Introducción a la teoría de números

Carmela Acevedo y Laura Vielma

La teoría de números tiene que ver con las propiedades de los *números naturales* 1,2,3,4..., también llamados *enteros positivos*. Estos números, unidos con los enteros negativos y el cero componen el conjunto de los números enteros. Las propiedades de estos números han sido estudiadas desde hace mucho tiempo. Por ejemplo, un entero es divisible por 3 sí y sólo sí la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

1. Divisibilidad

Divisores, múltiplos, números primos y compuestos son conceptos que se han conocido al menos desde los tiempos de Euclides, alrededor de 350 A.C. Las ideas fundamentales son usadas en la próxima sección.

Definicion 1.1 *Un entero b es divisible por un entero a, diferente a cero, si hay un entero x tal que $b = ax$ y escribimos $a \mid b$. En caso de que b no sea divisible por a, escribimos $a \nmid b$.*

Teorema 1.1

1. *$a \mid b$ implica $a \mid bc$ para todo entero c;*
2. *$a \mid b$ y $b \mid c$ implica que $a \mid c$;*
3. *$a \mid b$ y $a \mid c$ implica que $a \mid bx + cy$ para todo par de enteros x, y;*
4. *$a \mid b$ y $b \mid a$ implica que $a = \pm b$;*
5. *$a \mid b$, $a > 0, b > 0$, implica que $a \leq b$;*
6. *si $m \neq 0$, $a \mid b$ implica y es implicado por $ma \mid mb$;*

Pruebas

1. Si $a \mid b$ entonces existe un entero x tal que $b = ax$ y multiplicando ambos lados por c: $bc = (ax)c = a(xc)$ de donde $a \mid bc$;
2. Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces existen x, y tales que $b = ax, c = by$ de donde $c = (ax)y = a(xy)$ luego $a \mid c$;
3. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ de acuerdo con la primera propiedad, $a \mid bx$ y $a \mid cy$, luego existen enteros m, n tales que $bx = am, cy = an$. Sumando miembro a miembro ambas desigualdades se tiene $bx + cy = am + an = a(m + n)$ luego $a \mid (bx + cy)$
4. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces existen enteros x, y tales que $b = ax, a = by$ de donde $b = (by)z = b(yx)$ y por consiguiente $yx = 1$. Ahora bien, como x, y son enteros, se tiene necesariamente que $x = y = 1$ ó $x = y = -1$, de manera que $a = \pm b$;
5. Si $a \mid b$, entonces $b = ax$ para algún entero x. Como $a > 0$ y $b > 0, x$ necesariamente debe ser positivo, es decir, $x \geq 1$ y, en consecuencia $a \leq b$.

Teorema 1.2 *El algoritmo de la división. Dado enteros cualesquiera a y b, con $a > 0$, existen enteros únicos q y r tales que $b = qa + r, a > r \geq 0$. si $a \nmid b$, entonces r satisface la desigualdad más fuerte $a > r > 0$*

Prueba Considere la progresión aritmética

$$..., b - 3a, b - 2a, b - a, b, b + a, b + 2a, b + 3a, ...$$

En esta secuencia, seleccione el menor elemento, no negativo y se le denota r. Entonces, por definición r satisface las desigualdades del teorema. Pero, al mismo tiempo r siendo parte de la secuencia, es de la forma $b - qa$, y entonces q está definida en función de r. Para probar la unicidad de q y r supongamos que hay otro par q_1 y r_1 satisfaciendo las mismas condiciones. Primero, probamos que $r_1 = r$. Si no es así, podemos presumir que $r_1 > r$ tal que $a > r_1 - r > 0$, y luego vemos que $r_1 - r = a(q - q_1)$ y entonces $a \mid (r_1 - r)$ lo cual es una contradicción con el teorema 1.1 parte 5 entonces $r = r_1$ y también $q = q_1$.

