Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 16 de octubre del 2022

Invarianza

Emilio Toscano Oneto

1 Invarianza

Es común que en problemas de olimpiada se presente el concepto de invarianza, específicamente en problemas dinámicos, es decir, situaciones en la que se presentan cambios, de los cuales se busca encontrar una tendencia o si existe alguna propiedad que se mantenga constante. Un ejemplo clásico de una invariaante en problemas de este estilo es la paridad de los números, es decir, estudiar el comportamiento de cuando un número es par o no como veremos en siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. ¿Es posible colocar los signos $+$ o $-$ entre los números del 1 al 20 de tal manera que al realizar la operación el resultado sea 13?

Observemos que al sumar todos los número del 1 al 20, obtenemos

$$1+2+...+20=\frac{20(21)}{2}=210.$$

El cual es un número par, por lo que para llegar a cualquier otra expresión con los símbolos $+$ y $-$, basta con intercambiar un signo $+$ por uno $-$ en donde sea necesario, pero este "cambio de signo" conserva la paridad de la operación, es decir, al cambiar el signo, la paridad de la operación es invariante y como 13 es un número impar, no es posible llegar a este resultado.

Ejemplo 2. En un pizarrón se escribe una lista de 11 números, seis 0's y cinco 1's. Un movimiento consiste en borrar dos números de la lista y escribir un 0 si eran iguales o un 1 si erán distintos. Este proceso se repite hasta que queda un solo número ¿Cuál es ese número?

Nuevamente observemos la paridad. Tomando la suma de los primeros 11 números en el pizarrón se obtiene 5 el cual es impar, cuando se realiza un movimiento, si se escribe 0, es porque dos números iguales se borrarón, y la suma restante resulta ser $5-2x+0$, donde x es 1 o 0, en cualquier caso, la suma permanece impar. En caso contrario, si al final se escribió un 1, entonces la suma cambia de 5 a $5-1-0+1=5$, es decir, la suma permanece igual y por lo tanto permanece impar. Esto último nos indica que después de cada movimiento, la suma de los números en la lista permanece impar y como al final solo puede estar escrito un 0 o un 1, concluimos que el último número debe de ser 1.

Ejemplo 3. En una mesa hay 122 fichas rojas, 49 azules, 101 blancas y 86 verdes. Se tiene además una bolsa con 500 fichas de cada color. Un movimiento consiste en tomar 3 fichas de distintos colores de la mesa, meterlas a la bolsa y sacar 3 fichas del otro color para colocarlas en la mesa. Este proceso termina cuando no hay fichas de 3 colores distintos sobre la mesa. ¿Es posible realizar esta operación el suficiente número de veces para que todas las fichas sobre la mesa queden del mismo color?

Podemos observar que tras un movimiento, la paridad de cada montón de fichas cambia de paridad y como se empieza con dos montones de fichas pares y dos con una cantidad impar, estas paridades se conservan a lo largo del proceso, por lo que no será posible dejar 3 montos sin fichas.

Ejemplo 4. Si en el espacio (3-dimensional) se encuentran 9 puntos de coordenadas enteras. Demuestra que que hay un segmento tal que al unir 2 de estos puntos, pasa por otro punto con coordenadas enteras.

Si las coordenadas de cada punto se representan por (x, y, z), entonces puesto que cada número tiene 2 posibles paridades, hay 8 posibles tercias de números con diferente paridad en al menos una coordenada, luego por el Principio de las Casillas, dos de los 9 puntos deben de tener la misma paridad en cada coordenada, lo cual implica que su suma tiene coordenadas pares y así el punto medio del segmento que los une tiene coordenadas pares.

El concepto de Invarianza no permanece solo bajo la paridad de los números, también se puede extender a ideas o procesos más abstractos, usualmente relacionado con la teoría de juegos.

Ejemplo 5. Si en un tablero de ajedrez de 8×8 se coloca un caballo en la esquina inferior izquierda. ¿Es posible que el caballo recorra cada una de las casillas del tablero solamente una vez y terminar en la esquina superior derecha?

Un caballo de ajedrez se mueve de la casilla X a la casilla Y si y sólo si X y Y son casillas opuestas de un rectángulo de 2×3 o de 3×2.

