

# Tema Avanzado de Geometría: Inversión

Israel Bonal Rodríguez

Noviembre de 2019

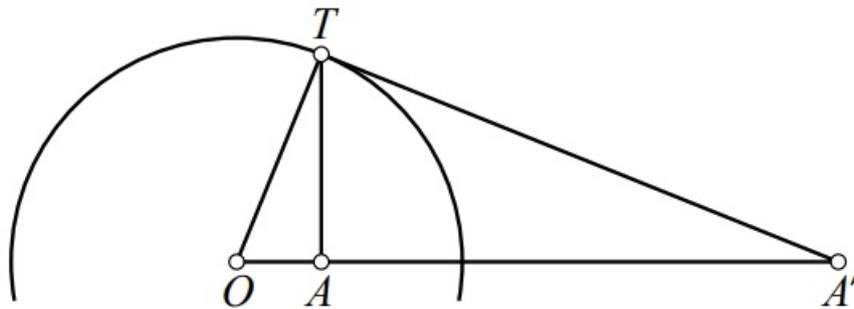
La inversión es una transformación que se aplica a figuras del plano. Nos sirve para resolver muchos problemas de geometría sobre todo aquellos que involucran círculos. Comparto la información del pdf que me sirvió para aprender esta técnica así como algunos problemas que se resuelven usando inversión.

Considero que es importante la práctica de esta herramienta por lo que recomiendo que intenten la mayor cantidad de problemas. Lean la teoría, intenten los problemas propuestos y si tienen dudas me pueden escribir a mi correo electrónico *israel.bonal@cimat.mx*.

## Definición de inversión

Dada una circunferencia de centro  $O$  y radio  $k$ , la inversión de centro  $O$  y radio  $k$  es una transformación del plano que a cada punto  $A$  distinto de  $O$ , le asocia otro punto  $A'$  de la semirrecta  $OA$  cumpliendo la relación  $OA \cdot OA' = k^2$ .

La figura siguiente muestra la manera de construir el punto inverso  $A'$  del punto  $A$  cuando éste es interior a la circunferencia.



La perpendicular a la semirrecta  $OA$  determina el punto  $T$  en la circunferencia. Por este punto trazamos una tangente que corta a la semirrecta  $OA$  en el punto  $A'$ , inverso de  $A$ . En efecto, los triángulos  $\triangle OTA$  y  $\triangle OA'T$  son semejantes. Entonces,

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OT^2 = k^2$$

Usando el mismo dibujo, si el punto  $A'$  está fuera de la circunferencia, trazamos una tangente a la circunferencia desde  $A'$  y, siendo  $T$  el punto de tangencia, por  $T$  trazamos una perpendicular a la recta  $OA'$  que cortará a ésta en el punto  $A$ , simétrico del punto  $A'$ .

Vemos entonces que un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior y un punto interior a la circunferencia se transforma en un punto exterior. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos, es decir, son puntos fijos de la transformación.

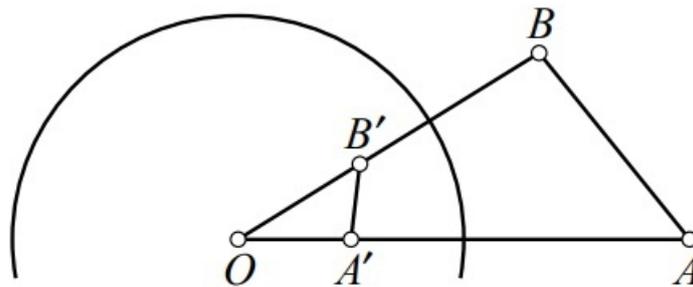
Es conveniente observar que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión  $O$ , que se queda sin imagen por la transformación. Cuando se trabaja con inversión se supone que a todos los puntos del plano se le añade un “punto ideal” o “punto en el infinito” con lo que obtenemos el plano inversivo. Dicho punto ideal será la imagen del centro de inversión.