2. Maximo Comun Divisor

Definicion 2.1 *El entero a es un divisor común de b y c en caso de que $a \mid b$ y $a \mid c$. Como hay una cantidad finita de divisores de un número distinto de cero entonces sólo hay una cantidad finita de divisores comunes de b y c, excepto en el caso en el que $b = c = 0$. Si al menos uno de b y c es distinto de 0, el mayor de los divisores en común se denota como (b, c).*

Teorema 2.1 *Si d=(a,b), entonces existen enteros x_0, y_0, tales que $d = ax_0 + by_0$.*

Para demostrarla, consideremos el conjunto de todos los números de la forma $ax+by$ donde x, y recorren los enteros. Naturalmente, de acuerdo con los valores que se asignen a x, y el conjunto contiene números positivos y negativos (y también al 0, tomando $x = y = 0$). El principio de buena ordenación garantiza que existe un elemento d que es el menor entero positivo.
Sea $d = ax_0 + by_0$. Vamos a demostrar que d es un divisor común de a y b. Para probar que $d \mid a$ procedemos en forma indirecta. Si suponemos que $d \nmid a$, de acuerdo con el algoritmo de la división existen enteros q, r tales que $a = dq + r$ y $d > r > 0$.
Pero entonces tenemos que $r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a - ax_0q - by_0q = a(1 - x_0q) + b(-y_0q)$ de manera que r está en el conjunto, lo cual contradice el hecho de ser d el menor entero positivo del conjunto. Por consiguiente, $d \mid a$. De manera análoga se verifica que $d \mid b$, por tanto d es un divisor común a y b.

Teorema 2.2 *El máximo común divisor g de b y c puede ser caracterizado como un entero positivo, divisor común de b y c, que es divisible por todos los otros divisores comunes*

Prueba Observamos que si d es cualquier divisor común de b y c, entonces $d \mid g$ por la parte 3 del Teorema 1.1. Además, no puede haber dos enteros distintos con esta propiedad por la parte 4 del mismo teorema.

Teorema 2.3 *Para cualquier entero m,*

$$(ma, mb) = m(a, b)$$

.

Es inmediato que md es un divisor común de ma y mb. Supongamos que d' es otro divisor común. Debemos probar que $d' \mid md$. En efecto, sabemos que existen enteros x, y tales que

$$ax + by = d$$

.
Multiplicando ambos miembros por m se tiene:

$$max + mby = md$$

luego si $d' \mid ma$ y $d' \mid mb$ entonces $d' \mid md$ por tanto

$$(ma, mb) = md = m(a, b)$$

.

Teorema 2.4 *Si (a,m)=(b,m)=1, entonces (ab,m)=1*

Prueba Existen enteros x_0, y_0, x_1, y_1 tales que $1 = ax_0 + my_0 = bx_1 = my_1$. Entonces podemos escribir $(ax_0)(bx_1) = (1 - my_0)(1 - my_1) = 1 - my_2$ donde y_2 está definido por la ecuación $y_2 = y_0 + y_1 - my_0y_1$. De la ecuación $abx_0x_1 + my_2 = 1$ notamos que cualquier divisor común de ab y m es divisor de 1 y entonces $(ab, m) = 1$.

Teorema 2.5 *Si c|ab y (b,c)=1, entonces c|a.*

Prueba Por el teorema 2.3 $(ab, ac) = a(b, c) = a$. Por la hipótesis $c \mid ab$ y es claro que $c \mid ac$ por ser un múltiplo de c entonces c es un divisor común de ab y ac por lo que divide al máximo común divisor que es a y entonces $c \mid a$

Teorema 2.6 *Si $(a, b) = d$ entonces* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

Prueba Si $(a, b) = d$, entonces existen x, y tales que $ax + by = d$, luego, $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = 1$ y en consecuencia $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

3. Mínimo Común Múltiplo

Si a, b son dos enteros no nulos, se dice que c es un múltiplo común de a y b si $a \mid c$ y $b \mid c$.
Es claro que todo par de enteros no nulos tiene múltiplos comunes, por ejemplo ab es un múltiplo común de a y b. El principio de la buena ordenación garantiza que existe un menor múltiplo común positivo de a y b. A éste se le llama *mínimo común múltiplo* de a y b y se le denota por $[a, b]$.