Veamos que no es posible. En un tablero de ajedrez de 8×8, las esquinas opuestas del tablero son de distinto color, luego observemos que en cada movimiento del caballo, la casilla a la que se mueve es de distinto color a la que se encontraba, por lo que si la esquina inferior izquierda es de color blanco, entonces como se busca pasar por cada casilla exactamente una vez, necesita realizarse en 63 movimientos, lo cual implica que terminará en una casilla de color blanco y es imposible que el último movimiento sea en la esquina opuesta, la cual es negra.

Ejemplo 6. Alicia y Beatriz colocan 24 fichas sobre una mesa y deciden realizar el siguiente juego. Un movimiento consiste en retirar entre 1 y 4 fichas de la mesa y el jugador en retirar el último montón de fichas es el ganador. Si Alicia empieza, ¿Cuál de las dos jugadoras tiene una estrategia ganadora?

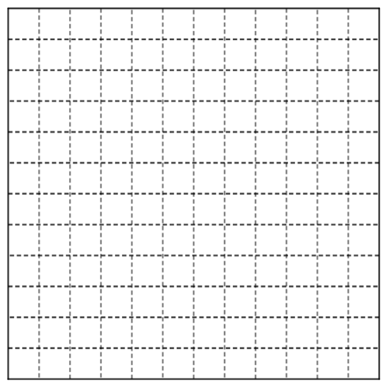
Para este problema, empezemos observando las últimas posiciones del juego. Si quedan $1, 2, 3$ o 4 fichas en la mesa, la jugadora que toma el turno esta en posición ganadora. Por otro lado, si hay 5 fichas en la mesa, no importa la cantidad de fichas que la siguiente jugadora tome, al final el número de fichas restante después de su turno será alguna de las posiciones ganadoras que acabamos de ver, y así el tener 5 fichas en la mesa es posición perdedora, pues no importa la que se haga, no hay manera de ganar el juego.

De esta manera, cuando se tengan $6, 7, 8$ o 9 fichas, la jugadora con este turno puede tomar una cantidad de fichas de tal manera que al terminar su turno, queden solo 5 fichas en la mesa, la cual sabemos que es una posición perdera y así estos casos también son posiciones ganadoras.

De esta forma, procediendo con este razonamiento de manera recursiva se observa que los turnos en los que el número de fichas de la mesa sea múltiplo de 5 son posiciones perdedoras, pues no importa que movimiento se haga, la jugadora del turno siguiente puede quitar una cantidad de fichas que te dejen nuevamente en un múltiplo de 5 hasta que eventualemente se lleguen a 0 fichas, por lo tanto como se inician con 24 fichas y Alicia toma el primer turno, entonces Alicia tiene estrategia ganadora.

Este último problema como se mencionó esta relacionado con la teoría de juegos y se introducen conceptos como ***la estrategia ganadora, posiciones perdedoras y ganadoras*** *y es un área que en la olimpiada de matemáticas se puede profundizar aún más. Este último ejemplo se puede generalizar notando que si un jugador quita $n-1$ fichas del tablero, entonces las posiciones con múltiplos de n fichas sobre la mesa son las posiciones perdedoras.* ¡Ganale a un amigo en este juego!

Ejemplo 7. En una cuadrícula de tamaño 12×12, las línea en la orilla son continuas y las del interior se encuentran puntuadas como muestra la figura. Luis y Miguel van a jugar un juego sobre el tablero. En su turno, Luis escoge alguna línea horizontal punteada y la remarca de una orilla a otra, después Miguel escoge una línea verticual puntuada y la remarca de una orilla a otra (ambas líneas de longitud 12). Luis toma el primer turno y luego alternan los turnos, donde Luis siempre escoge líneas horizontales y Miguel siempre escoge líneas verticales. El primer jugador que logre formar un cuadrado de 1×1 con las líneas continuas es el ganador. ¿Cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?



Observamos que cuando 2 líneas paralelas quedan a distancia 1, el siguiente jugador puede buscar una de sus líneas ya marcadas (o con una de las orillas del tablero) y marcar la línea adyacente a esta para ganar. En este tablero, el máximo número de líneas en una misma dirección (vertical u horizontal) que se pueden escoger sin tener dos de ellas adyacentes es 5 (se puede verificar tomano a las líneas a distancia $2, 4, 6, 8$ y 10 de una orilla). De esta forma, después de que Luis juegue 5 turnos sin perder, entonces al siguiente turno tendra que escoger una línea adyacente a una ya marcada y si para este punto Miguel juega sobre las líneas $2, 4, 6, 8$ y 10 antes mencionadas, podrá escoger su sexta línea como se observó al inicio y ganará.

