

## 1. Introducción

El tema que veremos a continuación, es una técnica para resolución de problemas, especialmente útil en combinatoria, pero es aplicable en prácticamente todas las ramas de las matemáticas, e incluso fuera de ella. La manera más sencilla de entender en que consiste la invarianza, es con un ejemplo

**Ejemplo 1.1.** *Se tiene un tablero de ajedrez de  $8 \times 7$ , con un caballo en la casilla  $(1, 1)$ . Es posible llegar en una cantidad par de movimientos a la casilla  $(7, 8)$ ?*

**Solución** Notemos que el caballo de ajedrez, en un movimiento, cambia el color de la casilla en la que está (blanco-¿negro y viceversa). Y las casillas  $(1, 1)$ ,  $(7, 8)$  tienen colores diferentes. En una cantidad par de movimientos, como el color de la casilla en la que está el caballo va cambiando con cada movimiento, será del mismo color siempre. Por lo tanto después de una cantidad par de movimientos, el caballo mantendrá el color de la casilla en la que está. Así que no puede acabar en una casilla de color distinto.

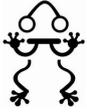
Este ejemplo nos muestra la estrategia de la invarianza, que consiste en buscar cosas constantes, que no cambian sin importar que se haga, en este caso, que el caballo siempre debe terminar en el mismo color que en el que empezó. Esta propiedad constante, la llamaremos una invarianza, y existen algunas técnicas comunes para descubrir estas características. En la mayoría de los ejemplos que veremos descubrir la invarianza, será la clave importante que resuelve el problema, pero muchas veces, puede ser que solo sea un componente del problema.

## 2. Coloración

La técnica de coloración, consiste en colorear de cierta manera el problema, especialmente en los problemas que tienen un tablero. La manera de colorear el tablero puede variar según el problema y puede haber de distintas maneras.

**Ejemplo 2.1.** *Es posible cubrir un tablero de  $10 \times 10$  con piezas en forma de L sin que se traslapen ni salgan del tablero?*

**Solución** Coloreamos las columnas impares de negro, y las columnas pares de blanco. Veamos que cada ficha sin importar como se ponga (si se pone de manera válida) cubrirá 3 casillas de un color, y 1 del otro color. Llamémosle ficha negra si cubre 3 casillas negras y 1 blanca, y ficha blanca si cubre 3 fichas blancas y 1 negra. Notemos que debe haber la misma cantidad de fichas negras y de fichas blancas. Entonces si hay  $n$  fichas blancas, habrán en total  $8n$  casillas

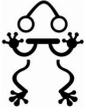


cubiertas en total. Pero hay 100 casillas en total, que no es múltiplo de 8, por lo tanto no se puede cubrir el tablero.

La coloración se puede usar de muchas maneras, y encontrar la coloración adecuada, y aplicarla de manera correcta, puede ser bastante complicado, así que hacer muchos problemas, es muy importante para usarla de manera eficiente.

### 3. problemas

1. En un pizarrón se han escrito los números del 1 al 100, y un movimiento consiste en borrar 2 números  $a, b$  del pizarrón y escribir el número  $a + b$ . Que número quedara escrito al final?
2. sobre una mesa hay 11 vasos, 5 de ellos boca arriba, y 6 de ellos boca abajo. Un movimiento consiste en escoger 2 vasos cualquiera y voltearlos. Es posible dejar todos los vasos boca arriba? y boca abajo?
3. Hay una escalera de 10 escalones, y en cada uno de los escalones hay una rana. Cuando una rana baja un escalón, hay exactamente otra que sube, y viceversa (las ranas solo pueden moverse en parejas). Es posible que las 10 ranas terminen en un mismo escalón?
4. en la isla de los camaleones, hay 13 camaleones amarillos, 15 verdes, y 17 rojos. Cuando dos camaleones de diferente color se encuentran, automáticamente cambian al tercer color. Es posible que en algún momento todos los camaleones sean del mismo color?
5. probar que un tablero de  $10 \times 10$ , no se puede cubrir con fichas de  $1 \times 4$ .
6. Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto  $P$  del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a  $P$  en su interior, es par.
7. En un tablero de  $m \times n$  un camino es una sucesión de casillas de tal manera que dos casillas consecutivas comparten un lado. Demuestra que existe un camino que empieza y termina en la misma casilla, y pasa por todas las demás casillas exactamente una vez si y solo si alguno de los números  $m$  o  $n$  es par y ambos son mayores o iguales a 2
8. En un tablero de  $8 \times 8$  hay un foco en cada casilla. Inicialmente todos los focos están apagados. Un movimiento consiste en elegir un foco y una dirección (vertical o horizontal) y cambiar el estado de ese foco y todos sus vecinos en esa dirección. Después de cierta cantidad de movimientos, queda exactamente un foco prendido. Encuentra todas las posibles posiciones de ese foco.



9. Se tiene un tablero de  $1001 \times 1001$ . Se quieren colorear algunas casillas de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:
- Si 2 casillas comparten un lado, entonces al menos una de las dos esta coloreada.
  - Si 6 casillas son consecutivas (horizontal o verticalmente), entonces entre ellas hay al menos dos casillas consecutivas coloreadas.

Encuentra el mínimo numero de casillas que se deben colorear para satisfacer estas dos condiciones.

10. se tiene un 99-énagono regular cuyos lados estan pintados de rojo, azul o amarillo. Inicialmente se pinta cada lado del pólígono de la siguiente maners: rojo, azul,rojo, azul,..., rojo, azul, amarillo. En un paso se permite cambiar el color de un lado del polígono a otro, de manera que no haya 2 lados adyacentes que tengan el mismo color. Es posible llegar a una coloracion de rojo,azul,rojo,azul,..., rojo, amarillo, azul en una cantidad finita de pasos?(notese que las dos coloraciones estan dadas en el mismo sentido, pero no necesariamente en los mismos lados).
11. En un tablero de  $n \times n$  se pintan las casillas de blanco o de negro. 3 de las esquinas estan pintadas de bkanco y 1 esta pintada de nergro. Demuestra que hay un cuadrado de  $2 \times 2$  con una cantidad impar de casillas blancas.
12. Se tiene un torneo de tenis de  $n$  jugadores, de manera que cualesquiera dos juegan entre si. Se sabe que no hay empate. Si  $P_i$  es la cantidad de partidas que perdio el jugador  $i$ , y  $G_i$  es la cantidad de partidas que gano el jugador  $i$ . Demuestra que  $P_1^1 + P_2^2 + \dots + P_n^2 = G_1^1 + G_2^2 + \dots + G_n^2$