Propiedades

3.1 Si c es un múltiplo común de a y b, entonces $[a, b] \mid c$.

Prueba Sea $m = [a, b]$. De acuerdo con el algoritmo de la división, existen enteros q y r tales que $c = qm + r$ y $0 \leq r < m$.
Debemos probar que $r = 0$. Ahora bien, si fuese $r > 0$, como $a \mid c$, $a \mid m, b \mid c, b \mid m$ tendríamos que a y b serían divisiones de $c - qm = r$, esto es, r sería un múltiplo común de a y b, contradiciendo la definición de mínimo común múltiplo por cuanto $r < m$. La contradicción proviene de haber supuesto que $m \nmid c$, por tanto, queda demostrada la propiedad.

3.2 Si $m > 0$ entonces $[ma, mb] = m[a, b]$.

Prueba Como $ma \mid [ma, mb]$ se tiene que $m \mid [ma, mb]$ luego $[ma, mb] = mx_1$ para algún entero positivo x_1.
Sea $[a, b] = x_2$. Entonces $a \mid x_2$ y $b \mid x_2$, luego

$$ma \mid x_2, mb \mid mx_2$$

es decir, mx_2 es un múltiplo común de ma y mb y por tanto $[ma, mb] \mid mx_2$ luego, $mx_1 \mid mx_2, x_1 \mid x_2$ y entonces $x_1 \leq x_2$. Por otra parte se tiene que:

$$ma \mid mx_1, mb \mid mx_1$$

Luego,

$$a \mid x_1, b \mid x_1 x_2 \mid x_1$$

y entonces $x_2 \leq x_1$ lo cual, con lo anterior lleva a que $x_1 = x_2$, luego $[ma, mb] = m[a, b]$.

3.2 Si $a > 0, b > 0$ entonces $[a, b](a, b) = ab$. En general, $[a, b](a, b) = |ab|$.

Prueba Supongamos primero que $(a, b) = 1$. $[a, b]$ es un múltiplo común de a, luego $[a, b] = ax$ para algún entero positivo x. Pero tenemos además que $b \mid ax$ y como $(a, b) = 1$ entonces necesariamente $b \mid x$, luego $b \leq x$ y $ab \leq ax$. Ahora bien, como ab es un múltiplo común positivo de a y b, no puede ser menor que su mínimo común múltiplo, por lo cual concluimos que $[a, b] = ab$.
Consideremos ahora el caso general en el cual $(a, b) = d > 1$. Entonces $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ son enteros tales que $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, luego podemos escribir

$$\left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right]\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{ab}{d^2}$$

Multiplicando ambos miembros por d^2 y tomando en cuenta las propiedades 3.2 y 2.3 nos queda

$$[a, b](a, b) = ab$$

. Obsérvese que $[a, b] = [a, -b]$ y $(a, b) = (a, -b)$, luego en general si a o b son negativos se cumple que

$$[a, b](a, b) = |ab|$$

.

4. Números Primos

En el conjunto de los números enteros positivos, se observa que el número 1 tiene un único divisor, el propio 1. En este sentido, el 1 constituye un caso particular. Cualquier entero positivo $n > 1$ admite, por lo menos, dos divisores: 1 y n.
Se dice que un entero positivo $p > 1$ es un *número primo* si únicamente admite dos divisores positivos: 1 y p. Por ejemplo 2,3,5,7... son números primos. Si un entero positivo tiene más de dos divisores positivos diferentes, es un *número compuesto*.
El número 1 no es ni primo ni compuesto.
El resultado fundamental de esta sección establece que todo entero positivo mayor que 1, puede ser expresado en forma única como producto de factores primos (si el entero es un número primo, puede considerarse como producto de un solo factor). Para demostrar esto necesitamos usar dos propiedades previas.

Lema 4.1 *Cualquier entero n mayor que 1 puede ser expresado como un producto de primos (posiblemente de sólo un factor)*

Prueba Si un entero n es primo, entonces el entero por si solo se considera como el producto de un solo fator. De lo contrario n puede ser factorizado en, digamos, $n_1 n_2$, donde $1 < n_1 < n$ y $1 < n_2 < n$. Si n_1 es primo, se mantiene así, de lo contrario se factoriza como $n_3 n_4$. Análogamente con n_2. Este proceso de escribir cada número compuesto como el producto de sus factores debe terminar porque los factores son menores que el número compuesto en cuestión, y además cada factor es un entero mayor que 1. Así que podemos escribir n como el producto de primos, y como los factores primos no son necesariamente distintos podemos escrbir $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, donde $p_1, p_2, ..., p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son positivos.