Ejemplo 8. En un pizarrón se escriben los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2022}$. Cada movimiento consiste en escoger dos número del pizarrón a y b, borrarlos y en su lugar escribir el número $ab + a + b$. Si este proceso se realiza hasta que quede un solo número en el pizarrón. ¿Cuál es ese número?

Supongamos que en algún paso dado, los números en el pizarrón son $a_1, a_2, ..., a_n$ y veamos que el producto $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$ permanece invariante. Para ello, cuando se escogen los números ay b y se reemplazan por $c = ab + a + b$, entonces podemos observar que $(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1 = (c + 1)$, por lo tanto el producto antes mencionado, es el mismo y como al inicio se tiene el producto

$$(1 + 1)\left(\frac{1}{2} + 1\right) ... \left(\frac{1}{2022} + 1\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2023}{2022} = 2023$$

Por lo tanto, como al final queda un solo número, digamos k, entonces por la invariante del producto se tiene que $k + 1 = 2023$ y así el último número que queda es $k = 2022$.

Ejemplo 9. Se toman 20 cartas de una baraja y se colocan sobre una mesa de tal manera que las cartas forman una fila y estan bocabajo. Un movimiento consiste en tomar una carta que esta bocabajo y voltearla bocarriba junto a la carta que esta a su derecha, independientemente de si esta carta esta bocabajo o no (si se desea mover a la carta que esta en el extremo derecho, entonces no se mueve ninguna otra carta). Demuestra que no importa que secuencia de movimientos se escoga, siempre terminas con las 20 cartas mirando bacarriba.

Asignando etiquetas al estado de una carta, diremos que una carta es 1 si esta bocabajo y 0 si esta bocarriba y se empieza con el número

$$\underbrace{111...111}_{\text{20 veces}},$$

y se desea terminar con el número

$$\underbrace{000...000}_{\text{20 veces}}.$$

Entonces en una posición dada si se deasea voltear una carta (las cuales deben de ser 1, y dicha carta existe, de lo contrario el juego ya habrá terminado), existen dos casos. En el primer caso tenemos que hay una carta bocarriba a la derecha de la que se desea voltear, y al realizar el movimiento como en el problema se tiene $10 \Longrightarrow 01$.
En el segundo caso, se tienen dos cartas bocabajo adyacentes y cuando se realiza el movimiento se tiene $11 \Longrightarrow 00$. Notemos que en cualquiera de los dos casos, el número disminuye y la secuencia de movimientos es estrictamente decreciente, es decir, para un movimiento dado, el número de 20 cifras disminuye cada vez más y como no se puede llegar a un número menor al formado por veinte 0's, entonces dicho proceso debe de terminar eventualmente.

Notese que no se justificó el caso de cuando se voltea la última carta, la cual en realidad no afecta el razonamiento de la solución, dejaremos que el lector tenga la tarea moral de llenar dichos detalles.

2 Ejercicios

La siguiente lista de ejercicios propuestos no están en un orden particular de dificultad.

Ejercicio 2.1. *En la isla de Camelot viven camaleones,* 13 *son grises,* 15 *cafés y* 17 *rojos. Si dos camaleones de distintos colores se hablan, ambos cambiaran al tercer color. ¿Será posible que todos los camaleones de la isla tengan el mismo color?*

Ejercicio 2.2. *Digamos que se tienen a los entero positivos* $1, 2, 3, ..., 4n - 1$*. En un movimiento puedes reemplazar cualesquiera dos de ellos por su diferencia. Demuestra que después de* $4n - 2$ *movimientos, el número restante es par.*

Ejercicio 2.3. *En un cuarto vacío, cada minuto que pasa entra una persona o salen dos del cuarto. Después de exactamente* 3^{1999} *minutos. ¿Será posible que se encuentren* $3^{1000} + 2$ *personas en el cuarto?*

Ejercicio 2.4. *Supongamos que* $a_1, a_2, ..., a_n$ *es una permutación de los números* $1, 2, ..., n$*. Demuestra que* n *es impar, entonces el producto* $S = (a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ *es par.*

