La Inducción Matemática y tú

Eugenio *ugesaurio* Flores

Editorial Dinosaurio es un proyecto de CARMA,
Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas.

Encuentra todo el material de Editorial Dinosaurio en editorialdinosaurio.blogspot.mx

La Inducción Matemática y tú
Fue creado para CARMA/KaanBal y
la Red de Talleres de Olimpiada de CARMA/KaanBal

No olvides darle *like* a nuestra página de facebook.com/EditorialDinosaurio

Puedes hacer tu donativo en cualquier tienda Oxxo

(recuerda que te cobran comisión de 7 pesos)

4152 3130 3600 1399

La causa de Editorial Dinosaurio depende de la ayuda de todos. Puedes colaborar haciendo un donativo desde la página usando una cuenta de PayPal o haciendo un depósito desde cualquier tienda Oxxo. Si no está en tus posibilidades hacer un donativo, ayúdanos compartiendo el material.

La Inducción Matemática y tú
Eugenio *ugesaurio* Flores para Editorial Dinosaurio

octubre, 2014

Principio de inducción

La inducción matemática es un método de demostración extremadamente útil. Se emplea generalmente al probar fórmulas o propiedades de los números naturales, algunas que se pueden extender a los números reales con ciertas restricciones —por ejemplo, leyes de los exponentes con base real pero exponente entero. Parte de la bondad de la inducción matemática es que la usamos cuando ya sabemos qué queremos demostrar y lo único que nos falta es un argumento para poder asegurar que es cierto.

Los números naturales se definen de manera *inductiva.* Es decir, incluso hablando muy informalmente, al describir los números naturales no podemos nombrar a todos los números naturales puesto que son infinitos, lo que hacemos normalmente es decir algo como "1 es un número natural, también 2 y 3 y 4 y así te sigues, si le sumas 1 a un número natural te da otro número natural". Es más, los niños normalmente se pelean de manera inductiva: "Tú tienes cara de popó", "No, tú tienes más cara de popó", "Tú uno más que yo para siempre". Ese "uno más para siempre" es un argumento intuitivo indestructible: no importa qué tan grande pienses tu número, "uno más" es siempre más grande.

Esos son precisamente los Axiomas de Peano[1], la manera en que definimos los números naturales:

a. 1 es un número natural.

b. si n es un número natural, entonces $n + 1$ también es número natural.

En el caso (b), suponemos la existencia de algún número que cumple la propiedad de ser natural. Nuestra hipótesis no es descabellada, pues a partir de (a) sabemos que existe al menos un número natural, el 1. La manera de construir los números naturales no es tan distinta de la manera en que aprendemos a contar: lo único que necesitamos es preguntarnos por el siguiente número porque *debe* haber un siguiente número, ¿no es así?

El principio de inducción es usar esta definición para probar cosas. También, está muy relacionado con las definiciones recursivas de ciertas fórmulas o sucesiones. Podemos definirlo de varias maneras:

I. Si A es un subconjunto de los números naturales tal que:

   a. 1 pertenece a A

[1] Guiseppe Peano fue un matemático italiano —aunque cuando nació, en 1858, todavía no existía Italia propiamente dicha. Trabajó muchos años ligado a la Universidad de Turín.

b. si n pertenece a A, entonces $n + 1$ pertenece a A

Entonces A contiene a todos los naturales.

II. Si una propiedad P de un subconjunto de los números naturales cumple que:

a. P es cierta para 1 y

b. si P es cierta para n, entonces P es cierta para $n + 1$.

Entonces P es cierta para todos los naturales.

Estas definiciones son equivalentes. Es más, adelante vamos a ver que este principio puede modificarse ligeramente: el caso base no tiene que ser necesariamente 1, por ejemplo. La idea es la misma: si la verdad de $n + 1$ depende únicamente de la verdad de n —o, en el caso de la inducción fuerte, de la verdad de todos los anteriores—, entonces que exista uno solo cuya verdad es demostrable de manera directa implica la verdad de todos los siguientes.

Analogía de los dominós

Imaginemos que tenemos un montón mucho muy grande —potencialmente infinito— de dominós puesto en una especie de fila. La pregunta es: ¿qué necesitamos para tirarlos a todos? El hecho de que sea una cantidad quizás infinita de dominós nos dice que es una muy mala idea intentar tirarlos uno por uno: no importa cuántos tiremos, nuestro avance no es realmente importante.

Si ponemos todos nuestros dominós parados en una fila, necesitamos sólo asegurarnos de dos cosas para que se caigan todos:

a) Que exista al menos un dominó que se caiga.

b) Que si un dominó cae, empuje al siguiente.

Para la primera parte, no tiene que ser el primer dominó. Si tiramos el primero, queremos que se caigan todos; pero si tiramos el segundo o el tercero o el quinto, queremos que se caigan todos después el que tiramos.

Para la segunda parte tenemos que asegurarnos que la distancia entre cada dos dominós no sea demasiada o que estén en el ángulo correcto, porque si uno solo no empuja al que sigue, entonces no se van a caer todos.

Los números naturales son como un conjunto infinito pero ordenado de dominós, donde cada dominó tiene escrito un número. Las pruebas por inducción son como ordenar nuestros dominós parados en una fila y ver si es posible empujar alguno para que se caigan todos.

a) El **caso base** es asegurarse de que exista un primer dominó que se caiga.

b) El **paso inductivo** es *suponer* que si cumple para algún entero, cumple para el siguiente. Como sabemos que cumple para el caso base, entonces cumple para el siguiente; como cumple para el siguiente, cumple a su vez para su siguiente y así sucesivamente cumplen todos los enteros a partir del caso base.

Esos dos pasos nos aseguran que se caen todos los dominós sin necesidad de verlos caer[2].

Para "explicar" la inducción, vamos a ver cómo funciona. Estudiamos un ejercicio clásico para el tema: la fórmula de Gauss.

Suma de los primeros naturales

Existe una fórmula que usamos para sumar los primeros *n* naturales que es

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

y que conocemos coloquialmente como Fórmula de Gauss como parte de la mitología matemática que rodea esta fórmula con una anécdota del matemático Carl Friedrich Gauss, *el príncipe de los matemáticos*, cuando era solo un pequeño alumno de primaria.