Lema 4.2 *Si $p \mid ab$, p siendo un primo, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.*

Prueba Si $p \nmid a$, entonces $(a,p) = 1$ y entonces $p \mid b$.

Teorema fundamental de la Aritmética Todo entero positivo $n > 1$ puede expresarse como un producto de factores primos de forma única (salvo el orden en que aparezcan los factores).

Prueba De nuevo procederemos por reducción al absurdo. El primer lema nos dice que todo entero mayor que 1 puede expresarse como producto de números primos. Admitamos que hay enteros que tienen más de una descomposición en factores primos y supongamos (de acuerdo con el principio de la buena ordenación) que m es el menor entero positivo que satisface tal condición. Entonces

$$m = p_1 p_2 ... p_i = q_1 q_2 ... q_j \tag{1}$$

donde los p's y q's son primos (evidentemente, diferentes de m). Entonces $p_1 \mid q_1 q_2 ... q_j$, y, de acuerdo con el segundo lema, p_1, divide a alguno de los factores del producto $q_1 q_2 ... q_j$. Podemos suponer (reordenando los factores si es necesario) que $p_1 \mid q_1$. Como p_1 y q_1 son primos, se tiene que necesariamente $p_1 = q_1$ y entonces, simplificando por $p_1 = q_1$ en la expresión (1) se tiene

$$\frac{m}{p_1} = p_2 ... p_i = q_2 ... q_j \tag{2}$$

Como $p_1 \mid m_1$, $\dfrac{m}{p_1}$ es un entero m_1 y entonces $m_1 < m$. Pero entonces, la expresión (2) muestra que m_1 es un entero menor que m que tiene más de una descomposición en factores primos. Esta contradicción demuestra el teorema.
Entonces podemos escribir a n como: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, donde $p_1, p_2, ..., p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son positivos. Esta manera de escribirlo se llama la *forma canónica* del entero n.

(Euclides) *La cantidad de números primos es infinita.*

Prueba Supongamos que $p_1, p_2, ..., p_r$ son los primeros r primos. Luego formamos el número $n = 1 + p_1 p_2 ... p_r$. Notemos que n no es divisible por p_1 o p_2 o... o p_r. Entonces cualquier primo divisor p de n es distinto a $p_1, p_2, ..., p_r$. Como n es o primo o tiene un factor primo p, esto implica que hay un primo distinto a los anteriores. Por lo que vemos que para cualquier cantidad finita r, el número de primos no es r. Entonces la cantidad de números primos es infinita.

Teorema 4.5 *Para todo número entero positivo k, existen k números compuestos consecutivos.*

Prueba En efecto, consideremos los números

$$(k+1)! + 2, (k+1)! + 3, (k+1)! + 4, ..., (k+1)! + (k+1).$$

En general, si $2 \le n \le k+1$ entoces, $(k+1)! + n$ es divisible por n y es diferente de n, por tanto, es un número compuesto.
Esto nos dice que en el conjunto de los números enteros positivos es posible hallar "lagunas", tan grandes como se quiera, en las cuales no aparezca ningún número primo.

Teorema 4.6 *Si n es un número compuesto entonces existe un primo p tal que $p \mid n$ y $p \le \sqrt{n}$*

Prueba Si n es un número compuesto entonces existen enteros positivos x, y tales que $n = xy$, con $2 \le\le y < n$. Si $x \le y$ entonces $x^2 \le xy = n$ de donde $x \le \sqrt{n}$. Si p es un primo tal que $p \mid x$ entonces $p \le x$ y se concluye que $p \le \sqrt{n}$.
De acuerdo con este resultado se tiene que para verificar si un número dado n mayor que uno es primo o no, es suficiente ver si es divisible o no por alguno de los primos $p \le \sqrt{n}$. Si no lo es entonces n es primo.