Ejercicio 2.5. *En una cudrícula de* 2022×2022 *se colocan un foco en cada casilla los cuales todos están apagados a excepción de uno. Un movimiento consiste en cambiar el estado de dos focos en casillas adyacentes. ¿Es posible dejar todos los focos de la cuadrícula encendidos?*

Ejercicio 2.6. *Un dragón tiene* 100 *cabezas. Si un caballero corta* $15, 17, 20$ *o* 5 *cabezas, crecen de nuevo* $24, 2, 14$ *o* 17 *cabezas, respectivamente. Si se acaban las cabezas del dragón, el dragón ha muerto. ¿Habrá una manera de matar al dragón?*

Ejercicio 2.7. *En un tablero de ajedrez de* 7×7*, se coloca un caballo en cada casilla. Determina si es posible mover a todos los caballos simultáneamente de tal manera que ningún par de caballos terminen en la misma casilla. Ver ejemplo 5 para recordar los movimientos de un caballo de ajedrez.*

Ejercicio 2.8. *En un tablero de* 10×10 *hay* 9 *casillas infectadas. Cada minuto, cada casilla que tenga al menos dos vecinas infectadas, se infectará también. Prueba que el tablero no puede infectarse por completo.*

Ejercicio 2.9. *Pepito participa un juego de mesa en el que en cada turno tiene que pagar* 100 *dolaramas y tirar un dado. Si el dado cae en* 1 *o en* 2*, Pepito gana* 400 *dolaramas; si cae* 3*, debe de pagar otros* 200 *dolaramas; si cae* 4 *le devuelven los* 100 *dolaramas y si cae* 5 *o* 6 *gana* $1,000$ *dolaramas. Si inicialmente Pepito tiene* $2,000$ *dolaramas. ¿Es posible que en algún momento llegue a tener exactamente* $12,000$ *dolaramas?*

Ejercicio 2.10. *En una hoja se tienen escritos once números* 1*. Se permite tomar dos números y sumarle* 1 *a ambos, restarle* 1 *a ambos, o sumarle 1 a uno y restarle* 1 *al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en el pizarrón once números* 10*?*

Ejercicio 2.11. *Se tienen* 120 *fichas sobre una mesa. Para cada turno de los jugadores A y B se tiene permitido retirar una cantidad de fichas que sean potencia de* 2*, (*$1, 2, 4, 8, 16$*, etc). Si A toma el primer turno, determina quién tiene estrategia ganadora.*

Ejercicio 2.12. *(OMM 2017) En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna* 2017 *caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultanea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a traves de varias tiradas, a que todos los caballos esten en la columna k, uno en cada casilla.*

Ejercicio 2.13. *En cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes* 2 *reglas:*

(a) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.

(b) Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.

Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 *piedras, otro tiene* 49 *y el otro tiene* 51*. Determina si es posible lograr, con movimientos sucesivos, que al final haya* 105 *montones, cada uno con una piedra.*

Ejercicio 2.14. *Los enteros del* 1 *al* 10 *se dibujan en pizarrón. Si Pepito puede elegir tres de ellos (a, b y c), borrarlos y dibujar en el pizarrón a $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ¿Cuál es el número más grande que puede haber en el pizarrón?*

Ejercicio 2.15. *Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n + S(n) + S(S(n)) = 2012$.*

Ejercicio 2.16. *Se tienen* 2001 *semáforos acomodados sobre una circunferencia. Un movimiento consiste en seleccionar tres semáforos consecutivos y avanzar cada uno de ellos una posición (es decir, un semáforo en siga se pone en preventivo, uno en preventivo se pone en alto y uno en alto se pone en siga). Inicialmente hay* 1000 *semáforos en siga y* 1001 *en alto. ¿Es posible poner todos los semáforos en preventivo mediante una sucesión de movimientos?*

Ejercicio 2.17. *Los números del* 0 *al* 9 *son escritos alrededor de una circunferencia en orden arbitrario. Entre cada dos números adyacentes a y b escribimos el número $|2b - a|$. Después borramos los números originales. Este proceso es repetido indefinidamente. Muestre que no es posible obtener* 10 *números* 5*. (Por ejemplo, los número se pueden acomodar en el orden: $1, 5, 3, 9, 0, 2, 4, 6, 8, 7$ y los nuevos números serían $9, 1, 15, 9, 4, 6, 8, 10, 6, 5$.)*