Podemos ver que esta fórmula funciona para los primeros enteros, por ejemplo:

[2] Muchos autores trabajan con tres pasos: el caso base, la hipótesis de inducción y el paso inductivo. A nosotros nos gusta entenderlo únicamente como dos pasos porque la hipótesis no es relevante hasta que se usa, es decir, hasta que pasamos al paso inductivo.

n	suma	fórmula
1	1	1(2)/2 = 1
2	1 + 2 = 3	2(3)/2 = 3
3	1 + 2 + 3 = 6	3(4)/2 = 6
4	1 + 2 + 3 + 4 = 10	4(5)/2 = 10
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15	5(6)/2 = 15
6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21	6(7)/2 = 21
7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28	7(8)/2 = 28
8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36	8(9)/2 = 36
9	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45	9(10)/2 = 45
10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55	10(11)/2 = 55

En la tabla anterior vemos que la suma y la fórmula coinciden en los primeros diez valores. Si lo hiciéramos para los siguientes valores, ¿seguirá coincidiendo? ¿Cuántos valores debemos probar para asegurarnos que la fórmula es siempre cierta?

La cosa es que, dado que los naturales son infinitos, cualquier avance, por grande que sea, es insignificante pues infinito menos cualquier natural sigue siendo infinito. Sin embargo, haciendo muchos casos puede surgir la intuición de que, dado que ha sido cierto para todos hasta ahora, seguirá siendo cierto para los demás. Es decir, aquí es cuando entra la Inducción.

Ya demostramos que cumple para algunos naturales, eso es nuestro caso base. Ahora, suponemos que existe algún natural *k* para el cual es cierto. Esta hipótesis no es del todo infundada pues ya encontramos muchos valores para el cual es cierto. Sin embargo, lo que estamos diciendo es que para nuestro natural *k* se cumple que

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Sin embargo, es una suposición. Estamos suponiendo que existe algún natural *k* para el cual eso es cierto. Ahora, como eso es cierto —por hipótesis— entonces debe ser cierto que

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

y, haciendo algo de álgebra, obtenemos

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que es exactamente la misma fórmula pero para $n = k + 1$, es decir, para el siguiente valor. Esto quiere decir que si es cierto para algún número, también debe ser cierto para el siguiente y eso es el principio inductivo.

Luego, como al menos es cierto para los números del 1 al 10, y si es cierto para algún número también lo es para su siguiente, entonces es cierto para todos y eso concluye la prueba.

Suma de impares

Vamos a demostrar que

$$1+3+5+7+9+...+(2n-1)=n^2$$

es decir, que la suma de los primeros n impares es igual a n^2. Para convencernos de esta idea, veamos que es cierto para los primeros casos:

Para $n=1$, $1=1^2$.

Para $n=2$, $1+3=4=2^2$.

Para $n=3$, $1+3+5=9=3^2$.

Para $n=4$, $1+3+5+7=16=4^2$.

Para $n=5$, $1+3+5+7+9=25=5^2$.

Creemos que ya nos convencimos lo suficiente. Ahora, suponemos que existe un natural k tal que $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ y, usando esa hipótesis, queremos calcular cuánto vale $1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)$.

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

que es exactamente lo que queríamos. Esto concluye la inducción y la demostración.

Otro, otro

Es probable que ya conocieras los dos resultados anteriores. Eso no quiere decir que la Inducción únicamente sirva para demostrar lo que ya sabes. La relación que queremos probar ahora es

$$1(2)+2(3)+3(4)+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Veamos que cumple para algunos casos:

Para $n=1$, $2=1(2)=\frac{1(2)(3)}{3}=2$.

Para $n=2$, $8=2+6=1(2)+2(3)=\frac{2(3)(4)}{3}=8$.

Ahora, sabiendo que $1(2)+2(3)+3(4)+...+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$, veamos que

$$1(2)+2(3)+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=(k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3}+1\right]=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

que es la fórmula para $k+1$. Esto concluye la demostración por inducción.

Uno de divisibilidad

También podemos usar la Inducción Matemática para demostrar afirmaciones sobre la divisibilidad de números naturales, cuando dichas afirmaciones hablan de propiedades de los naturales como conjunto completo.

Queremos demostrar que $n(n^2+5)$ es divisible entre 6 para todo *n* natural. Veamos si cumple para los primeros naturales:

Para $n=1$, tenemos $1(1^2+5)=6$ que es múltiplo de 6.

Para $n=2$, tenemos $2(2^2+5)=2(9)=18$ que es múltiplo de 6.

Para $n = 3$, tenemos $3(3^2+5) = 3(14) = 42$ que es múltiplo de 6.

Y con esos basta para convencernos de que no es una afirmación tan descabellada. Ahora, exploraremos la afirmación para $n+1$ para ver si es posible que su veracidad dependa únicamente de la verdad de la misma afirmación pero para n.

Veamos que

$$(n+1)\left[(n+1)^2+5\right] = (n+1)\left[n^2+2n+1+5\right] = (n+1)\left[(n^2+5)+(2n+1)\right]$$

y lo separamos de esa manera para poder reducirlo a casos anteriores. Desarrollando la multiplicación tenemos

$$n(n^2+5)+n(2n+1)+n^2+2n+6 .$$

Además,

$$n(2n+1)+n^2+2n = 3n^2+3n = 3(n^2+n).$$

Si a un múltiplo de 6 le quitamos o agregamos múltiplos de 6, el resultado sigue siendo un múltiplo de 6. Claramente 6 es múltiplo de 6. Además, $3(n^2+n)$ siempre es múltiplo de 6 porque n^2+n siempre es par[3]. Luego, $(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]$ es múltiplo de 6 si y solo si $n(n^2+5)$ es múltiplo de 6.

La condición anterior es equivalente al paso inductivo pues demostramos que si es cierto para alguno, también debe ser cierto para el siguiente. Esto concluye la prueba.

Inducción fuerte con divisibilidad

Vamos a saltar de un ejercicio de divisibilidad relativamente sencillo como el anterior a uno mucho más general. Sin embargo, las ideas son siempre las mismas; si acaso, para problemas de divisibilidad usamos la idea de que, si tenemos un múltiplo de *n*, sumar y restar múltiplos de *n* sigue siendo un múltiplo de *n*.

Queremos demostrar que $x-y$ es un factor de x^n-y^n para todo *n* natural. Para los primeros casos es sencillo de ver.

[3] Estamos haciendo trampa. Esa afirmación se puede verificar fácilmente probando los casos par e impar. Sin embargo, ese tipo de idea es el de una demostración *directa*. Esta afirmación también se puede demostrar usando Inducción Matemática pero no nos queremos detener en eso ahora; en la siguiente sección tendremos una demostración por Inducción que sí incluye la demostración de una afirmación similar usando Inducción.

Para $n = 1$, es claro que $x - y$ es factor de $x - y$.

Para $n = 2$, tenemos que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ de donde vemos que $x - y$ es factor.

