measuredangle AQD$, lo cual implica que $\measuredangle MQD = 60°$. De esta forma, PQ es la bisectriz de $\measuredangle MQC$, y como $\triangle CMQ$ es isósceles, entonces PQ es perpendicular a CM.

Solución del problema 16. Para cada entero n tenemos que n^2 es congruente sólo con 0, 1, 4, o bien, 7 módulo 9; y n^3 sólo puede ser congruente con 0, 1, o bien, 8 módulo 9. Luego, como $2000\cdots004 = 2(10^{n+1}) + 4 \equiv 6 \pmod{9}$, se sigue que los números $2000\cdots004$, con $n \geq 1$ ceros, no pueden ser el cuadrado ni el cubo de ningún entero.

Por otro lado, para cada entero n, tenemos que n^2 es congruente sólo con 0, 1, o bien, 4, módulo 5; y como $1000\cdots008 = 10^{n+1} + 8 \equiv 3 \pmod{5}$, se sigue que los números $1000\cdots008$, con $n \geq 1$ ceros, no pueden ser el cuadrado de ningún entero.

Supongamos que existe un entero positivo m, tal que el número $1000\cdots008$, con m ceros entre el 1 y el 8, es un cubo. Entonces, $10^{m+1} + 8 = k^3$ para algún entero par k mayor que 2. Luego, $10^{m+1} = 2^{m+1} \cdot 5^{m+1} = k^3 - 2^3 = (k-2)(k^2 + 2k + 4)$. Al usar residuos se puede ver que $k^2 + 2k + 4$ nunca es un múltiplo de 5, por lo que $k - 2 = 2^i \cdot 5^{m+1}$ y $k^2 + 2k + 4 = 2^j$, donde i y j son enteros que cumplen con $i + j = m + 1$. Además, como $k > 2$, entonces $2^j > 12$, por lo tanto, $j \geq 4$. Luego,

$$\begin{aligned} 2^j &= (2^i \cdot 5^{m+1} + 2)^2 + 2(2^i \cdot 5^{m+1} + 2) + 4 \\ &= 2^{2i} \cdot 5^{2m+2} + 2^{i+2} \cdot 5^{m+1} + 3 \cdot 4 + 2^{i+1} \cdot 5^{m+1}. \end{aligned}$$

Si $i = 0$, entonces $2^{m+1} = 5^{2m+2} + 2 \cdot 5^{m+1} + 4(5^{m+1} + 3)$, lo cual no es posible dado que el lado derecho es un impar y el lado izquierdo es un par.

Si $i \geq 1$, entonces $2^{j-2} = 2^{2i-2} \cdot 5^{2m+2} + 2^i \cdot 5^{m+1} + 3 + 2^{i-1} \cdot 5^{m+1}$, lo cual es un absurdo dado que el lado derecho es impar y el lado izquierdo es par.

Por lo tanto, los números $1000\cdots008$, con $m \geq 1$, no pueden ser el cubo de ningún entero.

Otra solución. Sea $A = 2000\cdots004$, con $n \geq 1$ ceros. Utilizando el criterio de divisibilidad por 3, tenemos que 3 divide al número A, y con el criterio de divisibilidad por 4 tenemos que 4 divide al número A. Así, podemos escribir que $A = 12 \cdot a$. De allí que, $a = 166\cdots67$, con $n - 1$ números 6.

Luego, si A es un cuadrado perfecto, se sigue que a debe tener al menos un factor 3, es decir, que 3 divide al número a. El criterio de divisibilidad por 3 nos dice que 3 no divide al número a. Por lo tanto, los números $2000\cdots004$, con $n \geq 1$ ceros, no pueden ser el cuadrado de ningún entero.

También, si A es un cubo perfecto, como $A = 3 \cdot 2^2 \cdot a$, se sigue que a tiene al menos un factor 2, pero a es impar. Por lo tanto, los números $2000\cdots004$, con $n \geq 1$ ceros, no pueden ser el cubo de ningún entero.

Sea $B = 1000\cdots 008$, con $m \geq 1$ ceros. Utilizando el criterio de divisibilidad por 9 se sigue que 9 divide al número B. Así, podemos escribir que $B = 9 \cdot b$. Lo anterior implica que $b = 111\cdots 12$, con m números 1.

Luego, si B es un cuadrado perfecto, se sigue que b también debe ser un cuadrado perfecto con residuo 2 al dividirse entre 10, pero el número 2 no es residuo de ningún cuadrado al dividirse entre 10. Por lo tanto, los números $1000\cdots 008$, con $m \geq 1$ ceros, no pueden ser el cuadrado de ningún entero.

Se procede como en la solución anterior para ver que B no es el cubo de ningún entero.

Solución del problema 17. Recordemos que la multiplicación de dos cuadrados perfectos es un número cuadrado perfecto y que $S(n) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Así, si queremos que n y $S(n)$ sean cuadrados perfectos, debemos tener que $\frac{n+1}{2}$ es cuadrado perfecto. Supongamos que $n = m^2$ y $\frac{n+1}{2} = p^2$, entonces la relación que un número entero debe cumplir para ser fantástico es $m^2 + 1 = 2p^2$ o, equivalentemente,

$$(\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m) = 1.$$

1. Sabemos que $n = 49$ es un número fantástico, entonces de la relación anterior se sigue que $m = 7$ y $p = 5$. Consideremos ahora dos enteros postivos a y b, tales que $1 = (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b)$. Nos interesa escribir la unidad en esta forma específica para garantizar que el producto de cualquier número fantástico por esta cumpla con la relación establecida en el párrrafo anterior. En efecto:

$$\begin{aligned}
1 &= (\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m) \cdot 1 \\
&= (\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m)(a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b) \\
&= (\sqrt{2}p - m)(a - \sqrt{2}b)(\sqrt{2}p + m)(a + \sqrt{2}b) \\
&= [\sqrt{2}(ap + mb) - (2pb + ma)][\sqrt{2}(ap + mb) + (2pb + ma)].
\end{aligned}$$

Una vez que hemos probado que el producto por $1 = (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b)$ mantiene la forma de un número fantástico, encontremos valores para a y b. Si $b = 1$, entonces $1 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$, se sigue que $a = \sqrt{3}$, dicho número no es entero positivo. Si $b = 2$, entonces $1 = (a - 2\sqrt{2})(a + 2\sqrt{2})$, se sigue que $a = 3$. Al considerar los valores $m = 7$ y $p = 5$ obtenidos anteriormente, y los que hemos encontrado para a y b, tenemos que $ap + mb = 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 29$ y $2pb + ma = 2(5 \cdot 2) + 7 \cdot 3 = 41$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
1 &= [\sqrt{2}(ap + mb) - (2pb + ma)][\sqrt{2}(ap + mb) + (2pb + ma)] \\
&= [29\sqrt{2} - 41][29\sqrt{2} + 41]
\end{aligned}$$

El número fantástico que se genera a partir de aquí es $n = 41^2$, donde $S(n) = \frac{41^2(41^2+1)}{2} = 41^2 \cdot 841 = 41^2 \cdot 29^2$.

2. Observemos que de la relación que deben cumplir los números fantásticos, y al tomar k cualquier entero positivo, se puede verificar que:

$$\begin{aligned}1 &= (\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m)\\ &= (\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m)\cdot 1^k\\ &= (\sqrt{2}p - m)(\sqrt{2}p + m)[(a-\sqrt{2}b)(a+\sqrt{2}b)]^k\\ &= (\sqrt{2}p - m)(a-\sqrt{2}b)^k(\sqrt{2}p + m)(a+\sqrt{2}b)^k\end{aligned}$$

tiene la forma $(\sqrt{2}r - t)(\sqrt{2}r + t)$, por tanto, se puede encontrar una infinidad de números fantásticos. En particular, si tomamos los valores de $n = m^2 = 49$, $2p^2 = m^2 + 1 = 50$, $a = 3$ y $b = 2$ tenemos que los números fantásticos que se pueden generar a partir del 49 son de la forma siguiente:

$$1 = (5\sqrt{2} - 7)(3 - 2\sqrt{2})^k(5\sqrt{2} + 7)(3 + 2\sqrt{2})^k,$$

con k entero positivo.

Solución del problema 18. Para que las nueve personas conozcan toda la información, al menos una de ellas debe saberla. Como todos poseen información diferente, el resto de las personas debe realizar al menos una llamada. Una vez que una persona posee toda la información, debe llamar al resto para que también la tengan, es decir, debe realizar ocho llamadas. Por tanto, se necesita hacer al menos dieciseis llamadas para garantizar que las nueve personas tengan toda la información.

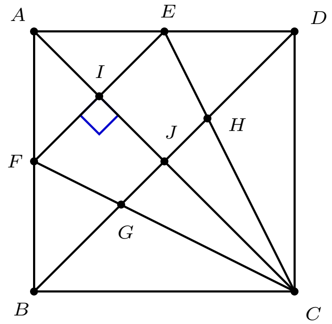
Otra solución. Sean V_n la cantidad mínima de llamadas que se necesita para que n personas conozcan toda la información y M una de las n personas. Si no consideramos a la persona M, entonces para que las $n-1$ personas restantes sepan toda la información que ellos poseen se necesitan V_{n-1} llamadas. Así, para que conozcan también la información de M, ésta deberá hacer una llamada y recibir aquella que le proporcionará la información completa, es decir, $V_n = V_{n-1} + 2$.

De manera análoga, se puede verificar que $V_{n-1} = V_{n-2} + 2$, por lo que al sustituirla en la expresión para V_n se obtiene que $V_n = V_{n-2} + 2(2)$, y si continuamos de forma recursiva obtenemos que:

$$V_n = V_{n-k} + 2(k).$$

Si $k = n - 1$, dado que $V_1 = 0$, tenemos que $V_n = V_1 + 2(n-1) = 2(n-1)$. Como son nueve personas, sustituimos $n = 9$ para obtener que el número mínimo de llamadas es $V_9 = 2(8) = 16$.

Solución del problema 19. Sean I y J las intersecciones de AC con EF y BD, respectivamente. Como E y F son los puntos medios de AD y AB, respectivamente, entonces BD y EF son paralelos, además de que $BD = 2EF$. Por el Teorema de Thales $AC = 2AJ = 4IJ$, y como AC es perpendicular a BD, por ser $ABCD$ un cuadrado, entonces IJ es la altura del trapecio isósceles $EFGH$.



Por el criterio AA tenemos que $\triangle BCH$ es semejante a $\triangle DEH$, lo cual implica que:

$$\frac{BH}{DH} = \frac{BC}{ED} = 2,$$

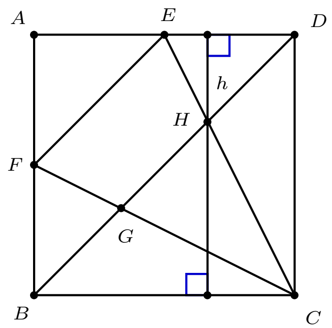
es decir, $BH = 2HD$. De manera semejante se puede probar que $DG = 2GB$. Por lo tanto, $BD = 3GH$.

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces $AC = BD$, y por el Teorema de Pitágoras tenemos que $AC \cdot BD = 2 \cdot 6^2 = 72$. Se sigue que:

$$(EFGH) = \frac{1}{2}(EF + GH)IJ = \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{2} + \frac{BD}{3}\right)\frac{AC}{4} = \frac{5}{48}AC \cdot BD = \frac{15}{2}.$$

Otra solución. Como E y F son los puntos medios de AD y AB, respectivamente, entonces $\triangle AFE$ y $\triangle ABD$ son semejantes con razón $\frac{1}{2}$, por lo que:

$$(\triangle AFE) = \frac{1}{4}(\triangle ABD) = \frac{1}{4}18 = \frac{9}{2}.$$



Por el criterio AA tenemos que $\triangle BCH$ es semejante a $\triangle DEH$, con razón de semejanza $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la altura h de $\triangle DEH$ es $\frac{1}{3}$ de DC, es decir, $h = 2$. Además, por el criterio ALA tenemos que $\triangle BFG$ es congruente a $\triangle DEH$, por lo que:

$$(\triangle BFG) = (\triangle DEH) = \frac{1}{2}ED \cdot h = 3.$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned}(EFGH) &= (ABCD) - (\triangle BCD) - (\triangle AFE) - (\triangle BFG) - (\triangle DEH)\\ &= 36 - 18 - \frac{9}{2} - 3 - 3\\ &= \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Solución del problema 20. Si se empieza con los números del 1 al n en el primer renglón, el número del vértice inferior será $2^{n-2}(n+1)$. Para ver esto tomamos una copia reflejada del triángulo construido, es decir, en el primer renglón a la izquierda está n; luego sigue $n-1$, etc. Sobreponemos dicha copia con el triángulo original y sumamos los números encimados. El primer renglón del triángulo obtenido tiene así n veces el número $n+1$; el segundo renglón tiene $n-1$ veces $2(n+1)$. En general, cada renglón consiste de repeticiones del mismo número y este número es el doble del correspondiente al renglón anterior por la construcción de los triángulos. Así, el número en el vértice inferior del triángulo "suma" será $2^{n-2}(n+1)$. El número buscado es la mitad de esto, así que la respuesta al problema es $2^{1998}(2001) = 2^{1998}\cdot 3\cdot 23\cdot 29$.

Otra solución. Observemos cómo contribuye cada número del primer renglón a la suma final. Para ello, pongamos letras en el primer renglón:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & \cdots\\ & a+b & & b+c & & c+d & & \cdots & \\ & & a+2b+c & & b+2c+d & & \cdots & & \\ & & & a+3b+3c+d & & \cdots & & & \end{array}$$

Es claro que los coeficientes que aparecen en el lado determinado por el vértice a y el vértice inferior del triángulo son los del Triángulo de Pascal. Al sustituir los valores de a, b, c, etc., obtenemos el número buscado:

$$A = \binom{1999}{0}1 + \binom{1999}{1}2 + \binom{1999}{2}3 + \cdots + \binom{1999}{1999}2000.$$

Dado que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, podemos factorizar y obtener:

$$\begin{aligned} A =& \binom{1999}{0}(1+2000) + \binom{1999}{1}(2+1999) + \cdots + \binom{1999}{999}(1000+1001)\\ =& \left[\binom{1999}{0} + \binom{1999}{1} + \cdots + \binom{1999}{999}\right](2001)\\ =& \frac{1}{2}\left[\binom{1999}{0} + \binom{1999}{1} + \cdots + \binom{1999}{1999}\right](2001)\\ =& \frac{1}{2}2^{1999}2001 = 2^{1998}\cdot 3\cdot 23\cdot 29.\end{aligned}$$

Otra solución. Primero observamos que si tenemos $n = 2k$, entonces en el segundo renglón habrá un número en medio que es $k + (k+1) = 2k+1$.

Además, el número buscado A está varios renglones debajo de $2k+1$, pero alineado verticalmente. Al estar cada renglón en progresión aritmética, en la siguiente sección del triángulo notamos que al bajar verticalmente del renglón l al renglón $l+2$ llegamos al número $4x$.

$$\begin{array}{ccccc} x-d & & x & & x+d \\ & 2x-d & & 2x+d & \\ & & 4x & & \end{array}$$

Así, como 2001 se encuentra en medio del renglón dos, en el renglón cuatro estará $4\cdot 2001$; en el renglón seis estará $4^2\cdot 2001$, etc. Por lo tanto, en medio del renglón $2p$ estará $4^{p-1}\cdot 2001$, por lo que al final tendremos que

$$A = 4^{1000-1}\cdot 2001 = 4^{999}\cdot 2001 = 2^{1998}\cdot 3\cdot 23\cdot 29.$$

Solución del problema 21.

1. Sea a el número de cifras de 2^{n+1}, entonces:

   $$2^n \bigoplus 2^{n+1} = 2^n(10^a) + 2^{n+1} = 2^n(10^a+2) = 2^n(1\underbrace{0\ldots0}_{a \text{ veces}}2).$$

   Debido a que las cifras del número entre paréntesis suman 3, tenemos que 3 divide a $2^n \bigoplus 2^{n+1}$. lo cual es lo que queríamos demostrar.