5. Induccion

Una propiedad muy importante de los números naturales es que son ordenados de tal forma que para todo número natural n siempre sabemos cual es su sucesor $(n+1)$. es más, dados dos números naturales a y b, siempre es posible dar una lista de todos los números naturales que bajo el orden quedan entre ellos. De tal propiedad podemos derivar el principio de inducción que dice:

1. Si la propiedad P se cumple para un número natural m y,
2. Si siempre que la propiedad P es cierta para algún número natural k, es también cierta para el siguiente número natural, es decir, para $k+1$,

entonces se puede afirmar que la propiedad P es cierta para todo número natural n mayor o igual a m.

El principio de inducción puede demostrarse a partir del principio de buena ordenación.

En efecto, supongamos que A es un conjunto de enteros positivos que contiene al 1 y que, siempre que $n \in A$ entonces también $(n+1) \in A$. Para probar que $A = Z^+$ bastará demostrar que el conjunto A', formado por todo los enteros positivos que no pertenecen a A es vacío. Lo probaremos por reducción al absurdo, que consiste en negar la tesis que se pretende demostrar y, a partir de allí, llegar a un resultado contradictorio.

Supongamos que $A' \neq \emptyset$; entonces, de acuerdo con el principio de la buena ordenación A' contendrá un menor elemento m. Como $1 \in A$, necesariamente $m > 1$ y, en consecuencia, $m-1$ es positivo. Como además $m-1 < m$ y m es el menor elemento A', se tiene que $(m-1) \in A$. Pero entonces, por hipótesis, $(m-1)+1 = m \in A$. Esta contradicción proviene de haber supuesto que $A' \neq \emptyset$. Esto concluye la prueba.

A continuación daremos un par de ejemplos sobre cómo se procede para demostrar algunas propiedades usando el principio de inducción:

Problema Probar que para todo entero positivo n se tiene:

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La prueba por inducción requiere, en primer lugar, la demostración para $n=1$. En este caso es inmediata, por cuanto:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

En segundo lugar supongamos la igualdad válida para un cierto valor de n (ésta es llamada la *hipótesis de inducción*), e intentemos demostrarla para $n+1$.

Se tiene, por la propiedad asociativa de la adición:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+...+n)+(n+1)$$

y, de acuerdo con la hipótesis de inducción:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

.

Pero esta es, precisamente, la igualdad para $n+1$ sumandos, con lo cual completamos la demostración.

6. Problemas

Para poner en práctica los teoremas y definiciones aquí expuestos, se proponen los siguientes problemas.

1. Encuentre el número de divisores positivos de 48 y 300 respectivamente.

   Solución: Los divisores positivos de 48 los podemos listar fácilmente: 1,2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, y 48, así pues hay 10 divisores positivos de 48. Los divisores de 300 también los podriamos listar, solamente que sería muy tedioso. Por ello, lo haremos de otra manera. Expresando a 300 como un producto de primos $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$. Obsérvese que todo divisor de 300 será de la forma $2^p \times 3^q \times 5^r$, con $p = 0, 1$ ó $2; q = 0,$ ó 1 y $r = 0, 1$ ó 2. Es decir a p lo podemos escoger de tres formas, a q de dos y a r de tres. Por el principio fundamental del conteo, los posibles divisores de 300 serán $3 \times 2 \times 3 = 18$.

   Observe que este procedimiento puede utilizarse para el caso anterior, ó bien en cualquier otro caso.

2. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20! ?

   Solución: Como $20! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20$. Escribiendo todos los números en sus números primos, $20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$. Se tiene que un número divide a 20! si es de la forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g \times 19^h$. Con $0 \leq a \leq 18; 0 \leq b \leq 8; 0 \leq c \leq 4; 0 \leq d \leq 2; 0 \leq e, f, g, h \leq 1$. Por lo que 20! Tendrá $19 \times 9 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 41,040$ posibles divisores.

3. ¿ Cuántos enteros entre 100 y 1000 son divisibles entre 7 ?