Ejercicio 2.18. *En el parlamento de Ciudad Gótica, cada miembro tiene a lo más* 3 *enemigos. Prueba que el parlamento puede separarse en dos grupos, de manera que cada miembro tenga a lo más un enemigo en su propio grupo.*

Ejercicio 2.19. *Supongamos que cada uno de los números $a_1, a_2, ..., a_n$ es* 1 *o* -1 *y que además satisfacen que $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0$. Demuestra que n es un múltiplo de* 4*.*

Ejercicio 2.20. *Considera un tablero de ajedrez de* 8×8. *¿Será posible conseguir sólo un cuadrito negro, si sólo se pueden invertir los colores de los cuadritos de toda una fila o toda una columna?*

Ejercicio 2.21. *Se colorean una fila de* n *cuadritos de dos colores, de modo que el primero y el último tienen distinto color. Muestra que la cantidad de parejas de cuadritos adyacentes que están coloreados de distinto color es un número impar.*

Ejercicio 2.22. *En una fiesta algunos niños y niñas se sientan en círculo. Cuando están todos sentados, cada niño le da un regalo a las niñas que estén a su lado (si está entre dos niñas le da un regalo a cada una, si está entre un niño y una niña le da un regalo sólo a la niña que está a su lado y si está entre dos niños no da regalos). Muestra que la cantidad de regalos que se dieron en esa fiesta es un número par.*

Ejercicio 2.23. *Un círculo está dividido en* 2000 *sectores. Hay* 2001 *ranas en estos sectores. Cada segundo, dos ranas que se encuentren en el mismo sector saltarán a sectores vecinos opuestos. Prueba que, en algun momento, habrá al menos* 1001 *sectores vacíos.*

Ejercicio 2.24. *Se tiene un tablero de* 21×21 *y una cantidad ilimitada de fichas. En la primera jugada se colocan* 20 *fichas, todas ellas en casillas diferentes. Luego, en cada jugada, se escoge una fila y una columna y se agrega una ficha a cada casilla de la fila elegida y una ficha a cada casilla de la columna elegida (la casilla que esta en la intersección de la fila y columna recibe* 2 *fichas.) ¿Es posible que, en un movimiento dado, todas las casillas del tablero tengan la misma cantidad de fichas?*

Ejercicio 2.25. *Si se reacomodan los números* $1, 2, ..., n$ *en una fila y en cada paso puedes intercambiar dos números adyacentes de este acomodo. Demuestra que nunca puedes alcanzar el orden inicial después de una cantidad impar de movimientos.*

Ejercicio 2.26. *Si* n *es un número natural, llamemos a* $S(n)$ *la suma de los dígitos de* n. *A cada uno de los números del* 1 *al* 10^6 *se le aplica* $S(n)$ *el número suficiente de veces para que al final quede un solo dígito. ¿Qué dígito aparece más veces, el* 1 *o el* 2*?*

Ejercicio 2.27. *Se tienen* 2^m *hojas de papel, cada una tiene un número* 1 *escrito. En cada paso se permite tomar dos hojas que tengan los números* a *y* b *escritos y sustituir ambos números por* $a + b$. *Muestra que después de* $m2^{m-1}$ *pasos, la suma de los números escritos en todas las hojas es al menos* 4^m.

Ejercicio 2.28. *Alrededor de un círculo, cinco* 1*'s y cuatro* 0*'s se acomodan en algún orden. Luego, entre cualquier par de dígitos iguales se escribe un* 0 *y entre dígitos distintos se escribe* 1. *Finalmente, los dígitos originales se borran. Si este proceso se continua indefinidamente, demuestra que nunca se puede obtener nueve* 0*'s.*

Ejercicio 2.29. *En un pizarrón se anotan los números del* 1 *al* 100. *Una operación consiste en borrar* 2 *números* a *y* b *para sustituirlos por* $a+b-1$. *Después de* 99 *operaciones, ¿Qué número queda en el pizarrón?*

Ejercicio 2.30. *Se tiene un número real en cada casilla de un tablero de* $m \times n$. *Podemos cambiar el signo de todos los números en una misma fila o columna. Demostrar que podemos hacer algunos de estos cambios para lograr que cada fila y cada columna tenga suma positiva.*