## Propiedades de la inversión

### La inversión y las distancias

¿Como se transforman las distancias con una inversión? Sean  $A$  y  $B$  puntos distintos y sean  $A'$  y  $B'$  los inversos respecto de una circunferencia de centro  $O$  y radio  $k$ . Entonces,

$$A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}$$



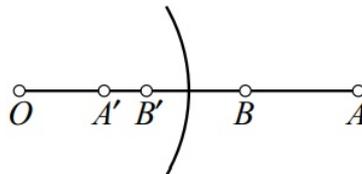
En el caso, mostrado en la figura, en que la recta  $AB$  no pase por  $O$ , si tenemos en cuenta que  $OA \cdot OA' = k^2 = OB \cdot OB'$ , obtenemos

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

por lo que los triángulos  $\triangle OAB$  y  $\triangle OB'A'$  son semejantes. Entonces,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{k^2}{OA \cdot OB} \Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}$$

En el caso de que los puntos  $O$ ,  $A$  y  $B$  estén alineados,  $A'$  y  $B'$  estarán en la misma recta:



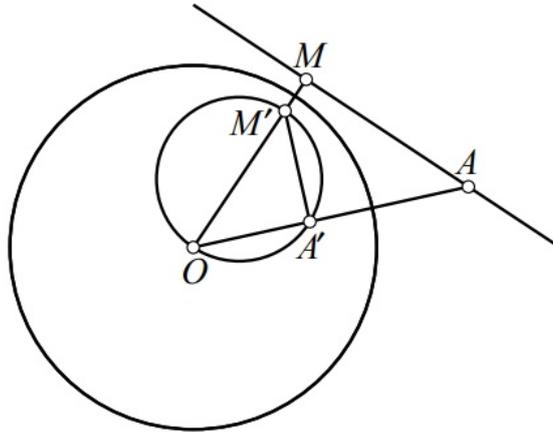
Entonces tendremos:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{k^2}{OB} - \frac{k^2}{OA} = \frac{k^2}{OA \cdot OB} (OA - OB) = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}$$

### La inversión y las rectas

Es evidente que cualquier recta que pase por el centro de inversión se va a transformar en sí misma.

Por otro lado, si la recta  $l$  no pasa por el centro de inversión  $O$ , dicha recta se transforma en una circunferencia con diámetro  $OM'$ , siendo  $M$  la proyección ortogonal de  $O$  sobre  $l$  y  $M'$  el inverso de  $M$ .

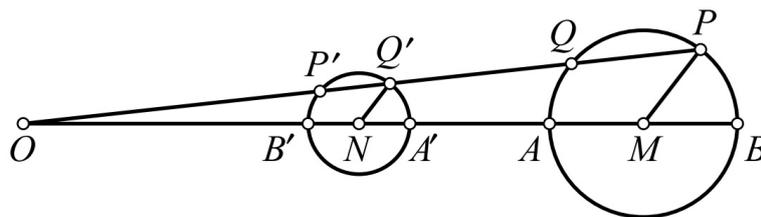


En efecto, si consideremos un punto cualquiera  $A$  de la recta  $l$  y su recíproco  $A'$ , los triángulos  $\triangle OA'M'$  y  $\triangle OMA$  son semejantes, y como el ángulo  $\angle AMM'$  es recto, también lo es el ángulo  $\angle OA'M'$ , resultando entonces que  $A'$  está en la circunferencia con diámetro  $OM'$ .

### La inversión y las circunferencias

La figura anterior nos sirve para averiguar cuál es el resultado de invertir una circunferencia que pasa por el centro de inversión: si  $OM'$  es un diámetro, entonces esa circunferencia se transforma en la recta perpendicular a  $OM'$  por el punto  $M$ , inverso de  $M'$ .

Vamos a hallar ahora el resultado de invertir una circunferencia que no pasa por el centro de inversión.



Supongamos que una circunferencia dada tiene radio  $r$  y sean  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de una recta que pasa por  $O$  y dicha circunferencia. Llamemos  $P'$  y  $Q'$  a los puntos inversos de  $P$  y  $Q$ . Por la definición de inversión,  $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = k^2$  y por potencia del punto  $O$ ,  $OP \cdot OQ = |OM^2 - r^2|$ . Dividiendo estas igualdades obtenemos:

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte}$$

Trazamos una paralela a  $PM$  por  $Q'$  y llamamos  $N$  a su intersección con  $OM$ . Los triángulos  $OQ'N$  y  $OPM$  son semejantes, por tener dos lados paralelos. Por tanto,

$$\frac{OQ'}{OP} = \frac{Q'N}{PM} = \frac{NO}{MO}$$

Despejando,

$$NO = MO \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{MO \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte}$$

$$Q'N = PM \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte}$$

En este razonamiento pueden intercambiarse los puntos  $P$  y  $Q$ , para concluir que los puntos  $P'$  y  $Q'$  estarán en una circunferencia de centro  $N$  y radio constante siempre que  $P$  y  $Q$  estén en la circunferencia de centro  $M$  y radio  $r$ .