   Otra manera de concluir es que como $10^a \equiv 1 \pmod 3$, entonces $10^a + 2 \equiv 0 \pmod 3$, en consecuencia, 3 divide a $2^n \bigoplus 2^{n+1}$.

2. Sabemos que $P = 2^n \bigoplus 2^{n+k} = 2^n(10^b + 2^k)$, donde b es el número de cifras de 2^n. Como queremos que P sea divisible entre 9, se debe cumplir que $10^b + 2^k \equiv 0 \pmod 9$, y debido a que $10^b \equiv 1 \pmod 9$, esto equivale a pedir que $2^k \equiv 8 \pmod 9$. Analicemos esta última congruencia para los distintos valores de k.

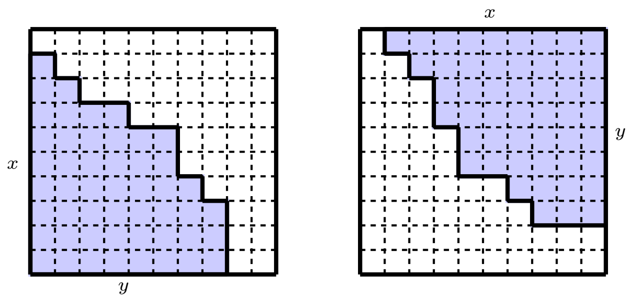
   $$\begin{array}{lll} 2^0 \equiv 1 \pmod 9, & \quad & 2^1 \equiv 2 \pmod 9, \\ 2^2 \equiv 4 \pmod 9, & & 2^3 \equiv 8 \pmod 9, \\ 2^4 \equiv 7 \pmod 9, & & 2^5 \equiv 5 \pmod 9, \\ 2^6 \equiv 1 \pmod 9, & & 2^7 \equiv 2 \pmod 9, \\ \quad\vdots & & \quad\vdots \end{array}$$

   Notamos que se repiten las congruencias cada seis potencias, en consecuencia, $2^{3+6m} \equiv 8 \pmod 9$, con m entero positivo. Para demostrar lo anterior podemos proceder por inducción. Para $m=0$, tenemos que $2^3 \equiv 8 \pmod 9$. Supongamos que $2^{3+6m} \equiv 8 \pmod 9$, entonces $2^{3+6(m+1)} = 2^{9+6m} = 2^6\cdot 2^{3+6m} \equiv (1)(8) \pmod 9$, debido a la hipótesis de inducción.

   Así, si $k = 3+6m$, con m entero positivo, se cumple que 9 divide a P con $P = 2^n \bigoplus 2^{n+1}$.

Solución del problema 22. El máximo es 180, el cual se obtiene cuando el tablero se colorea como un tablero de ajedrez. En efecto, los segmentos que pueden ser frontera son los interiores (los que no pertenecen al borde del tablero), y todos ellos son frontera con esta coloración.

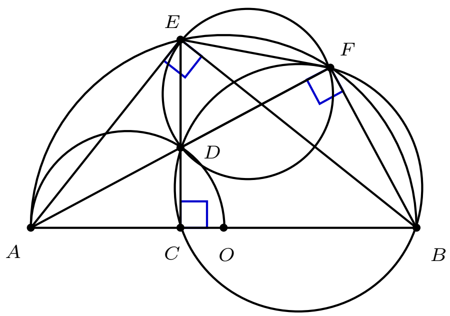
El mínimo es 10, el cual se obtiene cuando todas las casillas a un lado de una mediana (una de las dos líneas que unen puntos medios de lados opuestos) se pintan de un color y las que están del otro lado se pintan de otro. Para probar que efectivamente 10 es el mínimo observemos que el número de segmentos frontera verticales entre dos columnas adyacentes no puede superar a la diferencia (en valor absoluto) entre los números de casillas negras en cada columna. Por lo tanto, si se modifica cada columna al poner todas las casillas blancas encima de la negras, el número de segmentos frontera no crece. Al repetir este proceso para las filas se obtiene una coloración con menor o igual número de segmentos frontera, en la cual si una casilla es negra, también lo son todas las que se encuentran debajo o a la izquierda de ella. Si en esa coloración hay una fila completamente blanca y otra completamente negra, es claro que debe haber al menos 10 segmentos frontera. De lo contrario se presentará una de las dos siguientes configuraciones:



En cada una de ellas el número de segmentos frontera es $x + y$, y en ambos casos se tiene que:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{9 \cdot 8} > 10.$$

Solución del problema 23. Como $\triangle AEB$ es rectángulo, entonces $\triangle ACE$ es semejante a $\triangle AEB$, lo cual implica que $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AE}$. Por lo tanto, $AE^2 = AC \cdot AB$.



Por otro lado, como $\measuredangle AFB = \measuredangle BCD = 90°$, entonces $BCDF$ es cíclico. Al considerar la potencia de A respecto al circuncírculo de $BCDF$ tenemos que $AC \cdot AB = AD \cdot AF$.

Al igualar las dos expresiones encontradas obtenemos que:

$$AE^2 = AD \cdot AF.$$

Lo anterior quiere decir que la potencia de A respecto al circuncírculo de $\triangle DEF$ es igual a AE^2, por lo que AE es tangente a dicha circunferencia en E.

Solución del problema 24. Sea $N = 30a0b03$ el número buscado. Queremos encontrar las parejas (a, b) de valores de a y b, tales que $N \equiv 0 \pmod{13}$. Al reescribir N como $N = 3 \times 10^6 + a \times 10^4 + b \times 10^2 + 3$ notamos que, como $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$, $10^4 \equiv 3 \pmod{13}$ y $10^2 \equiv 9 \pmod{13}$, tendremos que $N \equiv 3 + 3a + 9b + 3 = 3a + 9b + 6 \pmod{13}$, es decir, que $3a + 9b + 6 \equiv 0 \pmod{13}$. Sin embargo, como 3 y 13 son primos relativos, tendremos que $a + 3b + 2 \equiv 0 \pmod{13}$, lo cual equivale a tener que $a + 3b + 2 = 13k$, donde k es un entero positivo.

Para determinar los posibles valores de k recordemos que a y b son dígitos, por lo que deben satisfacer $0 \leq a, b \leq 9$, es decir $2 \leq a + 3b + 2 \leq 38$, se sigue que $2 \leq 13k \leq 38$, es decir, $1 \leq k \leq 2$. Analicemos los siguientes casos:

- Si $k = 1$, entonces $a + 3b = 11$. Así, las posibles parejas (a, b) son $(8, 1)$, $(5, 2)$ y $(2, 3)$.
- Si $k = 2$, entonces $a + 3b = 24$, en consecuencia, las posibles parejas (a, b) son $(9, 5)$, $(6, 6)$, $(3, 7)$ y $(0, 8)$.

Claramente las parejas encontradas $(8, 1)$, $(5, 2)$, $(2, 3)$, $(9, 5)$, $(6, 6)$, $(3, 7)$ y $(0, 8)$ satisfacen las condiciones del problema.

Otra solución. Al proceder como en la solución anterior obtenemos que $a + 3b + 2 \equiv 0 \pmod{13}$. Además, como $-2 \equiv 11 \pmod{13}$, entonces $a + 3b \equiv 11 \pmod{13}$.

En la siguiente tabla describimos los posibles valores de residuos para a, b y $3b$ al dividirse entre 13.

a	b	$3b$
0	0	0
1	1	3
2	2	6
3	3	9
4	4	12
5	5	2
6	6	5
7	7	8
8	8	11
9	9	1

Así, por ejemplo, cuando $a = 0$, el único valor posible para $3b$ es 11, por lo que $b = 8$. Al continuar de esta manera encontramos que las parejas $(0, 8)$, $(2, 3)$, $(3, 7)$, $(5, 2)$, $(6, 6)$, $(8, 1)$ y $(9, 5)$ son las únicas que satisfacen la congruencia $a + 3b \equiv 11 \pmod{13}$, por lo tanto, las condiciones del problema.

Solución del problema 25. Los caballeros que dicen 1 son de la forma $3m + 1$, con $m \geq 0$. Notemos que $2017 = 3(672) + 1$, por lo que el caballero 2017 pasa la primera ronda.

Para que el caballero 2017 gane debe decir 1 en todos los turnos; eso se puede hacer si al final de cada uno de éstos queda un múltiplo de 3 caballeros sentados. Notemos que al final de cada turno se eliminan $\frac{2}{3}$ del total de caballeros; además, al final del juego tenemos dos formas de terminar:

- Quedan uno o tres caballeros.
- Quedan dos caballeros.

De lo anterior, tenemos que el caballero 2017 ganará si cuando dijo 1 la primera vez quedaban 3^k para la primera forma, o bien, $3^k \cdot 2$ para la segunda, con $k \geq 1$.

Antes de que el caballero 2017 diga 1, se han eliminado $2(\frac{2016}{3}) = 1344$ caballeros, entonces para que el caballero 2017 sea el ganador debe pasar que $L - 1344 = 3^k$ o $L - 1344 = 2 \cdot 3^k$. Luego, los valores de L son $3^k + 1344$, o bien, $2 \cdot 3^k + 1344$, donde $k \geq 6$, pues queremos que $L > 2017$.

Solución del problema 26. Se demostrará por medio de inducción, iniciando con $n = 2$. En este caso la desigualdad que queremos demostrar es:

$$x_1 + 2x_2 \leq 1 + x_1 + x_2^2,$$

o, equivalentemente,

$$0 \leq 1 - 2x_2 + x_2^2,$$

lo cual es cierto, ya que $1 - 2x_2 + x_2^2 = (1 - x_2)^2$. Ahora, supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{k} ix_i \leq \binom{k}{2} + \sum_{i=1}^{k} x_i^i.$$

Queremos demostrar que se cumple para el caso $n = k + 1$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{k+1} ix_i \leq \binom{k+1}{2} + \sum_{i=1}^{k+1} x_i^i.$$

Notemos que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} ix_i = \sum_{i=1}^{k} ix_i + (k+1)x_{k+1},$$

$$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)(k)}{2} = \frac{(k)(k-1)}{2} + k = \binom{k}{2} + k,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^i = \sum_{i=1}^{k} x_i^i + (x_{k+1})^{k+1}.$$

De lo anterior, lo que debemos probar es que:

$$\sum_{i=1}^{k} ix_i + (k+1)x_{k+1} \leq \binom{k}{2} + k + \sum_{i=1}^{k} x_i^i + (x_{k+1})^{k+1}.$$

Además, por la hipótesis de inducción, basta probar que:

$$(k+1)x_{k+1} \leq k + (x_{k+1})^{k+1}.$$

Al usar la relación Media Geométrica-Media Aritmética para $k+1$ números se obtiene que:

$$\sqrt[k+1]{(x_{k+1})^{k+1}} \leq \frac{1+1+\cdots 1+(x_{k+1})^{k+1}}{k+1},$$

con lo que:

$$x_{k+1} \leq \frac{k+(x_{k+1})^{k+1}}{k+1}.$$

Por el principio de Inducción Matemática la desigualdad es cierta para $n \geq 2$.

Otra solución. Probaremos por inducción que $ix-(i-1) \leq x^i$ para un número x real no negativo. Veamos el caso $i=1$, donde:

$$x-(1-1) = x = x^1,$$

por lo que este caso se cumple. Supongamos que la desigualdad es cierta para $i=k$, entonces:

$$kx-(k-1) \leq x^k.$$

Probaremos que se cumple para $k+1$, es decir, que la siguiente desigualdad es cierta:

$$(k+1)x-((k+1)-1) \leq x^{k+1}.$$

A partir de la hipótesis de inducción obtenemos que:

$$x(kx-(k-1)) \leq x(x^k),$$

es decir,

$$kx^2-kx+x \leq x^{k+1}.$$

De la primera solución sabemos que $2x-1 \leq x^2$, entonces $2kx-k \leq kx^2$. Luego,

$$x^{k+1} \geq kx^2-kx+x \geq 2kx-k-kx+x.$$

Con lo anterior obtenemos que:

$$x^{k+1} \geq kx-k+x = (k+1)x-k.$$

Esto último es lo que queríamos probar.

Ahora, como los números $x_1, \ldots, x_n$ son reales no negativos, lo anterior se cumple para cada uno de ellos. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i \geq \sum_{i=1}^{n} ix_i-(i-1).$$

Al desarrollar la parte derecha de la desigualdad se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i \geq \sum_{i=1}^{n} ix_i - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$, entonces la desigualdad anterior la podemos ver como:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i \geq \sum_{i=1}^{n} ix_i - \frac{n(n+1)}{2} + n,$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i + \frac{n^2-n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} ix_i.$$

Y debido a que $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$, queda demostrado el problema.

Solución del problema 27. Supongamos que hay un entero k, tal que $2^{2p} + 2^{2q} = k^2$.

Como $4 \equiv 1 \pmod 3$, se tiene que $2^{2p} + 2^{2q} \equiv 2 \pmod 3$, es decir, que $k^2 \equiv 2 \pmod 3$, pero cada cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 3, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el número $2^{2p} + 2^{2q}$ no puede ser un cuadrado.

Otra solución. Analicemos los dos casos posibles para p y q.

- Si $p = q$, entonces $2^{2p} + 2^{2p} = 2^{2p+1} = 2 \cdot 2^{2p}$, el cual no es un cuadrado.

- Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 < p < q$. Sea r el entero positivo, tal que $q = p + r$, entonces tenemos que:

  $$2^{2p} + 2^{2q} = 2^{2p} + 2^{2(p+r)} = 2^{2p}(1 + 2^{2r}).$$

  Para que resultado sea un cuadrado se debe hacer que $1 + 2^{2r}$ lo sea. Observemos que $(2^r)^2 = 2^{2r} < 1 + 2^{2r} < 1 + 2^{2r} + 2^{r+1} = (2^r + 1)^2$; es decir, $1 + 2^{2r}$ se encuentra entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos, por tanto, no puede ser cuadrado. Por ello, $2^{2p} + 2^{2q}$ no es un cuadrado.

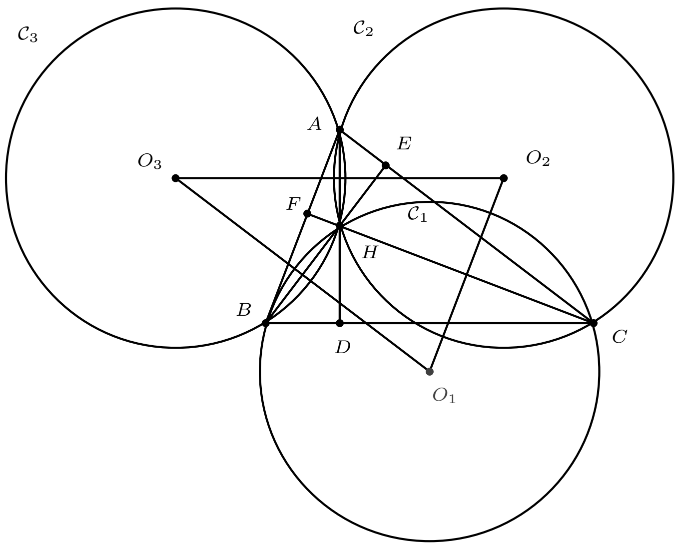
Otra solución. Al proceder como en la segunda solución, obtenemos que para que $2^{2p} + 2^{2q}$ sea cuadrado se debe cumplir que $1 + 2^{2r}$ sea un cuadrado.

Supongamos que existe un entero positivo n tal que $n^2 = 1 + 2^{2r}$, entonces $n^2 - 2^{2r} = 1$, por lo tanto, $(n - 2^r)(n + 2^r) = 1$. Como ambos factores son enteros, ambos deben ser 1, o bien, -1. En cualquier caso, llegamos a que $n = 0$, lo cual es una contradicción, por lo que $1 + 2^{2r}$ no es un cuadrado.

