Inducción

Entrenamiento #10 para 3ª etapa
14-20 de mayo de 2016
Por: Favela ft. Lulú

Resumen

La inducción es uno de los métodos de demostración más utilizados, y por lo general funciona para cuando quieres demostrar una fórmula o una proposición para números, sucesiones, o cuando quieras demostrar algo *"para toda n"*. Incluso veremos ejemplos en otras áreas como geometría. Esta semana aprenderemos a utilizar inducción, para que no tengan excusa de no saber utilizarla.

1. Una analogía con dominós

La inducción matemática funciona como si tuvieran una fila de dominós parados en una superficie, y quisieras tumbar el primero, y que se tumben todos. La idea central de la inducción es: Tumbo el primer dominó manualmente, y reviso que si se tumba el dominó n, siempre se cae el que sigue (el $n+1$). Por lo tanto, si tumbo el primero, el primero tumba al segundo, y el segundo al tercero, y así sucesivamente se tumban todos, y todos somos felices.

2. Presentando a la Inducción Matemática

La inducción matemática es un método de demostración muy formal, y para que un problema hecho con inducción esté completo tiene que forzosamente tener estas tres componentes:

- **Base Inductiva:** Es donde intentamos el primer caso (tiene que ser el primero, para poder asegurar que se tumban todos los casos). Por lo general se utiliza $n = 1$.
- **Hipótesis de inducción:** Aquí suponemos que lo que queremos demostrar es cierto. $n = n$ (Simplemente es volver a decir eso, y creer que funciona)
- **Paso Inductivo:** Aquí revisamos el caso siguiente al de la hipótesis, el caso $n = n + 1$. Y tratamos de verificar que lleguemos a algo cierto utilizando la base inductiva o la hipótesis de inducción.

Una vez que tengamos esos tres pasos, habremos terminado con la inducción y demostrado lo que queríamos. Entonces, revisamos el primer caso, y supusimos que había un caso n por ahí en medio que cumplía, luego revisamos que el caso siguiente también cumple, si cumple el anterior. Entonces, si el primero cumple, cumplen todos. ¡Woohoo!

Ejemplo 1.
Demuestra que el producto de dos números enteros positivos consecutivos siempre es par.

Solución.
Comencemos con la **Base Inductiva**, que es nuestro primer caso:

$$BI : (1)(2) = 2$$

Una vez viendo que nuestra base inductiva cumple con lo que queremos proponer, pasamos a la **Hipótesis de Inducción**, que es la proposición para n:

$$HI : (n)(n+1) = 2k$$

Y la suponemos como cierta, para ir al **Paso Inductivo**, donde queremos demostrar lo siguiente:

$$PI : (n+1)(n+2) = 2q$$

Vamos a desarrollar el paso inductivo:

$$n^2 + n + 2n + 2 = 2q$$

Pero ya sabemos, por la Hipótesis de inducción, que $n^2 + n = 2k$, entonces vamos a sustituir eso en lo que ya tenemos:

$$2k + 2n + 2 = 2q$$

Y entonces concluimos que: si el caso n nos da par, el caso siguiente $(n+1)$ siempre nos da par. Entonces el primer caso nos da el segundo, y el segundo el tercero, y así sucesivamente se tumban todos los casos. ■

3. Agregados culturales

1. Contrario a lo que mucha gente piensa, se escribe dominós y no dominoes cuando se refiere al plural de la palabra dominó.

2. Los métodos de demostración que más utilizamos son: Demostración directa, contradicción, contrapositiva, inducción.

3. Si intentas demostrar lo que dice un problema en un examen con inducción (que esa sea toda tu solución), y no tienes los tres pasos completos tendrás 0 puntos. Así que te recomiendo que te acostumbres a usarlos y escribirlos.

4. Había una olímpica en Baja California que la mayoría de sus problemas los intentaba con inducción. Era su tema favorito.

5. Lamentablemente, esta es otra lista que no tiene un apartado de "*Problemas Jarcors*" como tal.

6. Se ha comprobado que las vacas son capaces de demostrar emociones, e incluso aumenta su ritmo cardíaco cuando se les desafía a abrir una puerta para conseguir comida. Algunas brincan de la emoción al lograrlo (como tú cuando resuelves ese problema que tenías pendiente).

4. Lista de problemas

4.1. Básicos

Demuestra las siguientes proposiciones para todos los enteros positivos n:

1. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (*Sumatoria de Gauss*)
2. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{(n)(n+1)}{2}\right)^2$ (*Teorema de Nicómaco*)
5. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
6. $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$
7. $6|n^3+5n$
8. $3|n^3-n+3$
9. $4|5^n-1$
10. $11|23^n-1$
11. $x-y|x^n-y^n$
12. $2^n\leq 3^n$
13. $(n+1)(n+2)\ldots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$

4.2. ¡Fibonaccis!