   Solución: Los enteros divisibles entre 7 son los de la forma $7k$ donde k es cualquier entero. $100 < 7k < 1000 \Rightarrow \frac{100}{7} < k < \frac{100}{7} \Rightarrow 14{,}2 < k < 142{,}8$ Así pues k debe satisfacer: $15 \leq k \leq 142$, habiendo por lo tanto $(142-15)+1 = 128$ múltiplos de 7 entre 100 y 1000.

4. Demuestre que si n es impar , entonces $8|(n^2-1)$.

   Solución: $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Además sabemos que en dos enteros consecutivos siempre hay uno par, es decir, $k(k+1) = 2m$, y por lo tanto, $n^2 - 1 = 4(2m) = 8m$, lo cual significa que es múltiplo de 8 o lo que es lo mismo 8 es un divisor de $n^2 - 1$.

5. El entero N es divisible por 2 si el dígito de las unidades es par. Dicho de otra manera para un entero de cuatro cifras $N = abcd$ es divisible por 2 si d es divisible por 2, es decir $2|d \Rightarrow 2|N$

   Solución: Expresemos al entero $N = abcd$ de la forma: $N = d + 10c + 100b + 1000a$ Como 2 es un divisor de 10, 100 y 1000, por el teorema 1.1 parte 3, 2 es un divisor de $10c + 100b + 1000a$ y si $2|d$ entonces, por el mismo resultado, $2|(d + 10c + 100b + 1000a)$, es decir $2|N$.

6. El entero N es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3. Dicho de otra manera para un entero de cuatro cifras $N = abcd$ es divisible por 3 si $a + b + c + d$ es divisible por 3, es decir $3|(a + b + c + d) \Rightarrow 3|N$.

   Solución: Expresemos al entero $N = abcd$ de la forma: $N = d+10c+100b+1000a$ Obsérvese que en este caso 3 no es divisor de las potencias de 10, pero si de ellas disminuidas en una unidad para lo cual expresamos a N de la forma: $N = d+9c+c+99b+b+999a+a$ y como $3|(9c+99b+999a)$ entonces claramente si $3|(a+b+c)$ entonces por el teorema 1.1, 3 dividirá a la suma de estos, la cual es N, es decir, si $3|(9c + 99b + 999a)$ y $3|(a + b + c)$ entonces $3|(d + 10c + 100b + 1000a)$.

7. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

   Solución: Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis. Como $200 = 2 \times 100 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 101 personas del mismo sexo.
   $101 = 5 \times 20 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 21 personas de la misma edad y sexo.
   $21 = 4 \times 5 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

8. Un auditorio tiene 75 filas con 43 asientos cada una. El total de los asientos está numerado de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 2001?, ¿qué lugar ocupa en esa fila el asiento mencionado?.

   Solución: Observe que el numero de fila que ocupa un asiento es el residuo de dividir el número del asiento entre 43 y el número que ocupa en esa fila es el cociente incrementado en una unidad, es decir como $2001 = (43)(46) + 23$, concluimos que el asiento 2001 se encuentra en la fila número 47 ocupando el lugar 23.

9. En el pizarrón está escrito un número de tres cifras, todas distintas. Ana intercambia la primera cifra con la última. La suma del número escrito en el pizarrón más el número de Ana es igual a 92 veces la suma de las dígitos del número escrito en el pizarrón. Determinar todos los posibles valores del número escrito en el pizarrón.

   Solución: Sea abc el número de tres dígitos escrito en el pizarrón.

   $$abc + cba = 92(a + b + c)$$

   Expresando los números de tres dígitos en notación decimal, tendremos la ecuación:

   $$100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 92(a + b + c)$$

   resolviendo esta ecuación tenemos: $9a + 9c = 72b$, o equivalentemente $a + c = 8b$ Como a, b y c son los dígitos del 0 al 9, b sólo puede tomar los valores 1 y 2.

   - Caso 1: Si $b = 1, a + c = 8$ y entonces las posibilidades para a y c respectivamente serán: $a = 2, 6, 3, 5$ y $c = 6, 2, 5, 3$ siendo los números buscados en este caso: 216, 612, 513 y 315.
   - Caso 2: Si $b = 2, a + c = 16$ y entonces las posibilidades para a y c respectivamente serán: $a = 9, 7$ y $c = 7, 9$ siendo en este caso dos posibilidades: 927 y 729.