Por lo tanto, $2^{2p} + 2^{2q}$ no es un cuadrado.

Solución del problema 28. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ los circuncírculos de $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ y $\triangle ABH$, respectivamente. Sean D, E, F los pies de las alturas desde A, B, C, respectivamente. Ya que $\measuredangle ADC = \measuredangle BEC$ y $\measuredangle DCA = \measuredangle ECB$, por el criterio AA tenemos que $\triangle ADC$ y $\triangle BEC$ son semejantes, por lo que $\measuredangle CAH = \measuredangle CBH$. Como estos ángulos son inscritos en $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_1$, respectivamente, se sigue que $\measuredangle HO_2C = \measuredangle CO_1H$ por ser estos últimos ángulos centrales que abrazan el mismo arco HC. Además, dado que $\triangle HO_1C$ y $\triangle HO_2C$ son isósceles, tenemos que $\measuredangle O_2CH = \measuredangle CHO_2 = \measuredangle O_1HC = \measuredangle HCO_1$. De esta manera, por el criterio AA: $\triangle HO_2C$ y $\triangle HO_1C$ son semejantes. Como estos triángulos comparten HC, tenemos que son congruentes. Así, $O_2A = O_2H = O_2C = O_1B = O_1H = O_1C$.

Al utilizar la misma idea que en el párrafo anterior, con $\triangle BEA$ y $\triangle CFA$, tenemos que $O_3A = O_3H = O_3B = O_2A = O_2H = O_2C$. Por lo tanto, $O_1H = O_2H = O_3H$, lo cual implica que H es el circuncentro de $\triangle O_1O_2O_3$.

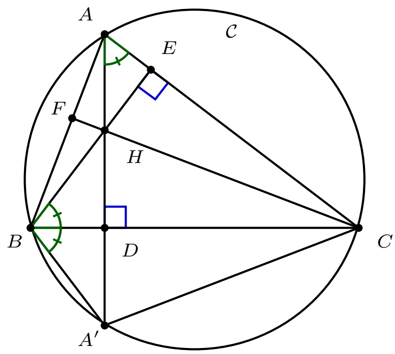


Como $O_1H = BO_3$ y $O_1B = HO_3$, entonces HO_1BO_3 es un paralelogramo. De igual manera, como $HO_2 = O_1C$ y $HO_1 = O_2C$, entonces HO_2CO_1 es un paralelogramo. Por lo tanto, O_3B, HO_1 y O_2C son paralelos y, además, $O_3B = O_2C$. Se sigue que O_3BCO_2 es un paralelogramo y así $O_3O_2 = BC$. Análogamente, podemos probar que $O_3O_1 = AC$ y $O_1O_2 = AB$. Finalmente, por el criterio de congruencia LLL obtenemos que $\triangle O_1O_2O_3$ es congruente a $\triangle ABC$.

Otra solución. Probaremos primero el siguiente resultado: si H es el ortocentro de $\triangle ABC$, los circunradios de $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ y $\triangle ABH$ miden lo mismo.

Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo de $\triangle ABC$ y A' la intersección de AH con $\mathcal{C}$. Sean D, E y F los pies de las alturas de A, B y C en los lados de $\triangle ABC$, respectivamente. Notemos que $ABDE$ es cíclico, puesto que $\measuredangle ADB = 90^\circ = \measuredangle AEB$, se sique que $\measuredangle DAE = \measuredangle DBE$. Por otro lado, $\measuredangle DAE = \measuredangle A'BC$, ya que $ABA'C$ es cíclico. De esta forma $\measuredangle A'BC = \measuredangle CBH$; así que BD es altura y bisectriz para $\triangle A'BH$, por lo que dicho triángulo es isósceles con $A'B = BH$. Luego, por el criterio de congruencia LAL, $\triangle BHC$ y $\triangle BA'C$ son congruentes, por lo que $\triangle BA'C$ tiene el mismo circunradio que $\triangle BHC$. Notemos, además, que $\triangle ABC$ tiene el mismo circunradio que $\triangle A'BC$, por lo que $\triangle ABC$ y $\triangle BHC$ tienen el mismo circunradio. Usando la misma idea podemos demostrar que $\triangle AHB$ y $\triangle CHA$ tienen el mismo circunradio que $\triangle ABC$.

Ahora, regresando al problema principal, como AH es el eje radial de los circuncírculos de $\triangle AHB$ y $\triangle AHC$, tenemos que AH y O_2O_3 son perpendiculares. Además, al ser AH altura, AH es perpendicular a BC, lo cual implica que O_2O_3 es paralela a BC. Análogamente, O_1O_2 es paralela a AB y O_1O_3 es paralela a AC. Como $\triangle AHB$ y $\triangle AHC$ tienen el mismo circunradio, $AO_3 = AO_2$, por lo que $\triangle AO_3O_2$ es isósceles. Por lo tanto, AH es mediatriz de O_3O_2. Por analogía, CH y BH son mediatrices de O_1O_2 y O_1O_3, respectivamente. Como estas mediatrices concurren en H, entonces H es el circuncentro de $\triangle O_1O_2O_3$.



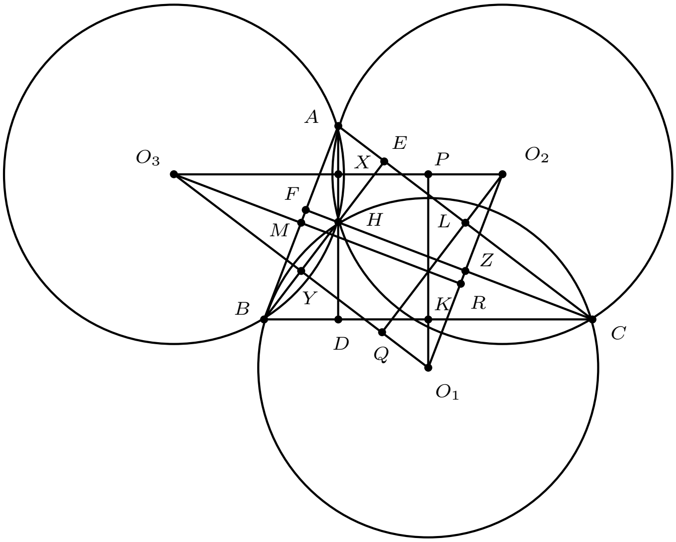
Concluimos la segunda parte de la demostración como en la solución anterior.

Otra solución. Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C sobre BC, CA y AB, respectivamente. Sean X, Y, Z, K, L y M los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH, BC, CA y AB, respectivamente. Sean P, Q y R los pies de las alturas de $\triangle O_1O_2O_3$ desde O_1, O_2 y O_3, respectivamente.

Observemos que Y, Z y K son los puntos medios de los lados de $\triangle BCH$, por lo que sus mediatrices concurren en O_1. De manera análoga tendríamos que las mediatrices que pasan por Z, X y L concurren en O_2, y las que pasan por Y, X y M concurren en O_3.

Se sigue que X, Y y Z son los puntos de intersección de las alturas de $\triangle ABC$ con los segmentos O_2O_3, O_3O_1 y O_1O_2, respectivamente.

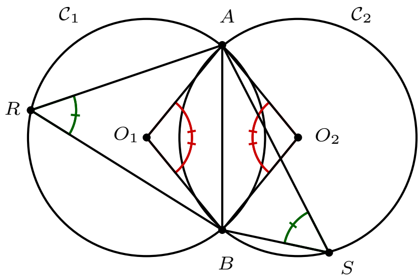
Notemos que BC es perpendicular a XD y O_2O_3 es perpendicular a XD, por lo que BC es paralela a O_2O_3. Análogamente, tenemos que CA es paralela a O_3O_1 y AB es paralela a O_1O_2. Luego, $\triangle ABC$ y $\triangle O_1O_2O_3$ son semejantes. Dado que la mediatriz que tiene pie en M pasa por O_3, que AB es paralela a O_2O_1 y que R es pie de O_3 sobre O_2O_1, tenemos que O_3R es perpendicular a AB. Como FC es perpendicular a AB, entonces O_3R es paralela a FC; además, como CA es paralela a O_3O_1, O_3FCE es un paralelogramo, por lo que $O_3R = FC$. Al ser $\triangle O_1O_2O_3$ semejante a $\triangle ABC$, la proporción de semejanza se conserva con las alturas correspondientes. Al ser $O_3R = FC$, entonces la razón es 1, por lo que los triángulos son congruentes.



De lo anterior, tenemos que $\triangle O_1O_3P$ es congruente a $\triangle ACD$, por lo que $O_3P = CD$. Notemos que P y K están sobre la misma recta, por lo que KP es perpendicular a BC, y como XD es perpendicular a BC, entonces KP es paralela a XD. Por otro lado, como O_2O_3 y BC son paralelas, entonces $PX = DK$.

Como $O_3P + PX = CD + DK$, entonces $O_3X = CK$, y al ser K el punto medio de BC, tenemos que X es el punto medio O_2O_3, es decir, XD es mediatriz y pasa por H. Siguiendo la misma idea podemos demostrar que por Y y Z pasan las mediatrices de los lados O_3O_1 y O_1O_2, respectivamente, las cuales se intersecan en H, por lo tanto, H es el círcuncentro del $\triangle O_1O_2O_3$.

Otra solución. Probemos primero el siguiente resultado: si para dos circunferencias que se intersecan en dos puntos A y B distintos, hay dos ángulos inscritos iguales (en semiplanos distintos) que abrazan la cuerda común AB, entonces las circunferencias tienen el mismo radio.



Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las circunferencias mencionadas con centros O_1 y O_2, respectivamente. Sean R y S puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que $\measuredangle BRA = \measuredangle ASB = \alpha$. Al ser ángulos inscritos miden la mitad del ángulo central que abraza el mismo arco, es decir, $\measuredangle BO_1A = 2\alpha = \measuredangle AO_2B$. Como $\triangle AO_1B$ y $\triangle AO_2B$ son isósceles, entonces $\measuredangle ABO_1 = \measuredangle O_1AB = \measuredangle BAO_2 = \measuredangle O_2BA$. Luego, por el criterio LAL, $\triangle AO_1B$ y $\triangle AO_2B$ son congruentes, por lo que sus radios son iguales.

Ahora, regresando al problema principal, sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ las circunferencias de centros O_1, O_2 y O_3, respectivamente. Sean F, D y E los pies de las alturas sobre los lados AB, BC y AC, respectivamente. Notemos que $ABDE$ es cíclico, ya que $\measuredangle AEH = 90^\circ = \measuredangle ADB$; por lo tanto, $\measuredangle DAE = \measuredangle DBE$, pues son ángulos inscritos en $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que comparten el mismo arco. Por el resultado que se demostró anteriormente tenemos que $HO_1 = O_2H$. Notemos que $BCEF$ es cíclico, por lo que $\measuredangle ABH = \measuredangle HCA$. Al usar nuevamente el el resultado anterior tenemos que $O_3H = O_2H = O_1H$, por lo que H es el circuncentro de $\triangle O_1O_2O_3$.

Tenemos que $\measuredangle BFH = 90^\circ = \measuredangle CEH$ y $\measuredangle EHB = \measuredangle EHC$ al ser opuestos por el vértice. Con el criterio AA tenemos que $\triangle BFH$ y $\triangle ECH$ son semejantes, por lo que $\measuredangle FBT = \measuredangle ECH$. Como $\measuredangle ABE = \measuredangle FBE$ está inscrito en $\mathcal{C}_3$, entonces $\measuredangle AO_3H = 2\measuredangle ABE$. De manera análoga podemos probar que $\measuredangle ECH = \measuredangle ACH$ y $\measuredangle AO_2H = \measuredangle 2ACH$; así, $\measuredangle AO_3H = \measuredangle AO_2H$. Al ser AO_2 y HO_2 radios tenemos que el $\triangle AO_2H$ es isósceles, de igual forma que $\triangle AO_3H$ es isósceles. Al tener $\measuredangle AO_3H = \measuredangle AO_2H$ podemos ver que $\measuredangle AHO_2 = \measuredangle O_3AH$, por lo que O_3A y HO_2 son paralelas, lo cual implica que AO_2 y O_3H son paralelas. Con el mismo razonamiento podemos demostrar que O_2C es paralela a HO_1; O_3H es paralela a BO_1 y HO_2 es paralela a O_1C. Por lo tanto, $\measuredangle O_2HO_1 = \measuredangle AO_3B$. Además, como $O_3A = HO_2$ y $O_3B = HO_1$, por el criterio LAL tenemos que $\triangle O_1HO_2$ es congruente a $\triangle BO_3A$, lo cual implica que $AB = O_1O_2$. De la misma manera podemos demostrar que $BC = O_2O_3$ y $AC = O_1O_3$. Luego, por el criterio LLL concluimos que $\triangle ABC$ es congruente a $\triangle O_1O_2O_3$.

Solución del problema 29. Sean A y B dos puntos separados a distancia máxima d, con $d \leq 1$. Trazemos las circunferencias C_1, C_2 con centro en A y B, respectivamente, y radios d. Entonces, el conjunto de puntos que considera el problema debe encontrarse en la intersección de ambas circunferencias. En caso contrario, la distancia entre cualesquiera de dichos puntos y A o B sería mayor a d, lo que contradice las condiciones del problema.

Sea C el punto de intersección de las circunferencias. Luego, $\triangle ABC$ es equilátero, pues $AC = AB = BC = d$. Sea D el pie de la altura trazada desde C; por lo que construimos una circunferencia con centro en D y radio $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. Dicha circunferencia intersecta a C_1 y C_2 y, además, contiene a la intersección de éstas. Mas como $d \leq 1$, se tiene que $\frac{\sqrt{3}}{2}d \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que se puede encerrar el conjunto de puntos buscados en una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Otra solución. Pensemos que los puntos se encuentran en un plano cartesiano para tener de referencia a los ejes x y y en las construcciones.

Tomemos el punto que se encuentre más a la izquierda de los demás y tracemos una recta paralela al eje y, y de manera análoga para los puntos que están más arriba, abajo y derecha. Llamemos A, B, C y D las intersecciones de estas rectas. Notemos que $ABCD$ es un rectángulo con AB paralelo a CD y AD paralelo a BC, por lo que todos los puntos están contenidos en este rectángulo.

Demostraremos que la longitud de los lados de este rectángulo es a lo más 1. Denotemos como P_1 y P_2 los puntos que determinan dos lados opuestos del rectángulo.

1. Si la recta que pasa por P_1 y P_2 es paralela a uno de los ejes, entonces, como la distancia entre P_1 y P_2 es menor o igual a 1, la longitud de los dos lados del rectángulo paralelos a dicha recta también lo será.

2. Si la recta que pasa por P_1 y P_2 no es paralela a uno de los ejes, entonces, sin perdida de generalidad, podemos suponer que P_1 y P_2 están sobre AB y DC, respectivamente; y que P es el punto en DC, tal que P_1P es perpendicular a DC. Así, $\triangle P_1PP_2$ es un triángulo rectángulo, donde P_1P_2 es la hipotenusa y, como la distancia entre estos puntos es menor o igual que 1, se sigue que $P_1P = AD = BC$ mide menos de 1.

3. Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que los puntos P_1 y P_2 coinciden con B y D, respectivamente. Entonces, $\triangle P_1P_2C$ es un triángulo rectángulo con P_1P_2 como hipotenusa, en consecuencia, la longitud de sus lados, $P_1C = BC$ y $P_2C = DC$, es menor que 1.

Así, el rectángulo $ABCD$ tiene lados menores o iguales a 1, en consecuencia, puede ser encerrado en una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (el rectángulo más grande que podemos tener es el cuadrado de lado 1, cuya diagonal mide $\sqrt{2}$) con centro en la intersección de las diagonales. Sin embargo, si uno de los puntos se encuentra en la esquina del rectángulo, la circunferencia de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pasaría por ahí y no estaríamos encerrando todos los puntos. De esta forma, si pedimos que el radio de la circunferencia sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$, se satisfacen las condiciones del problema.

Solución del problema 30. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b < c$ y sea $d = \mathrm{mcd}(ab+1, ac+1, bc+1)$. Demostraremos el resultado por contradicción, es decir, supongamos que:

$$d > \frac{a+b+c}{3}.$$

Como $\mathrm{mcd}(a, ab+1) = \mathrm{mcd}(c, ac+1) = \mathrm{mcd}(b, bc+1) = 1$ y d divide a $ab+1$, $ac+1$ y a $bc+1$, entonces $\mathrm{mcd}(a,d) = \mathrm{mcd}(b,d) = \mathrm{mcd}(c,d) = 1$. También tenemos que d divide a $(bc+1)-(ab+1) = bc-ab = b(c-a)$, y como $\mathrm{mcd}(b,d) = 1$, se sigue que d divide a $c-a$. De manera análoga se puede ver que divide a $c-b$ y a $b-a$.

Sea $c-a = dk$, con $k \geq 1$. Entonces tenemos los siguientes casos:

- Si $k = 1$, entonces $d = c - a$. Como d divide a $c - b > 0$ entonces $d \leq c - b$; es decir, $d = c - a \leq c - b$: En consecuencia $a \geq b$, lo cual es una contradicción.
- Si $k = 2$, entonces $c - a = 2d$. Tenemos que $d = \frac{c-a}{2} > \frac{a+b+c}{3}$, esto implica que $c > 5a + 2b$; y como $d|b - a$ y $b - a > 0$, entonces $d \leq b - a$, es decir, $d + a \leq b$. Luego, $c + 6a = 2d + 7a = 2d + 2a + 5a \leq 2b + 5a < c$, entonces $a < 0$, lo cual es una contradicción.
- Si $k \geq 3$, se tiene que $c - a \geq 3d$. Luego, $\frac{c-a}{3} \geq d > \frac{a+b+c}{3}$, de esta menera, $c - a > a + b + c$, lo que implica que $-a > a + b$, lo cual es una contradicción.

De lo anterior concluimos que:

$$\operatorname{mcd}(ab + 1, ac + 1, bc + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Otra solución. Sea d como en la solución anterior. Entonces se tiene que $ab + 1 \equiv bc + 1 \equiv ca + 1 \equiv 0 \pmod{d}$ o, equivalentemente, $ab \equiv bc \equiv ca \equiv 1 \pmod{d}$. De aquí que a, b y c son primos relativos con d, es decir,

$$a \equiv b \equiv c \equiv r \pmod{d} \text{ con } r \in \mathbb{Z}_d \setminus \{0\}.$$

Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned} a &= dp_1 + r, \\ b &= dp_2 + r, \\ c &= dp_3 + r, \end{aligned}$$

con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Como a, b y c son distintos entre sí, entonces p_1, p_2 y p_3 lo son; por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p_1 < p_2 < p_3$; y como son enteros no negativos, entonces $p_1 + 1 \leq p_2,\ p_2 + 1 \leq p_3$, es decir,

$$p_1 + 2 \leq p_2 + 1 \leq p_3.$$

De aquí que $p_3 + p_2 + p_1 \geq (p_1 + 2) + (p_1 + 1) + p_1 = 3p_1 + 3$, y como p_1 es no negativo, entonces $p_1 + p_2 + p_3 \geq 3$. Sustituyendo los valores de p_1, p_2 y p_3 en esta última desigualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3 &\leq p_1 + p_2 + p_3 \\ &= \frac{a - r}{d} + \frac{b - r + (d)}{+} \frac{c - r}{d} \\ &= \frac{a + b + c - 3r}{d} \\ &\leq \frac{a + b + c}{d}. \end{aligned}$$

De ahí concluimos que:

$$d = \operatorname{mcd}(ab + 1, bc + 1, ca + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Solución del problema 31. Si se usa la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética para los números a, b y c, obtenemos que $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$. Así, $a + b + c \geq 3$. Si aplicamos la misma desigualdad a los números ab, bc y ca, tenemos que $\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1$, lo cual implica que $ab + bc + ca \geq 3$. Por otro lado,

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} = \frac{ca + a + ab + b + bc + c}{(a+1)(b+1)(c+1)},$$

el cual será mayor o igual que $\frac{3}{4}$ si y sólo si

$$4ca + 4a + 4ab + 4vb + 4bc + 4c \geq 3(abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1),$$

es decir,

$$ab + bc + ca + a + b + c \geq 3abc + 3 = 3 + 3.$$

Esta última condición es cierta, pues ya habíamos probado que $a+b+c \geq 3$ y $ab + bc + ca \geq 3$; mas la igualdad se tiene si y sólo si $a = b = c$ y $ab = bc = ca$, es decir, si $1 = abc = a^3$ o, equivalentemente, $a = b = c = 1$.

Otra solución. Sabemos que $abc = 1$, entonces $abc+1-2 = 0$; y si sumamos $ca + a + ab + b + bc + c$ en ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned} ca + a + ab + b + bc + c &= abc + ca + a + ab + b + bc + c + 1 - 2 \\ &= ab(c+1) + a(c+1) + b(c+1) + (c+1) - 2 \\ &= (a+1)(b+1)(c+1) - 2. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} &= \frac{ca + a + ab + b + bc + c}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= 1 - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}. \end{aligned}$$

Si aplicamos la Desigualdad Media Geométrica-Media Aritmética a las parejas de números $(a, 1)$, $(b, 1)$ y $(c, 1)$, obtenemos que, respectivamente, $a + 1 \geq 2\sqrt{a}$, $b + 1 \geq 2\sqrt{b}$ y $c + 1 \geq 2\sqrt{c}$, por lo que:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (2\sqrt{a})(2\sqrt{b})(2\sqrt{c}) = 8\sqrt{abc} = 8.$$

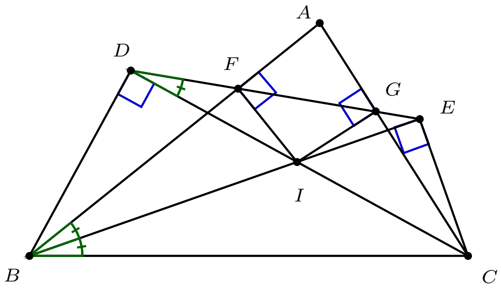
De allí que:

$$1 - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4},$$

es decir,

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Solución del problema 32. Sea I el incentro de $\triangle ABC$. Como tenemos que $\measuredangle BDC = \measuredangle BEC = 90°$, entonces $BCED$ es cíclico, donde $\measuredangle CDE = \measuredangle CBE$. Por otro lado, al ser $\measuredangle BDI = \measuredangle BFI = 90°$, $BIFD$ es cíclico, por lo que $\measuredangle IBF = \measuredangle IDF$.



Al ser BE bisectriz de $\measuredangle ABC$ tenemos que:

$$\measuredangle CDE = \measuredangle CBE = \measuredangle IBF = \measuredangle IDF,$$

por lo que D, F y E son colineales. De manera semejante podemos demostrar que D, G y E son colineales, lo cual concluye la demostración.

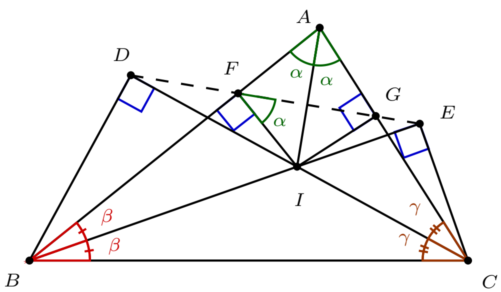
Observemos que los puntos D y E pueden quedar uno de ellos o ambos dentro de $\triangle ABC$. La solución a estos casos es semejante.

Otra solución. Sea I el incentro del $\triangle ABC$. Consideremos que:

$$\begin{aligned}\measuredangle BAI &= \measuredangle IAC = \alpha,\\ \measuredangle CBI &= \measuredangle IBA = \beta,\\ \measuredangle ACI &= \measuredangle ICB = \gamma.\end{aligned}$$

De esta forma, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, en consecuencia, $\beta + \gamma = 90° - \alpha$.

Como tenemos que $\measuredangle AFI = \measuredangle AGI = 90°$, entonces $AFIG$ es cíclico, donde $\measuredangle IFG = \measuredangle IAG = \alpha$.



Al ser $\measuredangle BDI = \measuredangle BFI = 90°$ tenemos que $BIFD$ es cíclico, donde $\measuredangle DFB = \measuredangle DIB$. Este último ángulo es exterior de $\triangle BIC$ en I, por lo tanto,

$$\measuredangle DFB = \measuredangle DIB = \beta + \gamma.$$

Finalmente, llegamos a que:

$$\measuredangle AFG = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma = \measuredangle DFB,$$

de lo cual concluimos que D, F y G son colineales. De manera semejante podemos demostrar que F, G y E son colineales.

Solución del problema 33. Observemos que si restamos 2 a la igualdad que satisfacen los números p, q y n obtenemos que:

$$\frac{p-q+1}{q(p+1)} = \frac{-4}{n+2}$$

o, equivalentemente,

$$(q-p-1)(n+2) = 4q(p+1).$$

A partir de esta igualdad, y dado que n, p y q son números positivos, se sigue que $q > p+1$, es decir, q no divide a $p+1$. Luego, $(q, q-p-1) = (q, p+1) = 1$ y $(p+1, q-p-1) = (p+1, q) = 1$; es decir, $q-p-1$ y $q(p+1)$ son primos relativos.

Por lo tanto, de la última igualdad entre n, p y q se sigue que $q-p-1$ debe dividir a 4, es decir, debe ser igual a 1, 2, o 4. De lo anterior tenemos que:

$$q - p = 2, 3, \text{ o bien, } 5;$$

y como en los tres casos es posible hallar una pareja de números primos cuya diferencia sea alguno de estos valores, hemos encontrado la respuesta al problema.

Otra solución. Como $2n < 2n+4$ y $\frac{p}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}$, entonces la condición dada en el problema satisface lo siguiente:

$$2 > \frac{2n}{n+2} = \frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = 1 - \frac{1}{p+1} + 1 + \frac{1}{q},$$

de lo cual,

$$\frac{1}{p+1} > \frac{1}{q}.$$

A partir de esta última desigualdad tenemos que $p+1 < q$, es decir, q no divide a $p+1$; y como tampoco divide a $q+1$, tenemos que si $r = pq + (p+1)(q+1)$, entonces q no divide a r. Así, en la igualdad original tenemos que:

$$\frac{2n}{n+2} = \frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2pq+q+p+1}{q(p+1)} = \frac{r}{q(p+1)},$$

es decir,

$$(n+2)r = 2nq(p+1).$$

Como q divide a $2nq(p+1)$, entonces de la igualdad anterior, ya que q no divide a r, se sigue que q divide a $n+2$. Es decir, existe un entero positivo

k, tal que $n+2=qk$; por lo tanto, $2n=2qk-4$. Podemos reescribir nuestra igualdad original como:

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2qk-4}{qk}.$$

De allí obtenemos que:

$$k(q-p-1)=4(p+1).$$

Sabemos que $(q-p-1,p+1)=(q-(p+1),p+1)=1$, por lo que $q-p-1$ divide a 4. La conclusión se sigue como en la primera solución.

Solución del problema 34. Tomemos que $x=y=0$ en la segunda condición; y como $f(0)=1$, tenemos que:

$$f(1)=f(0\cdot 0+1)=f(0)\cdot f(0)-f(0)-0+2=1\cdot 1-1+2=2.$$

Tomemos ahora que $y=1$ y $x\neq 0$; entonces,

$$f(x+1)=f(x\cdot 1+1)=f(x)\cdot f(1)-f(1)-x+2=2f(x)-x.$$

Finalmente, tomemos que $y=x$ y $x=1$ para obtener que:

$$f(x+1)=f(1\cdot x+1)=f(1)\cdot f(x)-f(x)-1+2=2f(x)-f(x)+1=f(x)+1.$$

Dado que f es función, no puede tomar dos valores diferentes al ser evaluada en un mismo número, por lo que al igualar los resultados obtenidos para $f(x+1)$ tenemos que $2f(x)-x=f(x)+1$, por lo tanto,

$$f(x)=x+1.$$

Otra solución. Al igual que en la solución anterior, encontramos que $f(1)=2$. Tomemos ahora que $x\neq 0$ y $y=0$, entonces

$$f(1)=f(x\cdot 0+1)=f(x)\cdot f(0)-f(0)-x+2=f(x)\cdot 1-1-x+2=f(x)-x+1.$$

Dado que f es función, no puede tener dos imágenes para un mismo valor de su dominio; así, al igualar los resultados obtenidos para $f(1)$ tenemos que $2=f(1)=f(x)-x+1$, en consecuencia,

$$f(x)=x+1.$$

Otra solución. Como en la primera solución, encontramos que $f(1)=2$. Tomamos que $x=y=1$ y obtenemos que:

$$f(2)=f(1\cdot 1+1)=f(1)\cdot f(1)-f(1)-1+2=4-2-1+2=3.$$

Análogamente tenemos que $f(3)=f(2\cdot 1+1)=4$ y $f(4)=f(3\cdot 1+1)=5$. A partir de estos valores y el valor para $f(0)=1$ proponemos que $f(x)=x+1$.

Verifiquemos nuestra propuesta. Sabemos que la función debe cumplir con la segunda condición dada por el problema. Es decir:

$$\begin{aligned} f(xy+1) &= f(x)f(y) - f(y) - x + 2 \\ &= (x+1)(y+1) - (y+1) - x + 2 \\ &= (xy + x + y + 1) - (y+1) - x + 2 \\ &= (xy+1) + 1. \end{aligned}$$

Por lo que nuestra propuesta es válida.

Solución del problema 35. Si $a_i = 11$ y $b_i \neq 11$, entonces existe un $j \neq i$, tal que $b_j = 11$, por lo que $a_i b_i$ y $a_j b_j$ tienen residuo cero al dividirse entre 11.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 = 11 = b_1$; y para ver que existe al menos otro número $a_s b_s$ con $s = 2, 3, \ldots, 11$, tal que $a_s b_s \equiv 0 \pmod{11}$, procedemos por contradicción. Supongamos que $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ..., $a_{11} b_{11}$ tienen residuo distinto a cero cuando se divididen entre 11, es decir, sus residuos se encuentran en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots a_{11} b_{11} &\equiv 10! \pmod{11} \\ &\equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)(-5)(-4)(-3)(-2)(-1) \pmod{11} \\ &= (120)(-120) \pmod{11} \\ &\equiv (-1)(1) \pmod{11} \\ &= -1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como cada uno de los números a_s, b_s para $s = 2, 3, \ldots, 11$ se encuentra en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tenemos que:

$$a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots a_{11} b_{11} \equiv (10!)^2 \equiv 1 \pmod{11},$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, al menos dos de los números $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_{11} b_{11}$ tienen el mismo residuo (cero) al ser divididos entre 11.

Solución del problema 36. Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo de $\triangle ABC$. Probaremos que las rectas DX, EY y FZ pasan por un punto fijo de IO.

Recordemos que las correspondientes bisectrices interiores y exteriores se intersecan en los excentros, además de que son perpendiculares en los vértices del triángulo. De esta manera, $\triangle I_c B I_b$ $\triangle I_c C I_b$ son triángulos rectángulos. Además, al ser X punto medio de $I_b I_c$ tenemos que $BX = \frac{1}{2} I_b I_c = CX$, por lo que $\triangle XBC$ es isósceles y la mediatriz de BC pasa por X. Sea M el punto medio de BC y N la intersección de MX con $\mathcal{C}$, diferente de X.