Ahora, supongamos que existe un entero k para el cual es cierto que $x - y$ es factor de $x^k - y^k$. Luego, como $x^k - y^k$ es múltiplo de $x - y$, tanto $x(x^k - y^k)$ como $y(x^k - y^k)$ también lo son. Si sumamos estos dos números obtenemos

$$x^{k+1} - xy^k + yx^k - y^{k+1}$$

que también es múltiplo de $x - y$. Luego, $x^{k+1} - y^{k+1}$ sería múltiplo de $x - y$ si y solo si $yx^k - xy^k$ también lo es. Vamos a centrarnos en demostrar esto último. Veamos que

$$yx^k - xy^k = xy(x^{k-1} - y^{k-1})$$

por lo que acabaríamos si $x^{k-1} - y^{k-1}$ fuera múltiplo de $x - y$. En estos casos, usamos lo que se llama Inducción Fuerte, que consiste en suponer no solo que el caso para *k* es cierto sino también todos los casos desde 1 hasta *k.* El principio de Inducción Fuerte es equivalente a la Inducción común y corriente como la hemos manejado.

Afortunadamente, en este caso, usar Inducción Fuerte en este ejemplo nos permite concluir la prueba con lo que tenemos. Es decir, suponiendo que es cierto para todos los valores desde 1 hasta *k* implica que es cierto para *k* + 1. Luego, como encontramos que es cierto para 1 —y también, aunque no es necesario, encontramos que es cierto para 2—, concluimos que es cierto para todos.

El caso base no siempre es el 1

De todo lo que podría salir mal en una inducción, esto es lo menos preocupante. Es una sencilla lección en perseverancia y confiar en tus instintos. Lo primero que tenemos que encontrar es nuestro caso base.

Queremos demostrar que $2^n < n!$ para toda *n*. Procedemos por inducción. Naturalmente, lo primero que debemos hacer es encontrar un caso base.

Si *n* = 1, $2^1 = 2 > 1 = 1!$

Si *n* = 2, $2^2 = 4 > 2 = 2!$

Si *n* = 3, $2^3 = 8 > 6 = 3!$

Si *n* = 4, $2^4 = 16 < 24 = 4!$

Vamos a tomar 4 como nuestro caso base porque es el primer natural que cumple. Aunque tardamos en encontrar un caso base, nuestra intuición nos diría que la que la proposición es verdadera pues del lado menor estoy multiplicando puros factores 2, del lado mayor multiplico factores crecientes.

Así pues, lo que queremos demostrar ahora es que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

Como ya encontramos el caso base, sigue el paso inductivo, es decir, demostrar que $2^{k+1} < (k+1)!$ si sabemos que $2^k < k!$. Este paso inductivo lo podemos hacer de muchas maneras distintas, todas igual de válidas si tenemos cuidado en los detalles. Veamos dos de estas maneras. La primera sería:

$$\begin{aligned} &2^{k+1} < (k+1)! \Leftrightarrow 2(2^k) < (k+1)k! \\ &\Leftarrow 2 < k \wedge 2^k < k! \end{aligned}$$

donde $2 < k$ es cierto por la condición del problema y $2^k < k!$ es cierto por hipótesis. Es muy importante notar que no conocemos la verdad del signo "<" al principio del enunciado, pero que el signo de si y solo si hace que no sea problema. El signo al final no es el "solo si" sino el "si".

Segunda manera:

$$\begin{aligned} &2^k < k! \Rightarrow 2(2^k) < 2(k!) \\ &\Rightarrow 2^{k+1} < 2(k!) < (k+1)(k!) \\ &\Leftrightarrow 2 < k+1 \end{aligned}$$

que es esencialmente la misma manera anterior excepto que esta parte de la hipótesis de inducción para llegar a aquello que queremos demostrar en lugar de partir de lo que queremos demostrar para ver que depende únicamente de la hipótesis de inducción, como hicimos en la primera manera.

Lo que hicimos fue demostrar que la desigualdad es cierta para todos los naturales a partir del 4. Este es un caso de Inducción Incompleta pues el conjunto para el cual es válida la afirmación no es igual al conjunto de todos los naturales.

MA — MG

La inducción se limita a propiedades de los números naturales. Así, no podemos usar inducción para demostrar la desigualdad de la Media Geométrica — Media Aritmética pero sí podemos usarla para demostrar que es válida para cualquier cantidad de términos.

La desigualdad de la Media Aritmética — Media Geométrica dice que, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ reales positivos, se cumple que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$$

Nuestro caso base será $n = 2$ pues el caso $n = 1$ no tiene ningún chiste. Veamos efectivamente que, para cualesquiera dos reales positivos x, y tenemos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \geq xy$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$$

que es siempre cierto pues todo cuadrado es no negativo.

Vamos a suponer que la desigualdad MA—MG es cierta para *n* — 1 elementos y usaremos eso para demostrar que es cierto para *n* elementos. Sean $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ números reales positivos y sea $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n}$ su media geométrica. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Sabemos que $a_1 \leq G \leq a_n$.

Antes del paso inductivo, probaremos que

$$a_1 + a_n \geq \frac{a_1 a_n}{G} + G .$$

Efectivamente, veamos que

$$a_1 + a_n - G - \frac{a_1 a_n}{G} = \frac{a_1}{G}\left(G - a_n\right) + (a_n - G) = \left(a_n - G\right)\left[-\frac{a_1}{G} + 1\right]$$

simplificando, nos queda

$$\frac{1}{G}(a_n - G)(G - a_1)$$

que es no negativo pues $G > 0 \Rightarrow \frac{1}{G} > 0$ y como $a_n \geq G \geq a_1$, las dos restas son no negativas.

Ahora sí, por hipótesis de inducción, la desigualdad MA—MG es cierta para cualquier conjunto de *n* — 1 elementos. En particular,

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{G}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{\frac{G^n}{G}} = G$$

es decir,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{G} \geq (n-1)G\ .$$

Sumando G de ambos lados, obtenemos

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{G} + G \geq nG$$

y, usando la desigualdad que demostramos antes,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1 + a_2 \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{G} + G \geq nG$$

que implica inmediatamente

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq G$$

que es lo que queríamos demostrar.

Seguro puedes apreciar, en esta última demostración, que no utilizamos únicamente la inducción. Es decir, la inducción fue sencilla únicamente después de demostrar cierta desigualdad muy útil que parece sacada de la nada.

La inducción matemática es una herramienta que revisamos dentro de los contenidos de Olimpiada de Matemáticas —normalmente en el área de Combinatoria, pero en realidad es útil en cualquier otra— que, sin embargo, se extiende a las herramientas básicas del matemático profesional y se revisa en al menos un curso básico de la Licenciatura. Por muy complicado que pueda parecer, es una herramienta sencilla que es necesario dominar.