Los cálculos anteriores, además nos dan el radio  $r'$  de una circunferencia inversa de una circunferencia con centro  $M$  y radio  $r$  que no pasa por el centro de inversión:

$$r' = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}$$

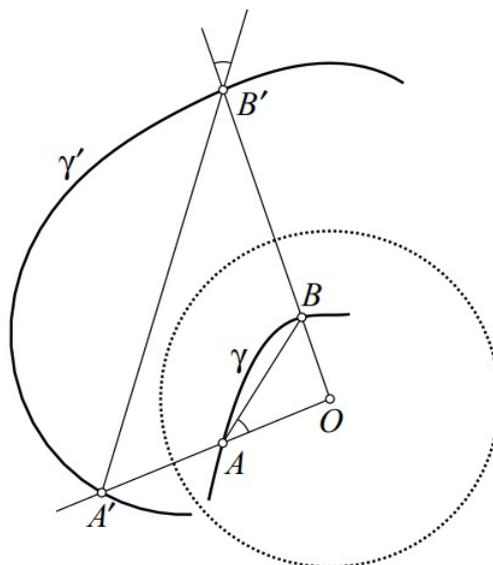
Para construir la circunferencia inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, unimos el centro de inversión con el centro de la circunferencia dada mediante una recta que determina en ésta un diámetro  $AB$ . Hallamos los inversos  $A'$  y  $B'$  de  $A$  y  $B$ . La circunferencia construida con diámetro  $A'B'$  es el resultado de aplicar la inversión a la circunferencia dada.

### La inversión y los ángulos

Una de las propiedades más útiles de la inversión es que la inversión conserva los ángulos.

El ángulo de intersección de dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo formado por las rectas tangentes (cuando estas tangentes existen). Esto se aplica a rectas, circunferencias o a cualquier otra curva.

En primer lugar, veamos que la inversión conserva el ángulo entre una curva y una recta que pase por el centro de inversión y el punto de tangencia.



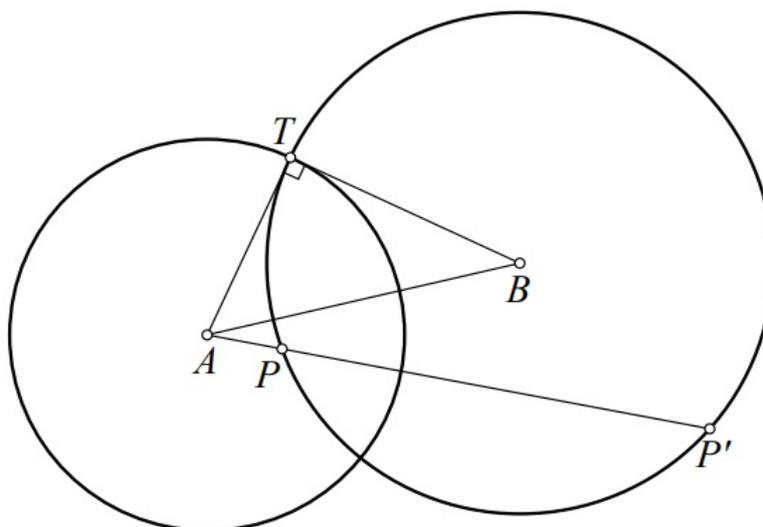
En la figura,  $\gamma$  es una curva,  $A$  y  $B$  son puntos sobre  $\gamma$ , y  $\gamma'$ ,  $A'$  y  $B'$  son los correspondientes inversos. Como los triángulos  $\triangle AOB$  y  $\triangle B'OA'$  son semejantes, los ángulos marcados en la figura son iguales.

Ahora, suponiendo que  $B$  es un punto móvil sobre la curva y que  $B$  se va aproximando a  $A$ , las rectas  $AB$  y  $A'B'$  tienden a las tangentes en  $A$  y  $A'$  a las curvas  $\gamma$  y  $\gamma'$ . Uno de los ángulos marcados tiende al ángulo entre  $\gamma$  y  $OA$ , mientras que el otro tiende al ángulo inverso.

¿Qué ocurre con el ángulo formado por dos curvas? Basta considerar otra curva cortando a  $\gamma$  en  $A$  y aplicarle lo mismo. El ángulo formado por las dos curvas se obtendrá sumando los ángulos de cada una de ellas con la recta  $OA$ .

## Circunferencias ortogonales

Dos circunferencias secantes son ortogonales cuando se cortan formando ángulo recto, es decir cuando sus tangentes (o los radios) en uno de los puntos de intersección son perpendiculares. Así, las circunferencias con centros  $A$  y  $B$  de la figura son perpendiculares, ya que  $\angle BTA = 90^\circ$ :



Si  $r$  y  $s$  son los radios de las circunferencias  $(A)$  y  $(B)$ , la condición de ortogonalidad equivale a que  $AB^2 = r^2 + s^2$ .