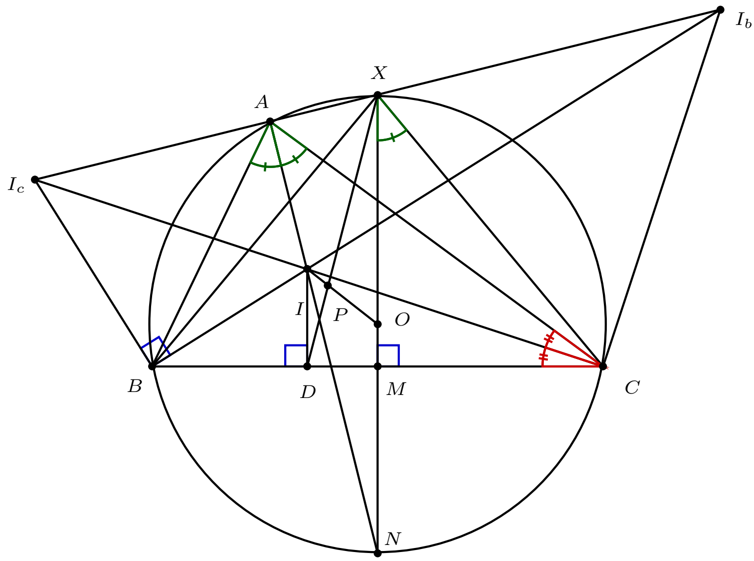
Sean $\alpha = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$, $\beta = \frac{1}{2}\measuredangle CBA$ y $\gamma = \frac{1}{2}\measuredangle ACB$. Tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, por lo tanto, $\measuredangle ABI_c = \alpha + \gamma$. Como $\measuredangle BAI_c = 90^\circ - \alpha$, y al ser $\triangle XBI_c$ isósceles, llegamos a que $\measuredangle I_c BX = \measuredangle AI_c B = 90^\circ - \gamma$. Luego, como $\measuredangle I_c BM = 90^\circ + \beta$, entonces:

$$\measuredangle XBM = \measuredangle I_c BM - \measuredangle I_c BX = (90^\circ + \beta) - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \alpha.$$

En consecuencia,

$$\measuredangle CXN = \measuredangle BXM = \alpha = \measuredangle NAC,$$

lo cual implica que X pertenece a $\mathcal{C}$.



Si P es la intersección de IO con DX, entonces $\triangle DIP$ y $\triangle XOP$ son semejantes, puesto que ID y OX son paralelas. Por lo tanto,

$$\frac{IP}{PO} = \frac{ID}{OX} = \frac{r}{R},$$

donde r es el inradio y R es el circunradio de $\triangle ABC$. Análogamente EY y FZ dividirán al segmento IO en la misma razón, por lo que todas estas rectas pasarán por P.

Solución del problema 37. Observemos que dos enteros cualesquiera k y $k+10$, tienen el mismo dígito de las unidades d. Si tales números fueran fuertes, además de que $d \neq 0$, entonces d divide a k y d divide a $k+10$, es decir, d debe ser $1, 2$, o bien, 5.

Supongamos que $L = \{N, N+1, N+2, N+3, \ldots, N+9, N+10, N+11, N+12, N+13\}$ es un conjunto de 14 números fuertes consecutivos; entonces como los números $N, N+1, N+2, N+3$ y $N+10, (N+1)+10, (N+2)+10$ y $(N+3)+10$ están en L, hay cuatro dígitos consecutivos en la cifra de las unidades, repitiéndose en el conjunto. De acuerdo con la observación inicial esto es una contradicción ya que los únicos dígitos consecutivos que podrían repetirse son $0, 1$ y 2. Así, hemos probado que no puede haber más de 13 números fuertes consecutivos.

Para hallar una lista notemos que no existe un dígito distinto de uno que divida a dos números consecutivos; así, los dígitos de las decenas, centenas, unidades de millar, etc., de números fuertes consecutivos deben coincidir y ser iguales a uno o cero.

Por otra parte, si N es el menor número que podemos tener en una lista de 13 números fuertes consecutivos, entonces N será múltiplo de 10. Si no fuera así, dado que $N + 10$ estará en el grupo de los 13 números fuertes consecutivos, entonces el dígito de sus unidades d es $1, 2$ o 5. Para el caso en que $d = 1$, tenemos que el dígito de las unidades de los números $N + 2$ y $(N + 2) + 10 = N + 12$ es 3; y como ambos números pertenecen a la lista de 13 números fuertes, tenemos una contradicción con la observación dada al inicio.

Un argumento análogo prueba que $d \neq 2$ y $d \neq 5$. Así, el número $N + 8$ tendrá $d = 8$; y por los criterios de divisibilidad y la nota del párrafo anterior, si sus últimos tres dígitos son 008, entonces es fuerte y su consecutivo tiene posibilidades de serlo. Ahora, el número $N+9$ terminará en 009, y si el número de dígitos iguales a 1 que le preceden es múltiplo de 9, garantizamos que $N+9$ es fuerte. Finalmente, observemos que si tomamos $N = 11101110111000$ se cumplen las condiciones para que $N + 8$ y $N + 9$ sean fuertes; dado que 7 divide a N, entonces se tendrá que $N + 7$ también lo es. Por lo tanto, una lista de 13 números fuertes es:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
N & = & 11101110111000, & N+1 & = & 11101110111001,\\
N+2 & = & 11101110111002, & N+3 & = & 11101110111003,\\
N+4 & = & 11101110111004, & N+5 & = & 11101110111005,\\
N+6 & = & 11101110111006, & N+7 & = & 11101110111007,\\
N+8 & = & 11101110111008, & N+9 & = & 11101110111009,\\
N+10 & = & 11101110111010, & N+11 & = & 11101110111011,\\
N+12 & = & 111011101110012. & & &
\end{array}$$

Solución del problema 38. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}\}$. Consideremos t_1 un elemento de S; a un elemento cualquiera, fijo, de A y construyamos $A_1 = \{a+t_1\}$. Como queremos que A_2 sea disjunto de A_1, debemos garantizar que $t_1 + a \neq t_2 + a_i$, donde $1 \leq i \leq 101$, es decir, la diferencia $t_1 - t_2$ no debe ser igual a ninguna de las posibles diferencias positivas que surgen al tomar dos elementos de A. Como el número total de éstas es $(101)(100) = 10100$ y además t_2 debe ser diferente de t_1, entonces hay 10101 elementos de S que no podemos considerar para elegir t_2.

Una vez seleccionado t_2, construimos $A_2 = \{a + t_2\}$ y procedemos de la misma forma que antes para determinar el número de posibles elementos de S que no podrían considerarse para elegir a t_3. Esto es, 10101 valores para evitar que $t_1 + a = t_2 + a_i$ y 10101 valores para evitar que $t_2 + a = t_3 + a_i$, es decir, un total de $2(10101)$ valores.

Al continuar de esta manera se tiene que para elegir t_k con $1 < k \leq 100$ no se pueden usar $(k - 1)(10101)$ elementos de S. Es decir, para poder elegir t_{100} debemos descartar $(100 - 1)(10101) = 999999$ elementos de S; y como sabemos que S tiene un total de 1000000 de elementos, entonces existe un único elemento de S que se puede asignar a t_{100}. De esta manera, concluimos que sí es posible encontrar números $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{100}$ que pertenecen a S, tales que cumplen con las condiciones del problema.

Solución del problema 39. Sea S la suma que queremos maximizar. Notemos que para una pareja (x, y) se tiene que:

$$(x+y)^4 \leq (x+y)^4 + (x-y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4),$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si $x = y$. Al aplicarle la desigualdad anterior a cada uno de los sumandos de S tenemos que:

$$\begin{aligned} S &\leq 2[3a^4 + 3b^4 + 3c^4 + 3d^4 + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)] \\ &= 6[a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)] \\ &= 6[a^2 + b^2 + c^2 + d^2]^2 \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

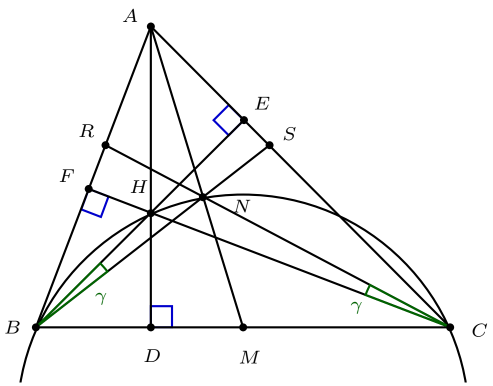
Por lo tanto, el valor máximo de S es 6. La igualdad se alcanza cuando $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, o bien, cuando $a = b = c = d = -\frac{1}{2}$, es decir, cuando $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Solución del problema 40. Sean D, E, F los pies de las alturas sobre BC, AC y AB, respectivamente. Notemos que los cuadriláteros $ABDE$, $FBCE$ y $DCAF$ son cíclicos, ya que:

$$\measuredangle BDA = \measuredangle BEA = \measuredangle BFC = \measuredangle BEC = \measuredangle ADC = \measuredangle AFC = 90^\circ,$$

de lo cual obtenemos que $\measuredangle BAD = \measuredangle BCF$, $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ABE = \measuredangle ACF$.

Sean $\measuredangle BAD = \beta$, $\measuredangle CAD = \alpha$ y $\measuredangle ABE = \theta$. Si consideramos la suma de ángulos interiores de $\triangle ABE$, tenemos que $\alpha + \theta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, por lo tanto, $\alpha + \theta + \beta = 90^\circ$.



Sean R y S las intersecciones de CN con AB y BN con AC, respectivamente. Al considerar que AM, BS y CR concurren en N, por el Teorema de Ceva, tenemos que:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1.$$

Como $BM = MC$, entonces:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{CS}{SA} = 1,$$

por lo tanto,

$$\frac{AR}{RB} = \frac{SA}{CS}.$$

Por el recíproco del Teorema de Thales tenemos que RS es paralela a BC.

Notemos que $\measuredangle HBN$ y $\measuredangle HCN$ son iguales, ya que son ángulos inscritos que abrazan el mismo arco, por lo que $\measuredangle HBN = \measuredangle HCN = \gamma$. Además, $\measuredangle SBC = \alpha - \gamma$ y $\measuredangle RCB = \beta + \gamma$.

Como RS es paralela a BC, entonces $\measuredangle SBC = \measuredangle BSR = \alpha - \gamma$ y $\measuredangle RCB = \measuredangle CSR = \beta + \alpha$, al ser ángulos alternos internos. Además, por ser ángulos correspondientes tenemos que $\measuredangle ABC = \measuredangle ARS = \alpha + \theta$ y $\measuredangle BCA = \measuredangle RSA = \beta + \theta$.

Tenemos también que:

$$\measuredangle ARN + \measuredangle NSA = \alpha + \beta\theta + \alpha + \beta + \theta - \gamma = 2(\alpha + \beta + \theta) = 180^\circ.$$

Es decir, los ángulos son suplementarios, por lo que el cuadrilátero $ARNS$ es cíclico. Así, $\measuredangle RNA = \measuredangle RSA = \beta + \theta$.

Al ser $\measuredangle RNB$ ángulo exterior de $\triangle RNS$ tenemos que $\measuredangle RNB = \measuredangle RSN + \measuredangle SRN = \beta + \gamma + \alpha - \gamma = \alpha + \beta$.

Por otro lado, tenemos que $\measuredangle BNH$ es un ángulo inscrito y abraza el arco BH al igual que el ángulo $\measuredangle BCH$, entonces $\measuredangle BNH = \beta$. Además, como $\measuredangle RNB = \measuredangle BNH + \measuredangle HNR = \alpha + \beta$, obtenemos que $\measuredangle HNR = \alpha$. Por lo tanto,

$$\measuredangle ANH = \measuredangle HNR + \measuredangle ANR = \alpha + \beta + \theta = 90^\circ.$$

Solución del problema 41. Verifiquemos que, por contradicción, para que se cumpla la condición del problema alguno de los números primos p, q, o bien, r debe ser igual a 2. Supongamos que ninguno de ellos es 2, entonces los tres números deben ser primos impares, digamos $p = 2a + 1$, $q = 2b + 1$ y $r = 2c + 1$ para algunos enteros positivos a, b y c. Por lo que, al sustituir en la condición del problema, tenemos que:

$$12k + 1 = pq + qr + rp = 4(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 3.$$

Lo anterior implica que $12k + 1 \equiv 3 \pmod{4}$, lo cual es una contradicción.

Así, sin pérdida de generalidad, supondremos que $r = 2$; entonces la condición del problema se convierte en:

$$12k + 1 = 2p + 2q + pq = (p + 2)(q + 2) - 4,$$

por lo que $(p + 2)(q + 2) = 12k + 5 \equiv 2 \pmod{3}$, en consecuencia, las únicas parejas de factores que satisfacen la congruencia anterior son las que tienen residuos 1 y 2 al dividirse entre 3.

Supongamos que $p + 2 \equiv 2 \pmod{3}$ y que $q + 2 \equiv 1 \pmod{3}$. De la primera congruencia deducimos que $p \equiv 0 \pmod{3}$, es decir, que $p = 3$.

Mientras, de la segunda tenemos que $q \equiv 2 \pmod 3$. Al sustituir el valor de $p = 3$ en $(p+2)(q+2) = 12k+5$ obtenemos que $5(q+2) = 12k+5$; es decir, $5q+5 = 12k$, lo cual implica que 5 divide al número primo k, por lo que $k = 5$, en consecuencia, $q = 11$.

Por lo tanto, los números primos que satisfacen la condición son $k = 5$ y los valores de p, q y r asignados de cualquier permutación del conjunto $\{2, 3, 5\}$.

Otra solución. Al proceder como en la solución anterior, podemos considerar que, sin pérdida de generalidad, $r = 2$ y que entonces la condición que deben cumplir los números primos se convierte en $2p + 2q + pq = 12k + 1$.

Si p y q son diferentes de 3, entonces son de la forma $3n+1$, o bien, $3n+2$ para algún entero positivo n. Analicemos los posibles casos:

- Si $p = 3n+1$ y $q = 3m+1$, entonces $2p + 2q + pq \equiv 2 \pmod 3$, pero $2p + 2q + pq = 12k + 1 \equiv 1 \pmod 3$, por lo tanto hay una contradicción.

- Si $p = 3n+2$ y $q = 3m+2$, entonces $2p + 2q + pq \equiv 0 \pmod 3$, pero $2p+2q+pq = 12k+1 \equiv 1 \pmod 3$, por lo que este caso tampoco puede ser posible.

- Si $p = 3n+2$ y $q = 3m+1$, o bien, $p = 3n+1$ y $q = 3m+2$, entonces $2p+2q+pq \equiv 0 \pmod 3$. Por el caso anterior, sabemos que esto es una contradicción.

Así, al menos uno de los enteros p o bien q debe ser 3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p = 3$, entonces la igualdad que se debe cumplir se convierte en $6 + 2q + 3q = 12k + 1$, es decir, $5q + 5 = 12k$, por lo que 5 divide al número primo k y la conclusión se sigue como en la primera solución.

Solución del problema 42. Demostraremos que tener todas las lámparas encendidas es posible si y sólo si m es un múltiplo de 3, o bien, n es un múltiplo de 3. Por ejemplo, si el número de columnas es múltiplo de 3, podemos separar las columnas consecutivas en bloques de tres, y para cada uno de ellos, hacer la operación en cada fila. Al final de este proceso, todas las lámparas del tablero quedarán encendidas.

Si ni m, ni n son múltiplos de 3, enumeramos las casillas del tablero asignándole el número 1 a la casilla en la esquina inferior izquierda del tablero; el número 2 a las dos casillas que comparten un lado con la número 1; el número 3 a las tres casillas que comparten lado con la número 2, y así sucesivamente. El tablero queda entonces numerado como se muestra a continuación:

1	2	3	1
3	1	2	3
2	3	1	2
1	2	3	1

Ahora, si b y d son los residuos que dejan m y n al dividirse entre 3, tendremos los siguientes casos:

- Si $b = d = 1$, entonces el tablero tendrá la misma cantidad de casillas con el número 2 y 3, digamos k, y la cantidad de casillas con el número 1 será $k + 1$.
- Si $b = 1$, $d = 2$ o, al revés, entonces la cantidad de casillas con el número 1, o bien, el número 2 excederá en uno a la cantidad de casillas con el número 3.
- Finalmente, si $b = d = 2$, entonces el tablero tendrá la misma cantidad de casillas con el número 1 y 3, digamos k, y la cantidad de casillas con el número 2 será $k + 1$.

Así, la cantidad de casillas con el número 3 siempre es menor que la de las casillas con el número 1 o el 2.

Sabemos que en cada movimiento, independientemente de si se eligen las tres casillas consecutivas sobre las filas del tablero o las columnas, se cambia el estado de un foco en una casilla con número 1, de uno con número 2 y de otro con número 3. Es decir, después de x movimientos se hicieron x cambios en los focos de cada uno de los conjuntos de casillas con número 1, 2 y 3. Debido a que nos interesa que todos los focos queden encendidos, es necesario que cada foco haya sido parte de un número impar de operaciones, es decir, x debe tener la misma paridad que las casillas con los números 1, 2 y 3. Sin embargo, esto no es posible, pues la cantidad de casillas con el número 3 siempre es menor que la cantidad de casillas con el número 1 o el 2.

Solución del problema 43. Observemos que $a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$ puede ser reescrita como $(a^3 - 1)(b^2 - 1) = a^3p$, a partir de lo cual es claro que $a \neq 1$. Además, como $a^3 - 1$ y a^3 no pueden dividirse el uno al otro, por ser números consecutivos, se sigue que a^3 divide a $b^2 - 1$; es decir, existe un k entero positivo, tal que $b^2 - 1 = ka^3$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}(a^3 - 1)(b^2 - 1) = a^3p &\Rightarrow (a^3 - 1)ka^3 = a^3p\\ &\Rightarrow (a^3 - 1)k = p.\end{aligned}$$

Observemos que $a^3 - 1 \neq 1$, pues en caso contrario se tendría $a^3 = 2$, lo cual contradice el hecho de que a es entero. Por tanto, dado que p es primo, la igualdad $(a^3 - 1)(k) = p$ es cierta sólo si $k = 1$ y $p = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$; y como $a^2 + a + 1 > 1$ y p primo, tenemos que $a - 1 = 1$, en consecuencia, $p = (2^2 + 2 + 1) = 7$. Finalmente, a partir de $b^2 - 1 = ka^3$ obtenemos que $b^2 = (1)(2^3) + 1 = 9$, es decir,

$$a = 2 \quad \text{y} \quad b = 3,$$

los cuales son los valores que satisfacen $a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$, con $p = 7$.

Otra solución. Notemos que $a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$ puede reescribirse como $b^2(a^3 - 1) = a^3p + (a^3 - 1)$, donde se sigue que $a^3p + (a^3 - 1) \equiv 0 \pmod{(a^3 - 1)}$;

y como $a^3 - 1 \equiv 0 \pmod{(a^3-1)}$, entonces $a^3 p \equiv 0 \pmod{(a^3-1)}$. Como $a^3 - 1$ y a^3 son números consecutivos, también son primos relativos, es decir, $a^3 \not\equiv 0 \pmod{(a^3-1)}$, en consecuencia, $p \equiv 0 \pmod{(a^3-1)}$. Lo anterior es equivalente a decir que $a^3 - 1$ divide a p, y debido a que a es entero, $a^3 - 1 \neq 1$, entonces $p = a^3 - 1$. La conclusión se sigue como en la primera solución.

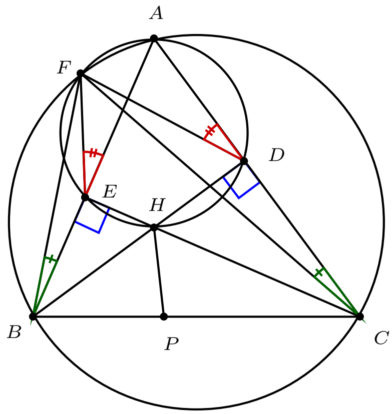
Solución del problema 44. Notemos que si m o n es impar, entonces $m^2 + mn + n^2$ es impar y su último dígito no puede ser cero. Luego, ambos números deben ser pares. Ahora, si alguno de ellos es múltiplo de 10 y el otro no, entonces $m^2 + mn + n^2$ no es múltiplo de 10. Supongamos que ninguno es múltiplo de 10, entonces m^2 y n^2 terminan en 4 o 6, y mn no termina en cero. Así, no podemos tener que uno de los cuadrados termine en 4 y el otro en 6, pues $m^2 + mn + n^2$ no terminaría en 0. Si m^2 y n^2 terminan ambos en 4 o bien, en 6, entonces mn debe terminar en 4 o 6, respectivamente, por lo que $m^2 + mn + n^2$ no es múltiplo de 10. Por lo tanto, la única posibilidad es que m y n sean múltiplos de 10; así es claro que $m^2 + mn + n^2$ es múltiplo de 100.

Otra solución. Queremos que $m^2 + mn + n^2 \equiv 0 \pmod{10}$, por lo tanto, $(m-n)(m^2 + mn + n^2) \equiv 0 \pmod{10}$ si y sólo si $m^3 - n^3 \equiv \pmod{10}$, lo que es equivalente, a su vez, a que $m^3 \equiv n^3 \pmod{10}$. Veamos la siguiente tabla de congruencias módulo 10.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Podemos ver en la tabla que si $m^3 \equiv n^3 \pmod{10}$, entonces $m \equiv n \pmod{10}$. Luego, $m^2 + mn + n^2 \equiv 3n^2 \pmod{10}$; entonces, para que $m^2 + mn + n^2 \equiv 0 \pmod{10}$ se debe cumplir que $3n^2 \equiv 0 \pmod{10}$, es decir, $n^2 \equiv 0 \pmod{10}$. Por lo tanto, $n \equiv m \equiv 0 \pmod{10}$, con lo que $m^2 + mn + n^2$ es múltiplo de 100.

Solución del problema 45. Como $\measuredangle AEH + \measuredangle HDA = 180°$, entonces H pertenece al circuncírculo de $\triangle ADE$. Por ser ángulos inscritos en dicha circunferencia, $\measuredangle FEA = \measuredangle FDA$.



Como $BCAF$ es cíclico, $\measuredangle FBA = \measuredangle FCA$. Así, por el criterio AA, $\triangle BEF$ y $\triangle CDF$ son semejantes, donde:

$$\frac{FB}{FC} = \frac{BE}{CD}.$$

Por otro lado, como $\measuredangle BEH = 90° = \measuredangle CDH$ y $\measuredangle BHE = \measuredangle CHD$, por el criterio AA, $\triangle BHE$ y $\triangle CHD$ son semejantes, lo cual implica que:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{BH}{CH}.$$

Consideremos un punto P en BC, de tal forma que HP es la bisectriz de $\measuredangle BHC$. Por el Teorema de la Bisectriz para $\triangle HBC$ tenemos que:

$$\frac{BH}{CH} = \frac{BP}{PC}.$$

De las tres igualdades encontradas se sigue que $\frac{FB}{FC} = \frac{BP}{PC}$. Por el Teorema de la Bisectriz para $\triangle FBC$, tenemos que FP es la bisectriz de $\measuredangle BFC$. De este modo, ambas bisectrices se intersecan en P.

Solución del problema 46.

1. Para probar este inciso, basta ver que no hay dos equipos con el mismo número de partidos ganados. Supongamos lo contrario, es decir, existen dos equipos V y M que ganaron k partidos cada uno. Debido a que no hay empates y que cada equipo jugó con los restantes exactamente una vez, el partido jugado entre V y M resultó con uno de los dos equipos como ganador, digamos V. Por la transitividad entre las victorias, V le ganó a los k equipos a los que les ganó M, pero entonces V tendrá al menos $k+1$ victorias, lo que contradice el hecho de que tiene las mismas victorias que M. Finalmente, el mayor número de partidos ganados por un equipo es a lo más $n-1$; y en este caso, por la transitividad en las victorias y la no posibilidad de empates, los marcadores del resto de los equipos quedarían con $n-2, n-3, n-4, \ldots, 1, 0$ partidos ganados, existiendo así un equipo que no ganó un juego.

2. Si un equipo ganó k partidos, perdió $n-1-k$, por lo que la diferencia positiva entre el número de partidos ganados y perdidos es $|n-1-2k|$ con $0 \leq k \leq n-1$. Llamemos S a la suma de las diferencias, entonces $S = \sum_{k=0}^{n-1} |n-1-2k|$. Para $n = 2016$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{2015} |2015-2k| &= \sum_{k=0}^{1007}(2015-2k) + \sum_{k=1008}^{2015}(2k-2015) \\ &= \sum_{k=0}^{1007}(2015-2k) + \sum_{r=0}^{1007}(2(r+1008)-2015) \\ &= \sum_{k=0}^{1007}[(2015-2k)+(2k+1)] = \sum_{k=0}^{1007}[2016] = 2(1008)^2. \end{aligned}$$

3. Al considerar la expresión para la suma de las diferencias definida en el inciso anterior, tenemos que $544 = \sum_{k=0}^{n-1} |n-1-2k|$. Para determinar el valor de n consideremos su paridad

   Si $n = 2m$, entonces:

$$\begin{aligned}
544 &= \sum_{k=0}^{2m-1} |2m-1-2k| = \sum_{k=0}^{m-1}(2m-1-2k) + \sum_{k=m}^{2m-1}(2k-2m+1) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}(2m-1-2k) + \sum_{r=0}^{m-1}(2(r+m)-2m+1) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}[(2m-1-2k)+(2k+1)] = \sum_{k=0}^{m-1}[2m] = 2m^2.
\end{aligned}$$

   Como $m = \sqrt{272}$ no es entero, el número n no es par.

   Si $n = 2m+1$ entonces:

$$\begin{aligned}
544 &= \sum_{k=0}^{2m} |2m-2k| = \sum_{k=0}^{m}(2m-2k) + \sum_{k=m+1}^{2m}(2k-2m) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} 2(m-k) + \sum_{r=0}^{m-1}(2(r+m+1)-2m) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}[2(m-k)+(2k+2)] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}[2m+2] = 2m(m+1).
\end{aligned}$$

   Así $m^2+m-272 = 0$, cuya solución con m positiva es $m = 16$, en consecuencia, $n = 33$.

Solución del problema 47. Supongamos que es posible hallar enteros positivos m y n que cumplen con la condición del problema. Sea 2^r la mayor potencia de 2 menor o igual que m. Como $224 = 2^5 \cdot 7$, la mayor potencia de 2 menor o igual que n debe ser 2^{r+5}. Luego, $n > 16m$. Ahora, sea 3^s la mayor potencia de 3 menor o igual que m. Entonces, la mayor potencia de 3 menor o igual que n debe ser también 3^s.

En resumen, tenemos las siguientes cadenas de desigualdades:

$$\begin{aligned}
1 < 2 < 3 < \cdots < 2^r < \cdots \leq m < 2^{r+1} < \cdots < 2^{r+5} \leq n, \\
1 < 2 < 3 < \cdots < 3^s < \cdots \leq m < 2^{r+1} < \cdots < 2^{r+5} \leq n.
\end{aligned}$$

Como $3^s < 2^{k+1}$ y 3^s es la mayor potencia de 3 menor o igual que m, tenemos que:

$$m < 3^{s+1} < 3 \cdot 2^{k+1} < 4 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+3} < n,$$

lo cual es una contradicción, pues entonces 3^s no sería la mayor potencia de 3 menor o igual que n. Por lo tanto, no existen tales enteros positivos m y n.

Solución del problema 48. Llamemos A y B a los jugadores. Luego, supongamos que A es el primero en elegir una tarjeta. La meta de cualquier jugador es obligar al contrario a escribir en el pizarrón un número primo relativo con cualquiera de los que ya están anotados.

Sabemos que si p es un número primo, entonces $mcd(p, pk) = p \neq 1$. Así, para que A tenga una estrategia ganadora debe elegir una tarjeta de la forma $(1, p)$, tal que el número de tarjetas cuyo producto es múltiplo de p sea impar. De esta manera, A tirará la última de estas tarjetas y obligaría a B a tirar una tarjeta cuyo producto sea primo relativo con p. Las tarjetas cuyo producto es múltiplo de p tienen la forma (pk, b) con $1 \leq pk < b \leq 2003$, o bien, (a, pk) con $1 \leq a < pk \leq 2003$. Veamos cuántas de estas tarjetas hay y si es posible que A lleve a cabo su estrategia.

Notemos que el total de tarjetas (a, b) que pueden formarse es $\binom{2003}{2} = (2003)(1001)$, el cual es un número impar. Además,

$$r = 2003 - \left\lfloor \frac{2003}{p} \right\rfloor$$

es el total de números no múltiplos de p entre 1 y 2003. Por tanto, el número de tarjetas que no tienen un múltiplo de p en alguna de sus entradas es igual a $\binom{r}{2}$, en consecuencia, el total de tarjetas que funcionan para la estrategia de A es:

$$(2003)(1001) - \binom{r}{2},$$

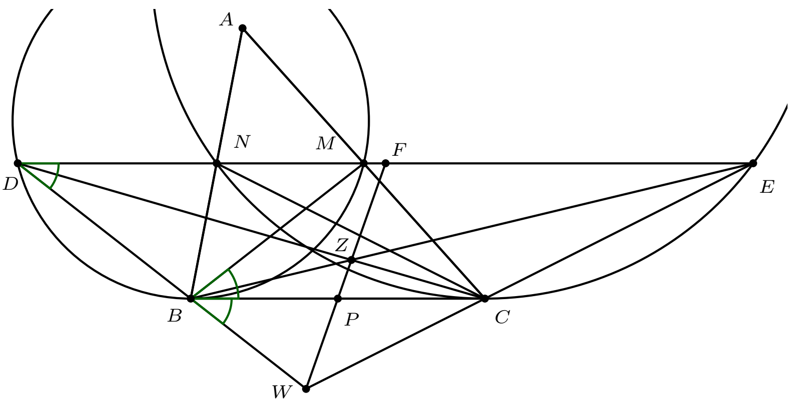
el cual será impar siempre que $\binom{r}{2}$ sea par.

Veamos que es posible que esto último ocurra. Supongamos que la tarjeta que A elige para su primer tiro es $(1, 3)$, entonces $p = 3$ y, de esta manera, $r = 2003 - \left\lfloor \frac{2003}{3} \right\rfloor = 2003 - 667 = 1336$, por lo tanto,

$$\binom{r}{2} = \binom{1336}{2} = (668)(1335) = 2(334)(1335),$$

es decir, es par.

Solución del problema 49. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ los circuncírculos de $\triangle DBM$ y $\triangle NCE$.



Como DM es paralela a BC y esta última recta es la bisectriz de $\measuredangle MBW$, entonces $\measuredangle MBC = \measuredangle MDB$, de donde BC es tangente a $\mathcal{C}_1$. Análogamente, tenemos que BC es tangente a $\mathcal{C}_2$.

Sean F y P las intersecciones de WZ con DE y BC respectivamente. Como DE y BC son paralelas, entonces por el Teorema de Thales $\frac{DB}{BW} = \frac{CE}{WC}$. Por lo tanto,

$$\frac{DB}{BW} \cdot \frac{WC}{CE} = 1.$$

Por otro lado, en $\triangle DWE$ las cevianas DC, WF y EB son concurrentes; así, por el Teorema de Ceva, tenemos que:

$$1 = \frac{DB}{BW} \cdot \frac{WC}{CE} \cdot \frac{EF}{FD} = \frac{EF}{FD},$$

De allí que $EF = FD$.

Como DE y BC son paralelas, se sigue que:

$$\triangle BWP \sim \triangle DWF,$$
$$\triangle PWC \sim \triangle FWE,$$

lo cual implica que:

$$\frac{PB}{FD} = \frac{PW}{FW} = \frac{CP}{EF}.$$

Por lo tanto, $CP = PB$.