A partir de aquí, empezaremos a mostrar cómo usar la inducción matemática en distintos contextos. Analizaremos sus ventajas y también los aspectos con los que hay que tener cuidado. Por último, un par de problemas de otro tipo —más cercano a la Olimpiada, distintos a fórmulas y divisibilidad— que muestran un poco más del poder de la inducción. Al final, una enorme lista de ejercicios y problemas.

El lado bueno de la inducción

Empezamos por mostrar las ventajas de la inducción que saltan a la vista. Una de ellas es clara: reduce el trabajo de "pensar". La Inducción nos ayuda a demostrar que relaciones que creemos que son verdaderas son, efectivamente, verdaderas. Así, es una excelente herramienta para demostrar nuestras corazonadas, intuiciones y conjeturas. Es decir, eso que crees que es cierto porque ha funcionado para todos los números que has intentado demuéstralo con inducción.

El caso que vamos a estudiar primero es el de la suma de los cuadrados de los números naturales. Esa relación está dada por

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tuvieron que pasar años y algunos matemáticos brillantes antes de tener una prueba no inductiva de esta fórmula. Por supuesto, la prueba por inducción es igual de válida.

Sin usar inducción

Que es lo que queríamos demostrar. En esta demostración no sólo demostramos la validez de la fórmula, además la construimos. Este tipo de prueba se llama prueba directa. La enorme diferencia con la prueba por inducción es que esta prueba funciona incluso si no supiéramos a qué queremos llegar y, en ese sentido, es más "fuerte" que una demostración por inducción. Mientras que la inducción nos puede ayudar a demostrar una fórmula análoga para cubos, una prueba análoga a ésta nos ayudaría a encontrar una fórmula para cuartas o quintas potencias.

La idea de esta prueba es observar que $(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Hacemos esto para los primeros *n* enteros:

$$
\begin{aligned}
&2^3-1^3=3(1)^2+3(1)+1\\
&3^3-2^3=3(2)^2+3(2)+1\\
&4^3-3^3=3(3)^2+3(3)+1\\
&5^3-4^3=3(4)^2+3(4)+1\\
&\vdots\\
&n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\
&(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1
\end{aligned}
$$

Si sumamos todos los términos del lado izquierdo, podemos ver que todos los términos se cancelan. Por ejemplo: el 2 del primer renglón se cancela con el 2 del segundo renglón, el 3 del segundo renglón se cancela con el 3 del tercer renglón, etcétera. Así, todos se cancelan excepto $(n+1)^3$ del último renglón y -1 del primer renglón. Del lado derecho, todo se puede sumar sin problemas y, todavía más, podemos tomar el 3 como término semejante.

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+3(1+2+3+...+n)+n$$

De donde el último término es *n* porque estamos sumando *n* veces 1. Ahora, recordemos que, como vimos en la sección anterior, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. También, ya tenemos en la expresión anterior la suma que queremos, por lo que es conveniente despejarla de la ecuación. Por facilidad de notación, vamos a decir que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=S$. La expresión, antes de despejar, nos queda como

$$(n+1)^3-1=3S+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

Y, despejando para S, nos queda

$$S=\frac{(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n}{3}$$

que se ve medio feo pero podemos acomodar. Fíjate que $-1-n=-(n+1)$ y que tenemos ese término común en todas las expresiones. Nos queda

$$S=\frac{(n+1)\left[(n+1)^2-3\frac{n}{2}-1\right]}{3}=\frac{(n+1)\left[\frac{2(n^2+2n+1)-3n-2}{2}\right]}{3}$$

$$=\frac{(n+1)\left[2n^2+n\right]}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

que es justo lo que buscábamos. Hemos llegado a que, para cualquier *n* dado,

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aunque la prueba en sí no es muy complicada, cuando uno ve esta demostración por primera vez es probable que necesite leerla varias veces para entender qué pasó. El detalle, como hemos mencionado, es que para crear esta prueba, uno tiene que tener ideas. Eso es distinto con la inducción pues uno ya sabe a qué quiere llegar y ya sabe qué tiene que hacer.

Usando Inducción

Vamos a probar la misma relación, esta vez usando inducción. Es necesario ver primero que cumple para algunos casos. Vamos a hacer los primeros cuatro, aunque bastaría con uno:

Para $n=1$, tenemos $1^2=1$ y $\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}\frac{1(2)(3)}{6}=1$.

Para $n=2$, tenemos $1^2+2^2=1+4=5$ y $\frac{2(2+1)(2(2)+1)}{6}=\frac{2(3)(5)}{6}=5$.

Para $n=3$, tenemos $1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$ y $\frac{3(3+1)(2(3)+1)}{6}=\frac{3(4)(7)}{6}=14$.

Para $n=4$, tenemos $1^2+2^2+3^2+4^2=1+4+9+16=40$ y $\frac{4(4+1)(2(4)+1)}{6}=\frac{4(5)(9)}{6}=30$.

Ya tenemos evidencia de que la relación parece funcionar. Entonces, suponemos que existe un natural *k* para el cual

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

y, usando eso, queremos calcular cuánto vale $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2$. Veamos que

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Hemos usado ya nuestra hipótesis de inducción de modo que lo que sigue es simplificar para obtener la expresión que queremos.

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right]$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}&k(2k+1)+6(k+1)=2k^2+k+6k+6\\&=(2k^2+4k)+(3k+6)=2k(k+2)+3(k+2)=(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

De donde

$$1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

que es lo que queríamos obtener. Esto concluye la prueba por inducción. Demostramos que si se cumple para algún número, debe cumplirse para el siguiente y, además, que se cumple para los primeros cuatro. Luego, debe cumplirse para todos.

La intención de mostrar las dos pruebas es mostrar cómo las pruebas por inducción pueden ser mucho más sencillas que una prueba directa. La prueba por inducción necesitó de sólo una sustitución y un par de manipulaciones algebraicas, mientras que la prueba directa no sólo necesitó algunas sustituciones más y la misma necesidad de manipulaciones algebraicas, además partió de una idea que es sencillamente brillante. Es decir: la demostración por inducción la pudimos haber hecho nosotros solos sin problema, la prueba directa necesitamos que alguien nos platicara la idea inicial.

¿Cuál es más sencilla? Tú lo decides. Ahora que sabes cuál es esa "idea genial" de la que hablamos, seguro puedes usarla para otras fórmulas similares. Lo que hemos llamado "el lado bueno de la inducción" lo resumimos en un par de puntos: (1) con la inducción ya sabes qué quieres demostrar, (2) con la inducción ya sabes qué tienes que hacer. Juntos, saber qué quiero demostrar y saber qué tengo que hacer para demostrarlo pueden hacer que la prueba sea muy sencilla.