   De acuerdo a los casos 1 y 2, los números buscados son: 216, 612, 315, 513, 729 y 927.

10. Alicia va al club cada día; Beatriz va cada dos días; Carlos va cada tres; Daniel cada cuatro; Enrique cada cinco; Francisco cada seis y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelven a reunirse?

    Solución: La próxima vez que se reúnan será de m días, donde m es el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Por lo tanto m = 420. Así pues se volverán a reunir dentro de 420 días.

11. Ana y Luis forman parte de un grupo de niños y niñas que visitan un parque de diversiones. Si cada niño paga \$19 y cada niña paga \$13. ¿Cuántos niños y cuántas niñas entraron al parque si en total, gastaron \$323 ?

    Solución: Sea H el número de niños y M el número de niñas. Tenemos que encontrar las soluciones enteras y positivas de la siguiente ecuación: Observe que ni H ni M pueden tomar el valor cero.

    $$19H + 13M = 323$$

    despejando H obtenemos:

    $$H = \frac{323 - 13M}{19}$$

    Tomando en cuenta que 323 es divisible entre 19, entonces $13M$ tiene que ser múltiplo de 19 y menor que 323, lo cual se cumple sólo para $M = 19$. En consecuencia $H = 4$. Así pues al parque entraron 19 niñas y 4 niños.

12. En un concurso de Matemáticas, 3 problemas, A, B, C son propuestos. Los 25 participantes resuelven al menos un problema cada uno. De todos los que no resolvieron A, el número de estudiantes que resolvieron B es el doble de los que resolvieron C. El número de estudiantes que resolvieron sólo A es uno más que el número de estudiantes que resolvieron A y al menos otro problema. De todos los estudiantes que resolvieron justo un problema, la mitad no resuelve el A. ¿Cuántos estudiantes resuelven sólo B?

Solución: Sean a, b, c, ab, bc, ac y abc el número de estudiantes que resolvieron sólo A, B, C, A y B, B y C, A y C, A y B y C, respectivamente. Observación: xy no significa el producto de x con y, sino el número de alumnos que resolvieron simultáneamente el problema X y el problema Y.

$$bc = b - 2c,$$

$$a - 1 = ab + ac + abc$$

$$a = b + c$$

$$a + b + c + ab + ac + bc + abc = 25$$

de aquí tenemos que:

$$bc = 26 - 3a \Rightarrow a \leq 8,$$

pero $bc = b - 2c = a - 3c \Rightarrow 4a - 3c = 26$, pero $c \leq 2$, para que a sea entero es necesario que $c = 2$, luego $a = 8$ y por lo tanto $b = 6$.

Finalmente sólo 6 alumnos resolvieron únicamente el problema B.

13. Hallar los dígitos a y b tales que el número de 5 cifras $2a4b2$ es múltiplo de 9. Dar todas las posibilidades.

Solución: Como $2a4b2$ es múltiplo de 9, la suma de sus dígitos también lo es, es decir, $8 + a + b = 9k \quad a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ lo cual nos lleva a las siguientes dos posibilidades para $a + b$: 1. $a + b = 1 \Rightarrow (a, b)$ es (0 , 1) ó (1, 0) obteniendo los números: 20412 y 21402. 2. $a + b = 10 \Rightarrow (a, b)$ es (9, 1), (1, 9), (8, 2), (2, 8), (7, 3), (3, 7), (4, 6), (6, 4), (5, 5) obteniendo los números: 29412, 21492, 28422, 22482, 27432, 23472, 24462, 26442 y 25452.

14. Escribe todos los números mayores que 6,000 y menores que 10,000 que tienen el producto de sus dígitos igual a 343.

Solución: Como la factorización de $343 = 7^3$ y los números buscados son de cuatro cifras, las únicas posibilidades son: 7771, 7717 y 7177.

15. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{35} \times 5^{38}$?