Les presento a la famosa sucesión de Fibonacci. Famosa aunque muy poca gente la entiende y sabe utilizarla, aunque los que la conocemos a fondo, sabemos que está en todas partes... sí, en todas partes, en serio.
La sucesión de Fibonacci $(0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots)$ se define por $F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+2}=F_n+F_{n+1}\ \forall\ n\geq 0$.
Utilizando estos números y la definición de la sucesión, hay que demostrar lo siguiente. ¿Qué, pensaban que sólo se las iba a presentar? ¡Al ataque!

1. $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$
2. $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$
3. $F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots$
4. $F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n-1}$
5. Si $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, entonces $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$
6. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$

4.3. Tutifrutti de Inducción

1. Demuestra que $n = 4, 5, 6, \ldots$ implica $2^n < n!$

2. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión aritmética con diferencia d. Probar que para $n \geq 2$ se tiene que: $a_n = a_1 + (n-1)d$

3. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión aritmética con diferencia d. Probar que para $n \geq 2$, la suma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de los primeros n términos de la sucesión se puede calcular así:
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

4. Sea α un número real tal que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Prueba que: $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

5. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ $(1+x)n \geq 1 + nx$ si $x \geq -1$ (*Desigualdad de Bernoulli*)

6. Sea S un conjunto con n elementos. Demuestra que el conjunto de todos los subconjuntos de S tiene 2^n elementos.

7. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

8. Un saltamontes está sentado en la primera casilla de una fila. Cada minuto brinca a la derecha con saltos de uno o dos cuadritos. ¿De cuántas maneras puede llegar a la n-ésima casilla?

9. Sea a_n el número de palabras de longitud n en el alfabeto $\{0, 1\}$, que no contiene a dos 1's a una distancia 2 de separación. Encuentra a_n.

10. "Las torres de Hanoi" es un rompecabezas con 3 clavos y 7 aros todos de diferentes tamaños. Inicialmente, todos los aros están en el mismo clavo ordenados por tamaños (el más chico arriba). El procedimiento es quitar el aro de hasta arriba de algún clavo y colocarlo en otro. No es permitido tener un aro más grande sobre uno más chico. ¿Es posible llegar a tener todos los aros en otro clavo con este procedimiento? ¿Cuál es el mínimo número de operaciones necesarias para resolver el rompecabezas? Encuentra una fórmula y demuéstrala.

11. N rectas dividen al plano en diferentes secciones. Encuentra el número de secciones formadas si cualquier par de rectas se intersecan y no hay tres que pasen por un mismo punto.

12. Prueba que la suma de ángulos internos de cualquier n-ágono es $180(n-2)$.

13. Todas las carreteras de Sikinia son de un sentido. Cada par de ciudades esta conectada por exactamente una carretera. Muestra que existe una ciudad puede ser accesada por cada una de las otras ciudades ya sea de manera directa, o vía a lo más otra ciudad.

14. **(Binomio de Newton)** Sean a y b números arbitrarios y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

15. Prueba que todos los enteros positivos impares se pueden escribir en la forma $a_0 + a_1 \cdot 2 + a \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$, para algún entero positivo n y cada $a_i = \pm 1$. (por ejemplo, $11 = 1 - 2 + 4 + 8$).

16. Determina el máximo común divisor de todos los números de la forma $16^n + 10n - 1$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$

17. Sea A_n el conjunto con los elementos $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Para cada subconjunto no vacío de A_n, es decir, con al menos un elemento, se calcula el producto de sus elementos, y se obtiene su recíproco. Sea S_n la suma de todos estos recíprocos. Encuentra S_{2013}.

18. Sean $n = 999\dots9$ y $m = aaa\dots a$ dos enteros positivos, cada uno con 2011 dígitos, y con $a \geq 4$. Encuentra la suma de los dígitos de $mn + 3$.

19. Si $a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$, $a_n = n + (-1)^n a_{n-1}$, ¿cuánto valen $a_{1000}, a_{2001}, a_{3002}, a_{4003}$?

20. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales está definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2015$, y para todo entero $n \geq 1$ como:

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}$$

Calcula el valor de:

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}$$

21. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$

22. $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$

23. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

24. $2304 | 7^{2n} - 48n - 1$

25. **(Pequeño Teorema de Fermat)** Sea a un entero positivo y p un primo. Entonces

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

26. Un número formado por 3^n dígitos iguales es divisible por 3^n.

27. S es un conjunto con n elementos. Prueba que la cantidad de subconjuntos de ese conjunto es 2^n.