El lado oscuro de la inducción

Por muy poderosa que parezca, la inducción no es infalible ni su aplicación es tan mecánica como los ejercicios revisados nos podrían hacer creer. Empezamos tratando de mostrar puntos más o menos sencillos de superar: lo que sucede cuando se cumple el paso inductivo pero no encontramos caso base; de cuándo la inducción no es el camino más sencillo a la solución; de cómo una inducción, incluso si es el camino adecuado, puede requerir mucho trabajo; lo que sucede cuando hay muchos ejemplos que cumplen pero el paso inductivo es esencialmente imposible.

Por supuesto, no pretendemos alejarte de la idea de que la Inducción es una herramienta sumamente fuerte y útil porque lo es. Pero sí queremos que tengas cuidado: con gran poder viene gran responsabilidad.

No hay caso base

Queremos demostrar que $n = n + 1$ para todo *n* natural. Sí, exactamente eso que acabas de leer: queremos demostrar que cada número es igual a su siguiente que, naturalmente, implicaría que todos los naturales son iguales.

Sin embargo, vamos a cambiar el orden en el que hacemos la demostración sencillamente para agregar algo de suspenso. Vamos a realizar primero el paso inductivo: probar que si cumple para un entero *k*, entonces cumple para el entero $k + 1$.

Queremos demostrar que $k+1 = k+2$ sabiendo que $k = k+1$. Puesto que $1 = 1$ se sigue de las propiedades de la igualdad como relación de equivalencia, no tenemos problema en afirmar que

$$k = k+1 \Rightarrow k+1 = k+1+1 = k+2$$

que es lo que queríamos demostrar.

Acabamos de mostrar que si existe algún entero que cumple, entonces todos los enteros después de ese también cumplen. Es decir, si un solo número fuera igual al siguiente, todos serían iguales entre sí.

Dado que $x = x$ y, por las propiedades de la igualdad, podemos ver que lo que encontrar un número que satisfaga lo anterior es equivalente a demostrar que

$$x = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

lo que sabemos es falso.

Queremos enfatizar el cuidado que se tiene que tener con la inducción: hemos probado que si un dominó se cae, sin duda empujará a todos los demás; el detalle es que no existe un solo dominó que se caiga.

El camino más corto

Cuando trabajamos sobre el lado más amable de la inducción, vimos cómo la prueba por inducción puede hacer que ciertas pruebas directas se vean como exageradamente complicadas y largas. Sin embargo, esto depende de cada problema. Lo que queremos ver ahora es que un problema que puede resolverse de maneras bastante sencillas y directas con otros métodos y argumentos, usando inducción se vuelve un camino largo.

Queremos demostrar que $n^3 - n = 6k$ para todo *n* natural, es decir, que $n^3 - n$ es un múltiplo de 6 para todos los valores de *n* naturales.

Para proceder por inducción, debemos primero encontrar un caso base. Es claro que con 1 cumple pues 1 — 1 = 0 que es múltiplo de 6. Ahora, queremos demostrar que si $n^3 - n$ es un múltiplo de 6, entonces $(n+1)^3 - (n+1)$ también lo es.

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6k \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = 6k$$

Usando la hipótesis de inducción, como $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n$, lo anterior es múltiplo de 6 si y solo si $3n^2 + 3n$ también es múltiplo de 6. ¿Cómo demostramos eso? Bueno, pues haciendo una segunda inducción —una inducción adentro de una inducción.

No siendo tan estrictos, podemos ver que claramente $3n^2 + 3n$ es múltiplo de 3, de modo que para asegurar que es múltiplo de 6 bastaría con demostrar que $n^2 + n$ es un número par. Esa será la afirmación que queremos probar usando inducción.

Es claro que 1 + 1 es un número par así que 1 es nuestra base de inducción. Ahora, queremos demostrar que $(n+1)^2 + (n+1)$ es un número par si $n^2 + n$ lo es.

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2$$

Usando la hipótesis de inducción, sabeos que $n^2 + n$ es par por lo que $n^2 + n + 2n + 2$ es par si y solo si $2n + 2$ es par que claramente lo es. Esto concluye la inducción que, a su vez, concluye la inducción original.

Si nos hubiésemos decidido por un método más directo, por ejemplo, usando congruencias módulo 6, la demostración se acaba en seis líneas:

$$\begin{aligned}
&0^3-0\equiv_6 0\\
&1^3-1\equiv_6 0\\
&2^3-2\equiv_6 8-2\equiv_6 0\\
&3^3-3\equiv_6 27-3\equiv_6 0\\
&4^3-4\equiv_6 64-4\equiv_6 0\\
&5^3-5\equiv_6 125-5\equiv_6 0
\end{aligned}$$

Pues, demostrado para las seis congruencias módulo 6, queda demostrado para todos los naturales. Esto demuestra que efectivamente n^3-n es múltiplo de 6 para todo *n*.

Sin embargo, una sencilla factorización:

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$$

nos deja ver que n^3-n es el producto de tres enteros consecutivos donde al menos uno es par y otro es múltiplo de 3, por lo que el resultado de la multiplicación es necesariamente múltiplo de 6.

Estos dos caminos fueron mucho más rápidos que la inducción. Sin embargo, tampoco hay que olvidar que la inducción efectivamente demostró el problema que queríamos.

Los límites de la inducción

Hasta ahora, es posible que creas que la inducción, si acaso tiene ciertos detalles a los que hay que ponerle mucha atención, es una herramienta muy poderosa al grado de creer infalible: todo se puede demostrar con inducción si pudiéramos plantear la inducción de manera adecuada. Incluso acotando la anterior afirmación para incluir únicamente propiedades de los números naturales, es necesario entender que la Inducción no es una herramienta omnipotente. El caso que vamos a estudiar es sobre los números primos. Es más o menos sabido que no existe una función polinómica o trigonométrica que genere puros números primos. Aunque es claro que existen sucesiones con infinitos números primos, ninguna sucesión infinita que podamos describir con una fórmula —y no, por ejemplo, diciendo "la sucesión de los números primos"— está formada únicamente por números primos.

Queremos demostrar la siguiente afirmación: $f(n)=n^2+n+41$ es un número primo para todo *n* natural. Ya hemos probado que fórmulas similares arrojan puros múltiplos de 2 o múltiplos de 13, por lo que no suena descabellado poder demostrar algo así usando inducción.

Para tratar de convencernos —o al menos sorprendernos— acerca de la verdad de la anterior afirmación, vamos a hacer una importante cantidad de casos base, muchos más que el único caso base que normalmente nos basta encontrar.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1^2+1+41=43\\
f(2) &= 2^2+2+41=47\\
f(3) &= 3^2+3+41=53\\
f(4) &= 4^2+4+41=61\\
f(5) &= 5^2+5+41=71\\
f(6) &= 6^2+6+41=83\\
f(7) &= 7^2+7+41=97\\
f(8) &= 8^2+8+41=113\\
f(9) &= 9^2+9+41=131\\
f(10) &= 10^2+10+41=151\\
f(11) &= 11^2+11+41=173\\
f(12) &= 12^2+12+41=197\\
f(13) &= 13^2+13+41=223\\
f(14) &= 14^2+14+41=251\\
f(15) &= 15^2+15+41=281
\end{aligned}
$$

Hasta ahora[4], la fórmula ha arrojado sólo números primos por lo que tenemos —hasta ahora— algo de evidencia para suponer que quizás pueda ser cierta, además de algo de sorpresa. Como quisiéramos probarla para todos los números, la inducción es una buena manera de proceder.

Usando Inducción, queremos demostrar que si n^2+n+41 es un número primo, entonces $(n+1)^2+(n+1)+41$ también es un número primo.

Lo que podemos pensar es desarrollar el cuadrado para poder usar nuestra hipótesis de inducción. Es decir, si decimos que $n^2+n+41=p$, entonces

$$(n+1)^2+(n+1)+41=n^2+2n+1+n+1+41=p+2n+42$$

¿Qué hacemos ahora? ¿Existe alguna manera de demostrar que esa última expresión es un primo? Podríamos intentar ver que no es posible factorizarla como producto de dos

[4] Diviértete un rato encontrando todos los valores que arrojan un número primo, al menos, responde: ¿cuál es el primero que no lo hace?

expresiones distintas de 1. ¿Cómo hacemos eso? ¿Es posible hacer eso? Ojalá que no, puesto que para 41, tenemos $f(41)=41^2+41+41$ que claramente es múltiplo de 41 y por lo tanto no es primo.

Queremos recalcar aquí que la inducción no es todopoderosa. En particular, las expresiones con números primos escapan muy sencillamente de las capacidades de una prueba por inducción, puesto que los primos no están todos sobre alguna progresión aritmética o geométrica conocida –incluso si se conocen varias progresiones que contienen infinitos primos sobre ellas.

Pensemos nada más que si la inducción no tuviera límites, problemas como la Conjetura de Goldbach no habría escapado a su solución por casi trescientos años.

Ejercicios

Prueba por inducción las siguientes proposiciones. Para algunos de ellos es posible encontrar una demostración no inductiva. Todos estos ejercicios son ya sea de fórmulas, igualdades o bien, de divisibilidad.

Ejercicio 1. $2+4+6+...+2n=n(n+1)$.

Ejercicio 2. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Ejercicio 3. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Ejercicio 4. $1^4+2^4+3^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

Ejercicio 5. $1+2+4+8+16+...+2^n=2^{n+1}-1$.

Ejercicio 6. $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Ejercicio 7. 8 divide a $3^{2n}-1$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 8. 35 divide a $6^{2n}-1$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 9. 9 divide a $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 10. 60 divide a $n^2(n^4-1)$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 11. 17 divide a $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 12. 9 divide a $4^n+15n-1$ para todo $n\in\mathrm{N}$.

Ejercicio 13. $4+3\cdot 4+3\cdot 4^2+\cdots+3\cdot 4^n=4^{n+1}$.

Ejercicio 14. Propón y demuestra el resultado de la siguiente suma en términos de *n*:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Ejercicio 15. Propón y demuestra el resultado de la siguiente suma en términos de *n*:

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$$

Ejercicio 16. $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$.

Ejercicio 17. $(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7)=2(1+2+\cdots+n)^4$.

Ejercicio 18. Demuestra que $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$ es un entero para $n=0,1,2,\ldots$

Ejercicio 19. Demuestra[5] que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Ejercicio 20. Pequeño Teorema de Fermat. Demuestra que a^p-a, donde *p* es un número primo, es divisible entre *p* para todo natural *a.*

[5] Una de las demostraciones no-inductivas de esta proposición es la que conocemos como "La hamburguesa de JoséRa". Consiste en pensar en las maneras en que uno puede ordenar una hamburguesa en un puesto que ofrece *n* ingredientes. Por un lado, lo calculamos como la suma de las maneras de elegir cada cantidad posible de ingredientes; por el otro, lo calculamos usando regla del producto suponiendo que los ingredientes están ordenados y que una hamburguesa se define como una sucesión de SÍ y NO. Esta demostración es la prueba no-inductiva del ejercicio anterior.

La otra inducción

Hasta ahora hemos usado la inducción para probar esencialmente dos tipos de problemas: los que llamamos "fórmulas", que son igualdades en sumas grandes que dependen de alguna variable y cuya verdad demostramos que no depende del valor elegido, y problemas de divisibilidad donde queremos mostrar que una expresión dada en función de algún natural es siempre múltiplo de algún número dado sin importar el valor de la variable. Lo que queremos hacer ahora es mostrar que la inducción puede ser usada en otros escenarios, problemas más "abiertos" donde no estemos usando fórmulas y, a veces, ni siquiera números. Lo que quisimos en esta sección fue recopilar problemas que necesitaran más palabras o dibujos que nada más simplificación algebraica.

Hay que tener bien claro que la inducción funciona cuando ya tienes una buena idea de qué quieres demostrar, cuando tienes cierta noción o evidencia de que lo que quieres demostrar es cierto y solo te falta —nada más— una manera de probarlo. En esos problemas, la Inducción Matemática puede ser tu mejor amiga.

Ángulos interiores de un polígono

Vamos a demostrar, usando inducción, que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de *n* lados es $180(n-2)$. Algunas de las formas tradicionales de hacerlo son sumamente directas y parten de un polígono general de *n* lados que se triangula. Esta idea no está demasiado lejos de la manera inductiva.

En la inducción, necesitamos un caso base. Ese caso es el triángulo —el menor polígono—, que necesitaríamos demostrar que la suma de sus ángulos interiores es

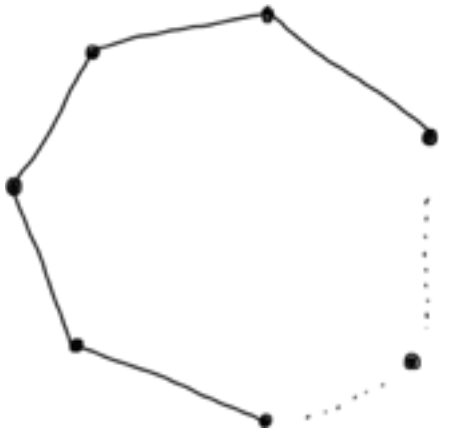
$$180(n-2)=180(3-2)=180$$

que es cierto[6]. Sabiendo eso, queremos demostrar que la suma de los ángulos interiores de un un (*n+1*)—ágono convexo es $180((n+1)-2)$, sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un *n*—ágono convexo es $180(n-2)$.

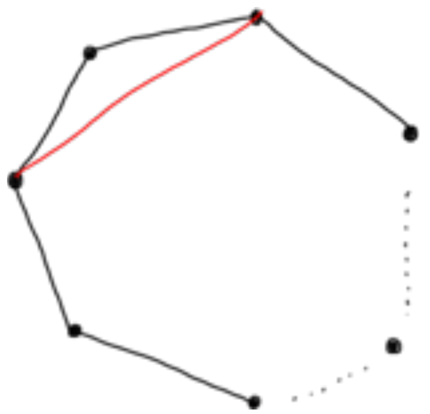
[6] Esto se puede demostrar de muchas maneras aunque necesita los supuestos de que o bien una línea mide 180 grados, o bien, un círculo mide 360, entre otros postulados de geometría. Esas demostraciones —y decidir cuál viene primero— no las trataremos aquí.

Así, ahora que sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados, suponemos que la suma de ángulos interiores de un *n*—ágono convexo es $180(n-2)$ y usaremos eso para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un (*n+1*)—ágono convexo es $180((n+1)-2)$.

Tomemos nuestro (*n+1*)—ágono convexo. Se ve más o menos así:



Lo que vamos a hacer es trazar una recta que una dos vértices no consecutivos, de modo que nos quede un *n*—ágono convexo con un triángulo pegado. Es importante notar que todos los ángulos interiores del (*n+1*)—ágono convexo siguen ahí: todos excepto dos quedan completo y esos dos se han dividido entre el triángulo y el polígono menor.



Por hipótesis de inducción, la suma de los ángulos interiores del *n*—ágono convexo es $180(n-2)$. Además, el triángulo fue nuestro caso base, de modo que sabemos que la suma de sus ángulos interiores es 180. Como sabemos que la suma de los ángulos interiores de nuestro polígono es igual a la suma de los ángulos interiores de los dos polígonos en que dividimos la figura, la suma debe ser

$$180(n-2)+180=180(n-2+1)=180((n+1)-2)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Diagonales de un polígono

Un ejercicio similar al anterior pide calcular la cantidad de diagonales de un polígono de *n* vértices —y, por lo tanto, de *n* lados—. En este ejercicio, consideramos los lados como diagonales, de modo que este problema es idéntico a calcular la cantidad de rectas que determinan *n* puntos no colineales en el plano.

Queremos demostrar que la cantidad de diagonales de un polígono de *n* lados, donde los lados cuentan como diagonales, es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$. Por supuesto, existen otro tipo de pruebas directas que, además de demostrar que ésta es la cantidad de diagonales, construyen la fórmula en el proceso de demostración[7]. Procedemos por inducción.

El caso base es, de nuevo, un triángulo, que es nuestro menor polígono. No es difícil ver que, en el caso del triángulo, las diagonales son únicamente los lados y que

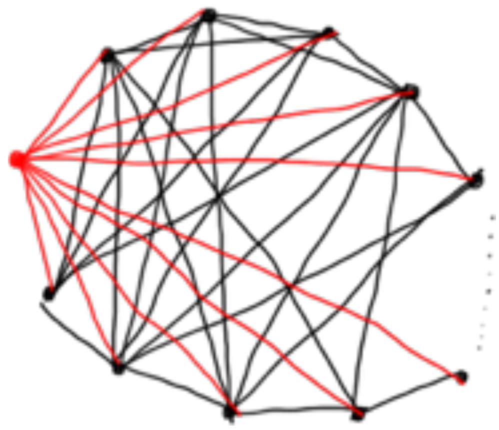
$$3 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(2)}{2} = 3$$

de modo que la fórmula funciona para un triángulo.

Ahora, queremos demostrar que la cantidad de diagonales de un (*n+1*)—ágono es $\frac{(n+1)n}{2}$ sabiendo que la cantidad de diagonales de un *n*—ágono es $\frac{n(n-1)}{2}$. Teniendo nuestro (*n +1*)—ágono dibujado, tomamos un punto para aislarlo del resto. Lo que nos queda es un *n* —ágono y un punto. Trazamos todas las diagonales del *n*—ágono, que son exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ por hipótesis de inducción.

[7] Una demostración mucho muy directa es notar que para trazar una recta basta con elegir dos puntos. Luego, la cantidad de rectas entre *n* puntos no colineales debe ser igual a la cantidad de maneras de elegir dos de esos puntos.

Para contar todas las diagonales del (*n+1*)—ágono, falta únicamente contar las diagonales que salen desde el punto que aislamos del resto. De ese punto sale una diagonal a cada uno de los restantes *n* puntos, es decir, *n* diagonales adicionales en total.



Tenemos

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2-n}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

que es lo que queríamos tener.

Esto concluye la prueba por inducción.

Problemas

Te dejamos una lista de problemas que pueden demostrarse usando inducción matemática y cuyo planteamiento es distinto a los problemas de la sección anterior.

Problema 1. Demuestra que un conjunto de *n* elementos tiene 2^n subconjuntos.

Problema 2. Demostrar que un tablero de $2^{2014} \times 2^{2014}$ al que le falta un cuadrito puede ser cubierto totalmente con triminós en forma de L.

Problema 3. Demostrar que *n* rectas en el plano, tales que dos cualesquiera de ellas no son paralelas y tres cualesquiera de ellas no tienen un punto en común, determinan un mapa coloreable con dos colores.

Problema 4. Sea *n* un entero positivo. Demuestra que el número $2^{2^n} - 1$ tiene al menos *n* factores primos distintos.

Soluciones

Los problemas que propusimos en la sección anterior nos gustan tanto que no nos aguantamos las ganas de escribir las soluciones. Por supuesto, además de la solución, escribimos todo como si fuera una importante lección de vida. Si le quitas nuestro sermón y consejos, la solución es bastante más breve.

Problema 1. Recordamos que el vacío y el todo son subconjuntos de todo conjunto.

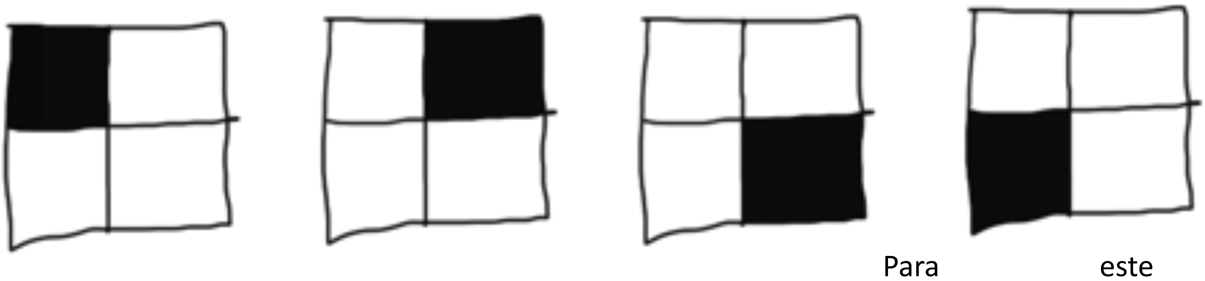
Un conjunto de 1 elemento tiene dos subconjuntos: el vacío y el todo. Un conjunto de 2 elementos tiene cuatro subconjuntos: el vacío, el todo, el subconjunto con el primer elemento y el subconjunto con el segundo elemento.

Supongamos que un conjunto de *k* elementos tiene 2^k subconjuntos. Si agregamos un elemento nuevo al conjunto, de cada subconjunto podemos hacer dos: uno que sí contiene al elemento nuevo, otro que no. Es decir, con *k* + 1 elementos tenemos $2(2^k) = 2^{k+1}$ elementos, como queríamos demostrar.

Problema 2. El problema de esta vez es uno particular que podemos tratar como general, probar con inducción y así resolver el caso que queríamos tratar de manera inmediata. El problema habla de un tablero de $2^{2014} \times 2^{2014}$ pero, como sucede muchas veces —no siempre— cuando el problema tiene el número del año en que se aplica, la idea es generalizarlo a un tablero de cualquier potencia de 2.

Tenemos un tablero de $2^{2014} \times 2^{2014}$ al que le falta un cuadrito. Queremos demostrar que es posible llenarlo con fichas de triminó en forma de L. Lo que vamos a hacer es demostrar que se puede llenar cualquier tablero de $2^n \times 2^n$, que implica directamente nuestro caso particular.

Primero, necesitamos mostrar que existe un caso base que se puede. En este problema, mostraremos que es posible llenar un tablero de 2×2 independientemente del lugar donde se encuentre el hueco.

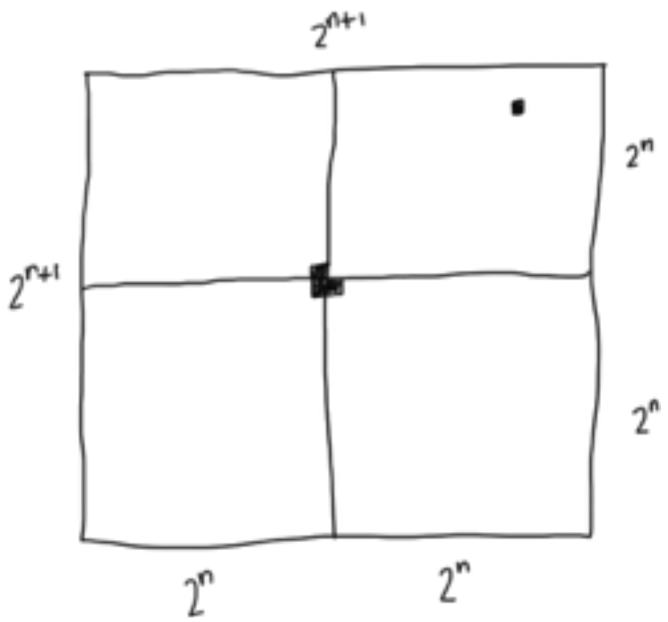


Para este

tablero tan pequeño, considerar todos los casos es tarea sencilla.

Ahora, el paso inductivo. Queremos demostrar que si se puede llenar un tablero de $2^k \times 2^k$ al que le falta un cuadrito con triminós en forma de L, entonces también se puede llenar un tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con las mismas condiciones.

La idea es tomar nuestro tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ y partirlo en cuatro tableros, trazando las dos perpendiculares a los lados que pasan por los puntos medios. Tenemos cuatro tableros de $2^k \times 2^k$ y el cuadrito que falta tiene que estar en alguno de esos cuatro[8]. Sin pérdida de generalidad, digamos que está en el sub-tablero inferior izquierdo. Luego, por hipótesis de inducción, ese sub-tablero de $2^k \times 2^k$ puede ser llenado. Para llenar los otros tres sub-tableros, bastaría con ingeniárnosla para quitarles un cuadrito a cada uno. El siguiente acomodo concluye la inducción:



Así, si se puede para cualquier tablero de $2^n \times 2^n$, debe poderse para el caso particular que nos corresponde.

[8] Este ataque de dividir puede llenarnos a otra demostración recursiva más directa: subdividiendo cada tablero en cuatro sub-tableros iguales, tomando el sub-tablero donde debe estar el hueco y repitiendo esto, obtenemos una cadena de si y solo si que termina en un tablero de 2x2.

Falsa Inducción

Vamos a demostrar que todas las pelotas del mundo son del mismo color[9] usando Inducción. Primero, el caso base. Tomamos una pelota. Claramente, dicha pelota es del mismo color que sí misma. Luego, suponemos que si tenemos n pelotas, todas deben ser del mismo color.

Ahora nos enfrentamos al caso de $n + 1$ pelotas. Separamos una de ellas, digamos la pelota X, y nos quedamos con n pelotas. Luego, por hipótesis de inducción, todas esas pelotas son del mismo color. Luego, tomamos una pelota cualquiera, digamos Y, y la cambiamos con la que dejamos fuera. Otra vez tenemos n pelotas por lo que todas deben ser del mismo color. Esto implica que X y Y son del mismo color entre ellas. Luego, las $n + 1$ pelotas son todas del mismo color.

Evidentemente, no todas las pelotas del mundo son del mismo color. ¿Cuál fue el error que cometimos en esta demostración?[10]

---

[9] Puedes pensar que todas son azules, por ejemplo. Este mismo razonamiento se puede usar para demostrar que todos los gatos son verdes o que todas las personas son mujeres.

[10] (Spoiler) Lo que está mal es el caso base. Aunque sea lo normal, $n = 1$ no es el caso base pues no es posible comparar más de una pelota cuando solo hay una pelota. El caso base debe ser $n = 2$ y no hay manera de demostrar que cualesquiera dos pelotas son del mismo color.

editorial dinosaurio