Solución: Reescribimos $2^{35} \times 5^{38} = 2^{35} \times 5^{35} \times 5^3 = 10^35 \times 125 = 125000\ldots0$. Esto es 125 con 35 ceros al final nos dan 38 cifras.

16. Los números naturales a y b son tales que: $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es entero. Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$.

Solución: Se tiene

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}.$$

Sea $d = (a, b)$. Como ab es divisible por d^2, entonces $a^2 + b^2 + ab$ es divisible por d^2 y también lo son $a^2 + b^2$ y $a + b$, y al ser a y b naturales, se tiene:

$$a + b \geq d^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} \geq d.$$

17. Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución: Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras. Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, resulta $11 \leq s \leq 21$. Si $n = xyzt$, tenemos: $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ y $x + y + z + t = s$ restando queda: $999x + 99y + 9z = s^3 - s$ cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que $s^3 - s = (s-1)s(s+1)$ y por ser $11 \leq s \leq 21$ sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9: $16 \times 17 \times 18; \quad 17 \times 18 \times 19$y $18 \times 19 \times 20$ sustituimos en $999x + 99y + 9z = s^3 - s$ y analizamos cada caso.

- $999x + 99y + 9z = 16 \times 17 \times 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ resulta inmediatamente $x = 4; y = 9; z = 1$, valores que llevados a $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$.
- $999x + 99y + 9z = 17 \times 18 \times 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5; y = 8; z = 3$, valores que llevados a $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5832$.
- $999x + 99y + 9z = 18 \times 19 \times 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ resulta $x = 6; y = 8; z = 6$, valores que llevados a $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ con $s = 19$ resulta una contradicción. Resumiendo, las únicas soluciones son 4913 y 5832.

18. Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.

    - ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
    - ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

    Solución: La longitud del lado del cuadrado tiene que ser un divisor de 256 y de 96, y además debe ser el mayor divisor común; luego hay que calcular (256, 96). $256 = 2^8; 96 = 2^5 \times 3$ por lo que $(256, 96) = 2^5 = 32$. La longitud del lado del cuadrado es de 32 cm. Por otro lado, el área de la plancha de madera es $256 \times 96 = 24{,}576$ cm^2 y el área de uno de los cuadrados es $32 \times 32 = 1{,}024$ cm^2. De la plancha de madera se obtienen $24{,}576 \div 1{,}024 = 24$ cuadrados.

19. Un viajante va a Caracas cada 18 días, otro va a Caracas cada 15 días y un tercero va a la misma ciudad cada 8 días. El día 10 de enero coincidieron en Caracas los tres viajantes. ¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Caracas estas mismas personas?

    Solución: El número de días que han de transcurrir como mínimo para que los tres viajantes vuelvan a coincidir en Caracas tiene que ser un múltiplo de 18, de 15 y de 8, y además tiene que ser el menor múltiplo común; luego hay que calcular el [18,15, 8]. Se sabe que $18 = 2 \times 3^2; 15 = 3 \times 5; 8 = 23$ por tanto, el $[18, 15, 8] = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

    Los tres viajantes volverán a coincidir en Caracas dentro de 360 días.

20. Demostrar por inducción que si $n \geq 1$, se cumple:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Solución:

a) La igualdad se cumple para $n = 1$ ya que $1 = \frac{1(3\times 1-1)}{2}$.

b) Supongamos que la igualdad se cumple para $n = k$: $1+4+7+\ldots+(3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$. (Hipótesis Inductiva).

c) Queremos demostrar que la igualdad también se cumple para $n = k + 1$ es decir, $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{(k+1)[(3(k+1)-1)]}{2}$.
Para ello partimos de la Hipótesis Inductiva y le sumamos el término que falta a ambos lados de la igualdad, es decir, $[3(k + 1) - 2]$.
Entonces, se tiene $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{k(3k-1)}{2} + [3(k + 1) - 2]$.
Operando en el lado derecho de la igualdad, se tiene $1+4+7+\ldots+(3k-2)+[3(k+1)-2] = \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} = \frac{3k^2-k+6k+2}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2}$.
Pero observemos que con una breve factorización $\frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(3(k+1)-1)]}{2}$.
Por tanto, queda comprobada la certeza de la igualdad.