Finalmente, al considerar que la recta BC es tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, podemos garantizar que su eje radical XY pasará por su punto medio P.

Solución del problema 50. Sea m la palabra a la cual se le realizan los cambios permitidos para producir la palabra n que se quiere. Los movimientos que se pueden realizar son 7, a saber:

$$\begin{aligned}
a &\to bc && \to cdc \to d,\\
b &\to cd && \to ded \to e,\\
c &\to de && \to efe \to f,\\
d &\to ef && \to fgf \to g,\\
e &\to fg && \to gag \to a,\\
f &\to ga && \to aba \to b,\\
g &\to ab && \to bcb \to c.
\end{aligned}$$

Por eso, cada una de las 7 letras puede ser cambiada a cualquiera de las otras 6. Consideremos la cantidad de letras que pueden tener las palabras m y n:

- Si m y n tienen igual número de letras, entonces usamos los movimientos antes descritos para que cada letra de m pueda ser transformada en la letra que se encuentre en la misma posición en la palabra n, con lo que m produce a n.

- Si m tiene menos letras que n, entonces con la regla 1 se puede aumentar en 1 tantas veces como sea necesario la cantidad de letras de m hasta igualar el número de letras de n. Por el caso anterior, se verifica que m *produce* a n.

- Finalmente, si m tiene más letras que n entonces, usando los 7 movimientos descritos es posible llevar todas las letras de m a a. A partir de aquí se siguen dos casos:

  - Si m y n tienen la misma paridad, entonces usamos la regla 2 en las últimas 3 letras de m para reducir en dos su cantidad de letras sin alterar la paridad. Este proceso se puede realizar hasta que m y n tengan el mismo número de letras, entonces proceder como en el primer caso, con lo que verificamos que m produce a n.
  - Si m y n tienen diferente paridad, entonces mediante la regla 1 se puede aumentar en 1 el número de letras de m y obtener así la misma paridad que n. Posteriormente se procede como en el subcaso anterior para llegar a que m produce a n.

En los tres casos, queda probado que en esta isla toda palabra produce cualquier otra.

4.2. Problemas de nivel extremo

Solución del problema 51. Demostraremos que lo que se quiere no es posible para k par pero sí lo es para k impar.

Coloreemos las casillas del tablero con blanco y negro, como el clásico tablero de ajedrez. Supongamos que, sin pérdida de generalidad, las cuatro casillas de las esquinas del tablero son negras. Asignemos a cada casilla los números -1 o 1 a si la casilla es negra o blanca, respectivamente. Notemos que de acuerdo a los posibles movimientos, un caballo pasa de una casilla con número a a una con número $-a$, por lo que en una tirada de dos caballos el producto de los números donde están tiene el mismo producto de los números asignados a las casillas a donde llegan después de saltar. De esta manera, el producto de los números de todas las casillas donde están todos los caballos queda invariable después de cada tirada.

Inicialmente el producto de los números de las casillas de la primera columna es -1, puesto que hay 1009 números -1 y 1008 números 1, pero en una columna k, con k par, el producto de los números de las casillas es 1, pues hay 1008 números -1 y 1009 números 1. Por lo tanto, no es posible llevar los caballos de la primera columna a la columna k, con k par.

Ahora veamos que se pueda llevar los caballos de la primera columna a la columna k, con k impar. Notemos que podemos pasar inicialmente a los caballos de la columna 1 a la columna 3. Para esto tomemos los dos caballos de la primera columna que están a la izquierda y hagamos la siguiente tirada:

A		
B		

		B
		A

Esta tirada la podemos repetir con las siguientes parejas consecutivas de caballos, hasta que al final queden tres caballos. Estos últimos tres caballos los cambiamos en dos tiradas de la siguiente manera: la primera tirada con A y B, la segunda tirada con A y C.

A		
B		
C		

C	A	B

		A
		C
		B

El proceso se repite para pasar de la columna 3 a la 5 y, en general, de la columna k a la $k+2$, con k impar.

Solución del problema 52. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto equilibrado. La condición de que el promedio de k enteros cualesquiera del conjunto equilibrado sea un entero es equivalente a que la suma de k enteros cualesquiera sea congruente con 0 módulo k.

Si $k < n$, entonces podemos tomar que $k+1$ elementos del conjunto equilibrado y formar subconjuntos de k elementos con estos $k+1$ elementos, tales que sólo difieran en un término. Como la suma de los elementos en cada uno de estos subconjuntos de k elementos es divisible entre k, entonces las sumas son congruentes entre ellas, y como sólo difieren en un término, entonces tenemos que esos términos diferentes deben ser congruentes entre sí módulo k. Como la elección de los términos diferentes puede ser arbitraria si $k < n$, entonces tenemos que $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n \pmod{k}$. Por lo anterior, podemos concluir que en un conjunto equilibrado con n elementos todos los términos deben ser congruentes módulo k para toda k con $1 < k < n$. Además, por la condición del problema, los n elementos del conjunto equilibrado deben tener una suma divisible entre n.

Tenemos que $a_1 \equiv \cdots \equiv a_n \pmod{N}$, donde $N = \text{mcm}(1, 2, \ldots, n-1)$ es el mínimo común múltiplo de los números del 1 al $n-1$. Además, como los a_1 son n enteros distintos, debemos tener que $N \cdot n < 2017$, pues como deben ser congruentes módulo N, a lo más puede haber un elemento del conjunto equilibrado por cada N números consecutivos. Notemos que el mínimo común múltiplo de los primeros k enteros es $N = 1$, 2, 6, 12, 60, 60 y 420 para $k = 1$, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, respectivamente. De ahí es fácil ver que si $n > 7$, entonces no puede haber un conjunto equilibrado con n elementos, todos ellos menores o iguales que 2017, pues deben ser congruentes módulo el mínimo común múltiplo de los enteros del 1 al $n-1$; y si n es mayor que 7, entonces $3360 = 420 \cdot 8 < N \cdot n < 2017$ (aquí se usa la propiedad de que

$\text{mcm}(\text{mcm}(r, s), t) = \text{mcm}(r, s, t)$ para garantizar que el mínimo común múltiplo de los enteros del 1 al $n - 1$ es una función no decreciente), lo cual es imposible. Por lo tanto, nuestro conjunto equilibrado debe tener a lo más 7 elementos.

Si $n = 7$, los elementos del conjunto equilibrado deben ser congruentes módulo 60, ya que 60 es el mínimo común múltiplo de los números del 1 al $7 - 1 = 6$. Por lo tanto, los números 2017, $2017 - 60$, $2017 - 120$, $2017 - 180$, $2017 - 240$, $2017 - 300$ y $2017 - 360$ forman un conjunto equilibrado, siempre y cuando su suma sea divisible entre 7, lo cual es cierto, pues la suma de esos números es:

$$7 \cdot 2017 - 60 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 7 \cdot (2017 - 180) = 7 \cdot 1837 = 12859.$$

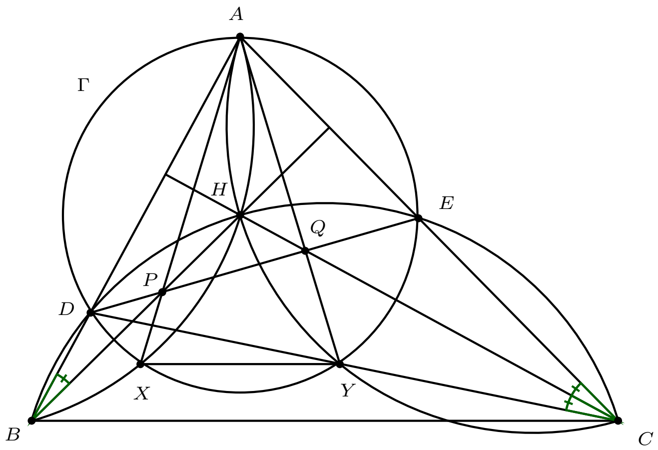
El extremo izquierdo nos muestra que la suma sí es divisible entre 7 y el extremo derecho nos dice cuál es la suma de sus elementos.

Si nuestro conjunto equilibrado tuviera menos de 7 elementos, la suma de sus elementos sería menor que $2017 \cdot 6 = 12102 < 12859$, por lo tanto, la suma máxima que puede tener un conjunto equilibrado con todos sus elementos menores o iguales que 2017 es 12859.

Solución del problema 53. Sea Γ el circuncírculo de $\triangle ADE$. Demostraremos primero que H es el centro de Γ. Para esto observemos que:

$$\measuredangle HCD = \measuredangle HBD = \measuredangle HBA = \measuredangle HCA,$$

donde la primera igualdad se cumple debido a que $BDHC$ es cíclico y la última debido a que H es el ortocentro de $\triangle ABC$. Se sigue que CH es la bisectriz de $\measuredangle ACD$ y mediatriz de AD, pues CH es perpendicular a AD. Dado que H pertenece a esta recta, se sigue que $HA = HD$. Análogamente, $HA = HE$, por lo tanto, H es el centro de Γ.



Si calculamos la potencia de P hacia los circuncículos de $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$, tenemos que:

$$PA \cdot PX = PB \cdot PH = PD \cdot PE.$$

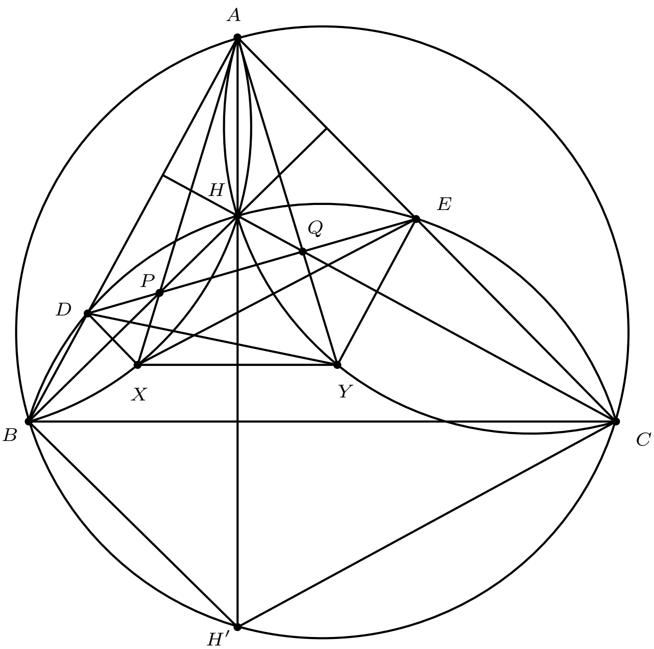
Por lo tanto, X está en Γ. De forma análoga podemos demostrar que Y está en Γ.

Observemos que $AX = AY$, pues la bisectriz de $\measuredangle XAY$ pasa por su circuncentro. Luego, AH es perpendicular a XY; y ya que AX es perpendicular a BC, tenemos que XY es paralela a BC. Notemos que:

$$\measuredangle AHP = \measuredangle AHB = 180^\circ - \measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle ADP,$$

por lo que $AHPF$ es cíclico. Se sigue que $\measuredangle HAP = \measuredangle HDP$. Análogamente, $\measuredangle HAQ = \measuredangle HEQ$. Como $\triangle HDE$ es isósceles con $HD = HE$, entonces $\measuredangle HDP = \measuredangle HEQ$. Concluimos que AH biseca a $\measuredangle PAQ$.

Otra solución. Denotemos con Γ_a, Γ_b y Γ_c a los circuncírculos de $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ y $\triangle AHB$, respectivamente. Notemos que $\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle CBH - \measuredangle HCB = 180^\circ - 90^\circ + \measuredangle C - 90^\circ + \measuredangle B = \measuredangle B + \measuredangle C$; por lo tanto, si H' es la reflexión de H sobre BC, tenemos que $\measuredangle BAC + \measuredangle CH'B = \measuredangle BAC + \measuredangle BHC = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$. Lo anterior implica que H' está sobre el circuncírculo de $\triangle ABC$. Luego, Γ_a tiene el mismo radio que el circuncírculo de $\triangle ABC$. De manera similar tenemos que Γ_b y Γ_c tienen el mismo radio que el circuncírculo de $\triangle ABC$.



Puesto que Γ_a y Γ_b son circuncírculos con el mismo radio, entonces son simétricos uno del otro respecto a su cuerda común BH. Como AE es perpendicular al eje de simetría, tenemos que A y E son reflejados respecto a BH; y como P se encuentra sobre BH, las rectas AP y EP son reflejadas una de la otra, lo cual implica que X y D también son reflejados respecto a BH. Lo anterior implica que $AX = DE$, por lo que el cuadrilátero $EADX$ es un trapecio isósceles. De manera análoga, $AY = DE$ y el cuadrilátero $ADYE$ es un trapecio isósceles. En particular, lo anterior implica que $XA = YA$.

Por otro lado, las simetrías de Γ_a con Γ_b y Γ_a con Γ_c implican que $AH = DH = XH$ y $AH = EH = YH$. Luego, tenemos que $HX = HY$. Además, como $AX = AY$, tenemos que AH es mediatriz de XY, por lo que son perpendiculares entre sí. Como AH también es perpendicular a BC, se concluye que BC y XY son paralelas.

Solución del problema 54. Si $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ es un conjunto con la propiedad T y d es un entero, tal que $B' = \{b_1 + d, b_2 + d, \dots, b_k + d\} \subset \{1, 2, \dots, 2017\}$, entonces B' también tiene la propiedad T. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los elementos de B están ordenados y cumplen que:

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_k = 2017.$$

Como b_1, b_2, $b_k = 2017$ son las longitudes de un triángulo equilátero, tenemos que $2017 = b_k < b_1 + b_2 < 2b_2$, por lo que $b_2 > \frac{2018}{2} = 1009$. De esta manera, $B \subset \{b_1, 1010, 1011, \dots, 2017\}$, lo cual garantiza que B tiene a lo más 1009 elementos.

Sean a, b, c elementos de B, con $a < b < c$. Como $a \geq 1009$ y $b \geq 1010$, tenemos que $a + b \geq 2019 > 2017 \geq c$; luego, $B = \{1009, 1010, 1011, \dots, 2017\}$ tiene la propiedad T.

Otra solución. Consideremos que el conjunto $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ tiene la propiedad T. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los elementos están ordenados como sigue:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k.$$

Como B cumple la propiedad T, tenemos que $\{a_1, a_2, a_k\}$ forma un triángulo no degenerado. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que:

$$a_k < a_1 + a_2,$$

por lo tanto,

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k < a_1 + a_2.$$

Notemos que a los $k-2$ enteros $a_3, a_4, \dots, a_k$ tenemos que acomodarlos entre los enteros a_2 y $a_1 + a_2$. De esta forma,

$$k - 2 \leq a_1 - 1;$$

en consecuencia,

$$k - 1 \leq a_1.$$

Por otro lado, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 < a_2, & & a_1 + 1 \leq a_2, & & a_1 + 1 \leq a_2, \\
a_2 < a_3, & & a_2 + 1 \leq a_3, & & a_1 + 2 \leq a_3, \\
a_3 < a_4, & \Rightarrow & a_3 + 1 \leq a_4, & \Rightarrow & a_1 + 3 \leq a_4, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k-1} < a_k. & & a_{k-1} + 1 \leq a_k. & & a_1 + (k-1) \leq a_k.
\end{array}$$

Al combinar estas desigualdades, tenemos que:

$$2(k-1) \leq a_1 + (k-1) \leq a_k \leq 2017.$$

Al despejar k de la desigualdad obtenemos $k \leq 1009$. Finalmente, como en la solución anterior, se comprueba que

$$B = \{1009, 1010, 1011, \ldots, 2017\}$$

tiene 1009 elementos y cumple la propiedad T.

Otra solución. Sean x, y, z enteros positivos, tales que $x < y < z$; luego $x < y+z$ y $y < x+z$. Por lo tanto, estos tres números conforman las longitudes de un triángulo no degenerado si y sólo si $x + y > z$.

Sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ un subconjunto de A, con $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$. Notemos que $x + y > z$ cada vez que $x \geq b_1$, $y \geq b_2$, $b_m \geq z$ y $x < y < z$. Luego B tiene la propiedad T si y sólo si b_1, b_2 y b_m conforman los lados de un triángulo no degenerado. Por lo tanto, el subconjunto $\{1009, 1010, \ldots, 2017\}$ (o bien, el subconjunto $\{1008, 1009, \ldots, 2016\}$ o $\{1008, 1010, 1011, \ldots, 2017\}$) cumple la propiedad T y contiene 1009 elementos.

Verificaremos que 1009 es la máxima cantidad de elementos que puede contener un subconjunto B que cumple la propiedad T. Supongamos que B cumple T y tiene al menos 1010 elementos, en tal caso, $b_1 \leq 1008 = 2017 - 1009$.

Sean $b_1 = 1008 - d$, con d entero no negativo, y $b_2 = b_1 + n$, con n entero positivo. Luego, si c es el mayor elemento en B, necesariamente $c < b_1 + b_2 = 2016 - 2d + n$, por lo que B a lo más tiene $c - b_2 + 2$ elementos; pero $c - b_2 + 2 < 2016 - 2d + n - 1008 + d - n + 2 = 1008 - d + 2 \leq 1010$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, 1009 es la cantidad máxima de elementos.

Otra solución. Sea B un conjunto con la propiedad T. Consideremos que m y n son sus elementos mínimo y máximo, respectivamente, y supongamos que $m \geq \frac{n+1}{2}$.

Tenemos que B es un subconjunto de $C = \{m, m+1, \ldots, n\}$. Por otro lado, notemos que C cumple con la propiedad T, ya que para cualesquiera de $x, y, z \in C$, con $x < y < z$, tenemos que $z < n + 1 \leq 2m < x + y$. Además, C tiene $n - m + 1$ elementos, y $n - m + 1 \leq n - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$.

Ahora, supongamos que $m < \frac{n+1}{2}$. Por la desigualdad del triángulo, B es un subconjunto de $\{m, n-m+1, n-m+2, \ldots, n\}$, el cual contiene $n - (n - m + 1) + 2 = m + 1$ elementos. Además, $m + 1 < \frac{n+1}{2} + 1$, por lo que B puede contener a lo más $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ elementos.

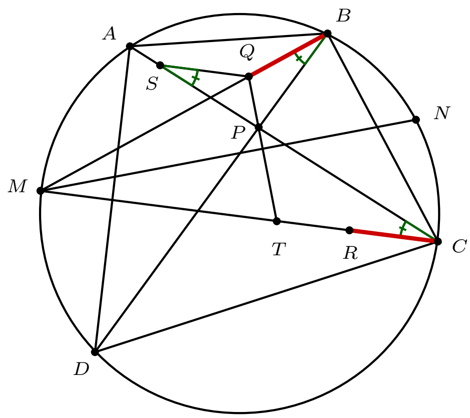
En ambos casos, $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ acota la cantidad de elementos que contiene B. De esta forma, ya que $n \leq 2017$, se sigue que B puede contener a lo más $1009 = \frac{2017+1}{2}$ elementos. Del primer caso, tenemos que $\{1009, 1010, \ldots, 2017\}$ cumple la propiedad T, por lo que el máximo es 1009.

Solución del problema 55. Sea S la intersección de PC con la paralela a MC que pasa por Q. Queremos demostrar que $QSRC$ es paralelogramo, pues S está sobre CA.

Sea T el punto donde QP corta a MC. Como MN es la bisectriz de $\measuredangle CMB$ y QT es perpendicular a ésta, entonces $\triangle QMT$ es isósceles. Luego,

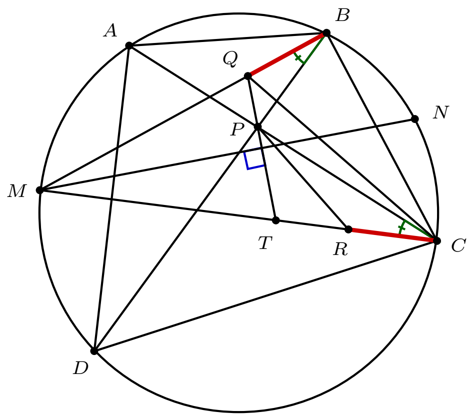
$$\measuredangle MQT + \measuredangle TQB = 180° = \measuredangle MTQ + \measuredangle QTC = \measuredangle MTQ + \measuredangle SQT,$$

pues SQ y MT son paralelas, de lo cual, $\measuredangle SQP = \measuredangle PQB$.



Por otro lado, $\measuredangle QSP = \measuredangle PCR = \measuredangle QBP$, pues M es punto medio del arco AD. Por criterio ALA, $\triangle PSQ$ y $\triangle PBQ$ son congruentes; esto implica que $QS = QB = CR$ por hipótesis. Luego, los segmentos QS y CR son iguales y las rectas que los contienen son paralelas. Así, $QSRC$ es un paralelogramo, por lo que sus diagonales se bisecan.

Otra solución. Definamos T como en la solución anterior. De nuevo tenemos que $\triangle QMT$ es isósceles, por lo tanto, $\measuredangle BQT = \measuredangle PTC$ por ser ángulos suplementarios de ángulos iguales. También $\measuredangle MBP = \measuredangle PCM$ por abrazar arcos de la misma longitud. De esto obtenemos la semejanza de $\triangle QBP$ y $\triangle TCP$.



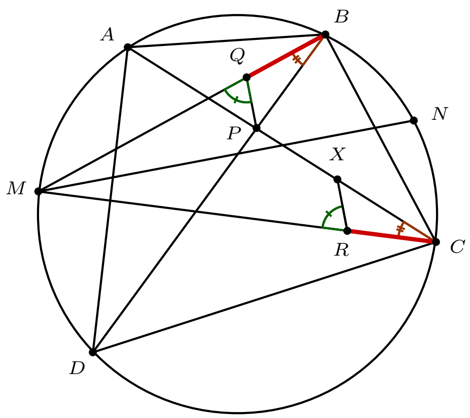
Para mostrar que CA es mediana de $\triangle QRC$ bastará demostrar que se cumple la igualdad $(\triangle QPC) = (\triangle PCR)$, ya que P está sobre CA. Esto ocurre si y sólo si:

$$\frac{QP}{PT} = \frac{(\triangle QPC)}{(\triangle PTC)} = \frac{(\triangle PCR)}{(\triangle PTC)} = \frac{CR}{TC}.$$

Pero $BQ = CR$, por lo que basta probar que $\frac{QP}{PT} = \frac{BQ}{TC}$. Esto último es cierto, pues se había demostrado en la semejanza inicial.

Otra solución. Sea X un punto sobre AC, de manera que RX sea paralela a QP, puesto que los ángulos $\measuredangle RMN$ y $\measuredangle NMQ$ son iguales por abrazar arcos iguales en la circunferencia. Además, como los segmentos RX y QP son perpendiculares a MN, tenemos que los ángulos $\measuredangle MQP$ y $\measuredangle XRM$ son iguales.

Por otro lado, $\measuredangle QBP = \measuredangle XCR$ por abrazar arcos iguales. Por el criterio ALA, $\triangle PQB$ y $\triangle XRC$ son congruentes, lo cual implica que $QP = XR$. Además, estos son segmentos paralelos, por lo tanto, $QPRX$ es un paralelogramo y sus diagonales se bisecan; luego, AC pasa por el punto medio de QR.



Solución del problema 56. Dado un acomodo con m urnas y algunos votos en ellas, sea a_k el número de votos en la k-ésima urna. Consideremos el valor de:

$$S = \sum_{k=1}^{m} 2^{a_k - 1}.$$

Demostraremos que el valor de S solamente aumenta cuando A hace una jugada en dos urnas vacías y ninguna caja tiene 2 o más votos.

Si A hace una jugada en dos urnas, ninguna vacía, B puede vaciar la mayor de ellas. Supongamos que estas urnas tenían r y t votos, respectivamente, con $r \geq t$. De esta forma, anteriormente S contenía dos sumandos de la forma 2^{r-1} y 2^{t-1}. Después de una jugada de A en estas urnas y que B tome la más grande, dichos sumandos ahora aportan, respectivamente, 0 y 2^t. Notemos que:

$$2^{r-1} + 2^{t-1} \geq 2^t,$$

pues

$$2^{r-1} \geq 2^{t-1},$$

por lo que después de hacer un cambio en dos urnas con votos y de la jugada de B, el valor de S no aumenta.

Si A hace una jugada en una urna vacía y una que no lo está, B puede vaciar la mayor de ellas. De igual forma, pasará de tener una urna con r votos y otra con 0 votos a tener una urna con 1 voto y otra con 0 votos, lo que nuevamente no aumenta el valor de S.

El único caso en el que S aumenta es cuando A hace una jugada con dos urnas vacías y no hay ninguna urna con 2 o más votos. Al hacer la jugada en dos urnas vacías, S aumenta en 2, pero tras la jugada de B, sólo S aumenta en 1 respecto a su valor anterior. Si hubiera una urna con 2 o más votos, B podría vaciarla en lugar de afectar las dos urnas donde A puso su voto. Esto hace que en lugar de aumentar en 1, S no aumente.

Finalmente, notemos que como B siempre vacía los votos en una de las urnas, a lo más A puede garantizar que $m-1$ urnas tengan 1 voto. A partir de este punto, S no aumenta, por lo que alcanza su máximo $m-1$, es decir, $S \leq m-1$. Si queremos que al final quede al menos una urna con n votos, dicho acomodo implica que $S \geq 2^{n-1}$. Por lo tanto, $m-1 \geq S \geq 2^{n-1}$, de lo cual se sigue que $m \geq 2^{n-1}+1$.

Veamos, con $2^{n-1}+1$ votos es posible obtener una urna con n votos. Inicialmente A coloca un voto en parejas de urnas vacías hasta conseguir 2^n urnas con exactamente 1 voto. Posteriormente, coloca un voto en una pareja de urnas con 1 voto, mientras que B sólo puede vaciar una de dichas urnas, obteniendo A al menos 2^{n-2} urnas con al menos 2 votos. Siguiendo de manera inductiva este proceso, A puede tener al menos 2^{n-k} urnas con al menos k votos. Cuando $n=k$, obtenemos, como se deseaba, al menos una urna con al menos n votos.

Reflexión final.

Algunas personas consideran que el pensamiento matemático se puede definir como la forma en que razonan los matemáticos, o bien, quien hace matemáticas de forma profesional. También es considerado como el hecho de pensar sobre conceptos matemáticos y sus relaciones. Además de que es un elemento inherente de las actividades en el ámbito científico.

Habría que decir también que el pensamiento matemático comprende, además de la reflexión de los conceptos matemáticos y sus relaciones, procesos mentales como: abstracción, justificación, visualización, sistematización, además de relacionar, conjeturar, validar, generalizar y describir situaciones de diversas formas. Estos procesos trascienden las tareas especializadas de los matemáticos o la comunidad científica, pues se encuentran inmersas en una amplia variedad de actividades. Por tanto, el pensamiento matemático se encuentra presente de forma permanente en la vida humana.

Inducción al pensamiento matemático pretende ser un punto de partida y de acercamiento para el desarrollo de estos procesos mentales en la comunidad educativa. Contribuye a la formación de estudiantes reflexivos, que posteriormente se convertirán en ciudadanos capaces de utilizar las matemáticas para resolver problemas y necesidades que enfrente la sociedad, realizando juicios bien fundados, coadyuvando al bienestar colectivo.

Bibliografía

ALBERRO SEMERENA, A., A. Rechtman Bulajich, C. J. Rubio Barrios y F. Ruiz Benjumeda (eds.). *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.* Año 2009, N.º 1. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2009.

——. *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.* Año 2009, N.º 3. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2009.

——. *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.* Año 2010, N.º 4. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2010.

ALBERRO SEMERENA, A., M. A. Figueroa Ibarra, C. J. Rubio Barrios y F. Ruiz Benjumeda (eds.). *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.* Año 2012, N.º 3. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2012.

——. *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.* Año 2013, N.º 1. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2013.

ALBERRO SEMERENA, A., R. Bulajich Manfrino y C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

AMADOR, M. E. *Operaciones avanzadas. Libro del adulto,* 3.ª ed. Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, México, 2017.

ANTONYAN, N., L. Medina & P. Wisnieswski. *Problemario de precálculo,* 2.ª ed. International Thomson Editores, México, 2003.

BULAJICH MANFRINO, R. y C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP avanzado. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2012.

BULAJICH MANFRINO, R. y J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

——. *Geometría. Ejercicios y problemas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

BULAJICH MANFRINO, R., J. A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado. *Desigualdades. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 4.ª ed. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

——. *Álgebra. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 3.ª ed. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2016.

COXETER, H. S. M. & S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967.

DE OTEYZA, E. *Geometría analítica y trigonometría.* Pearson Educación, Prentice Hall, México, 2001.

DÍAZ CALDERÓN, J. C., L. E. García Hernández, J. A. Gómez Ortega, C. J. Rubio Barrios y P. D. Sánchez Salazar (eds.). *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas,* Año 2016, N.º 3. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2016.

——. *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas,* Año 2016, N.º 4. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2016.

FIGUEROA IBARRA, M. A., L. E. García Hernández, C. J. Rubio Barrios y P. D. Sánchez Salazar (eds.). *Tzaloa. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas,* Año 2014, N.º 4. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2014.

FULLER, G., W. L. Wilson y H. C. Miller. *Álgebra universitaria,* 14.ª reimpr. CECSA, México, 2002.

GÓMEZ ORTEGA, J. A., R. Valdez Delgado y R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 4.ª ed. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2011.

ILLANES, A. *Principios de olimpiada. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

LEHMANN, C. H. *Álgebra.* Editorial Limusa, México, 2007.

LI, K. Y. (ed.). *Math Problem Book I.* Hong Kong Mathematical Society, Hong

Kong, 2001.

NIETO SAID, J, H. *Combinatoria para Olimpiadas de Matemáticas.* Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, 2014.

NIVEN, I. y H. Zukerman. *Introducción a la teoría de los números.* Editorial Limusa-Wiley, México, 1972.

PÉREZ SEGUÍ, M. L. *Combinatoria. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 3.ª ed. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2005.

——. *Combinatoria avanzada. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* 3.ª ed. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

——. *Matemáticas preolímpicas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

——. *Teoría de números. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2009.

POGORÉLOV, A. V. *Geometría elemental.* Instituto Politécnico Nacional, México, 1998.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, México, 1986.

POSAMENTIER, J. & C. T. Salkind. *Challenging Problems in Geometry.* Dover Publications, Inc., New York, 1996.

RUBIO BARRIOS, C. J. (ed.). *Problemas para la 21a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2007.

——. *Problemas para la 22a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

——. *Problemas para la 22a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas introductorios).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

RUBIO BARRIOS, C. J. y G. Ruiz Sánchez (eds.). *Problemas para la 19a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas avanzados).* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2005.

SHIVELY, L. S. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1963.

SOBERÓN BRAVO, P. *Combinatoria para olimpiadas. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

SWOKOWSKI, E. W. y J. A. Cole, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica,* 12.ª ed. International Thomson Editores, México, 2009.

VILENKIN, N. *¿De cuántas formas? Combinatoria.* Editorial Mir, Moscú, 1972.

WENTWORTH, J. y D. E. Smith. *Geometría plana y del espacio.* Editorial Porrúa, México, 2000.

WILKINSON, L. *The Grammar of Graphics.* Springer Publishing, New York, 2007.

ZUBIETA, G. *Lógica deductiva. Vol. 1.* Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

Inducción al pensamiento matemático se terminó de editar en marzo de 2020, siendo Gobernador del Estado de Veracruz Cuitláhuac García Jiménez y Secretario de Educación de Veracruz Zenyazen R. Escobar García.