Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
Entrenamiento estatal.
Invariantes.

Diremos que una propiedad P es invariante ante la trnsformación T si al aplicar la transformación T P, no cambia. Para poder esclarecer esto vemos la propiedad de paridad:

Paridad.

Una propiedad interesante de los números pares, es que su suma, resta y múltiplicación, siempre nos da números pares[1]. Así mismo, un número impar al sumarle o restarle un número par, seguirá siendo impar. Esto lo podemos decir de la siguiente manera: *La paridad de un entero no cambia si le sumamos o restamos un par.* Formalmente:

Proposición 1 *1. La suma, resta y multiplicación de dos números pares, nos da como resultado un número par.*

2. La paridad de un entero es invariante ante sumas y restas de pares.

Demostración: Sean a', b', dos números pares, por definición estos son enteros múltiplos de 2. Luego, existen enteros a, b tales que $2a = a'$ y $2b = b'$. Por lo anterior, tendremos que:

- $a' + b' = 2a + 2b = 2(a + b)$
- $a' - b' = 2a - 2b = 2(a - b)$
- $a' \times b' = 2a \times 2b = 2(2ab)$

Por otra parte, para demostrar que la paridad es invariante ante sumas y restas de enteros, tomemos un entero cualquiera a, se dan dos casos posibles:

1. **a Es par:** Por lo que acabamos de demostrar, al sumarle o restarle un número par, el resultado será par.
2. **a Es impar:** Sumemos *(restemos)* un par b y digamos que el resultado es c. Si c fuera par, al restarle *(sumarle)* b, que tambien es un par, deberá dar un resultado par, pero a es impar, lo cual es una contradicción.
   Concluimos que al sumarle o restarle un par, el resultado seguira siendo impar.□

Ejemplo 1 *En el pizarrón se tienen escritos once números 1. Se permite tomar dos números y sumarle 1 a ambos, restarle 1 a ambos, o sumarle 1 a uno y restarle 1 al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en el pizarrón once números 10? (16a Olimpiada en San Luis Potosí).*

[1] Es fácil ver que en el caso de la división no siempre es así, como ejemplo tomemos $6/2 = 3$.

Solución: Llamemosle s a la suma de los números escritos en el pizarrón en determinado momento y notemos que mediante estas operaciones hay tres posibles resultados para s:

- **Tomar dos números y a ambos sumarles 1:** Si la suma era s; la nueva suma será $s + 2$.

- **Tomar dos números y a ambos restarles 1:** Si la suma era s; la nueva suma será $s - 2$.

- **Tomar dos números, a uno sumarle 1 y al otro restarle 1:** Si la suma era s; la nueva suma será $s + 1 - 1 = s$.

En cualquier caso, **la paridad** de la suma **no cambia**, y como el primer resultado de s es 11, el cual es impar, al aplicar las operaciones sólo podremos tener resultados impares. Por otra parte, la suma de once 10's es 110, el cual es un número par. Por lo tanto, no es posible llegar a pintar once números 10 en el pizarrón.
$\square$

Este fué un ejemplo en que la paridad de la suma fué el invariante. En lo sucesivo, será conveniente buscar algún invariante (si no es que inventarlo). Esto nos ayudará a resolver los siguientes:

Problemas de paridad

1. María y sus amigos están sentados formando un círculo, y de forma que los dos vecinos de cada amigo son del mismo sexo. Si de los amigos de María cinco son hombres, ¿cuántas mujeres hay?

2. Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamientos de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?

3. Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1 cm, el segundo día recorre 2 cm, y así sucesivamente, ¿será posible que después de 17 días el gusano se encuentre en el lugar donde partió?

4. ¿Es posible dibujar una línea quebrada de 11 segmentos, cada uno de los cuales se intersecta exactamente con uno de los otros segmentos?

5. Prueba que un polígono cerrado que no se intersecta a si mismo y cuyos lados son verticales u horizontales, tiene un número par de lados.

6. Consideremos el siguiente tablero

-1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1

Se permite cambiar de signo cualquier fila, columna o diagonal principal tantas veces como se quiera. ¿puede conseguirse que todos los elementos acaben siendo positivos?

7. Dos jugadores A, B y otras 2011 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

8. Considere la cuadrícula de 100×100:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 99 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 100 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 100 & 1 & 2 & \dots & 98 & 99 \\ 100 & 1 & 2 & \dots & 98 & 99 \end{array}$$

   En la cuadrícula podemos sumarle o restarle un mismo número a todos los elementos de un renglón de una columna. Con esta operación ¿es posible que en la cuadrícula haya puros 100?

9. ¿Pueden separarse los números del 1 al 100 en doce subconjuntos de forma que cada uno de ellos estéformado por términos de una misma sucesión geométrica?

10. Tenemos los números del 1 al 2011, si en cada paso podemos cambiar dos números calesquiera por su diferencia, demostrar que habrá un par despues de 2010 pasos.

11. Tenemos un tablero de Ajedrez pintado de la forma regular. En cada paso podemos repintar todos los cuadrados de un renglón o de una columna o bien repintar un cuadrado de 2×2 ¿Se puede llegar, a través de estos pasos a tener un sólo cuadrado pintado de negro?

12. Se tienen cinco ceros u cuatro unos en un círculo. Entre cada dos cifras, si son iguales se pone un cero; si son diferentes se pone un uno; Despues borramos los número originales. Demuestra que no es posible, usando estos pasos Llegar, a tener rodos los números iguales.

13. Generaliza el ejercico anterior.

14. En un tablero tienes fichas blancas, negras y rojas. En cada movimiento puedes elegir dos fichas de diferente color y sustituirlas con dos fichas del tercer color. Encuentra las condiciones necesarias para que, a través de estos movimientos llegues a tener todas las fichas de un mismo color.

15. En el ejerccio anterior, si tienes 13 blancas 15 rojas y 17 negras. ¿Qué estados puedes obtener con estas fichas?