### Ortogonalidad e inversión

Si seguimos suponiendo que las circunferencias  $(A)$  y  $(B)$  son ortogonales, y si  $P$  y  $P'$  son dos puntos de intersección de una recta que pasa por  $A$  con la circunferencia  $(B)$ , la potencia del punto  $A$  respecto de la circunferencia  $(B)$  es  $AP \cdot AP' = AT^2 = r^2$ , por lo que  $P'$  es el punto inverso de  $(P)$  respecto de la inversión definida por la circunferencia  $(A)$ , es decir,

*Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión*

Recíprocamente, si una circunferencia  $(B)$  contiene a un punto  $P$  y a su inverso  $P'$  respecto de la circunferencia  $(A)$  tendremos  $r^2 = AP \cdot AP' = AB^2 - s^2$ , por lo que las circunferencias serán ortogonales.

## Problemas Propuestos

- Sean una semicircunferencia con diámetro  $AB$  y centro  $O$ , y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos  $C$  y  $D$ , y a la recta  $AB$  en el punto  $M$  (siendo  $MD < MC$  y  $MB < MA$ ). Sea  $K$  el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos  $\triangle OAC$  y  $\triangle OBD$ . Demostrar que  $\angle MKO = 90^\circ$ .
- Las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son tangentes interiormente a  $\omega_3$  en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Se traza una tangente exterior común a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  la cual toca a las circunferencias en los puntos  $C$  y  $D$ , respectivamente. Demuestra que las rectas  $AC$  y  $BD$  se intersectan en un punto sobre la circunferencia  $\omega_3$ .
- Sea un triángulo  $\triangle ABC$  y un punto  $D$  sobre  $BC$ . Dos circunferencias son tangentes exteriormente a  $AD$  en el mismo punto  $M$  y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de  $\triangle ABC$  y al lado  $BC$ , la primera sobre el segmento  $BD$  y la otra sobre el segmento  $DC$ . Demostrar que  $AD$  es la bisectriz del ángulo  $\angle A$ .
- Dado un triángulo  $\triangle ABC$  y su circunferencia circunscrita  $\gamma$ , sea  $\kappa$  la circunferencia tangente a  $\gamma$  en  $A$  y tangente a  $BC$  en un punto  $F$ . Sea  $E$  el otro punto de intersección de  $\kappa$  con el lado  $CA$  (aparte de  $A$ ).
  - Demstrar que la recta  $AF$  es la bisectriz del ángulo  $\angle CAB$ .
  - Si  $U$  y  $V$  son los dos puntos de  $\gamma$  que cumplen  $CF = CU = CV$ , demostrar que  $UV$  es tangente a la circunferencia  $\kappa$  en el punto  $E$ .
- Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están sobre una línea en ese orden. Los semicírculos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , tienen como diámetros a  $AB$  y  $BC$ , y están del mismo lado de la recta. Un círculo  $\Gamma$  es tangente a  $\omega_1$ , a  $\omega_2$  en  $T \neq C$  y a la recta perpendicular a  $AB$  por  $C$ . Demuestra que  $AT$  es tangente a  $\omega_2$ .
- Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$ , cuatro distintos círculos tales que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  son tangentes externamente en  $P$ , y  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  son tangentes externamente en el mismo punto  $P$ . Supón que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_1$  se intersectan en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  respectivamente y que todos esos puntos son distintos de  $P$ . Prueba que
 
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$
- Sea  $\omega$  una semicircunferencia con diámetro  $PQ$ . Un círculo  $\Gamma$  es tangente internamente a  $\omega$  y al segmento  $PQ$  en  $C$ . Tomamos  $A$  en  $\omega$  y  $B$  en el segmento  $CQ$  tales que  $AB$  se tangente a  $\Gamma$  y perpendicular a  $PQ$ . Demuestra que  $AC$  bisecta a  $\angle PAB$ .
- Sea  $\triangle ABC$  un triángulo. Sea un punto  $X$  del interior del triángulo y sea  $Y$  la intersección de  $AX$  y  $BC$ . Tracemos las perpendiculares  $YP, YQ, YR, YS$  a las rectas  $CA, CX, BX, BA$  respectivamente. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir  $X$  para que  $PQRS$  sea un cuadrilátero cíclico.
- Sean  $\triangle ABC$  un triángulo y  $D, E, F$  los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita de  $\triangle ABC$  en la circunferencia de los nueve puntos de  $\triangle DEF$ .
- Si  $R$  y  $r$  son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita de un triángulo, respectivamente y  $O$  e  $I$  son su circuncentro e incentro, entonces  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ .