Isometrías y semejanzas en el plano

José H. Nieto

1. Introducción

En estas notas se examinan las transformaciones geométricas más sencillas en el plano: las isometrías y las semejanzas.

Se utiliza a menudo la identificación del plano con el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos. Dados dos puntos A y B del plano se puede introducir un sistema de coordenadas en el cual A sea el origen (0,0) y B sea (0,1). Entonces cada punto queda identificado con un par de números reales (a, b), o lo que es equivalente con el complejo $a + bi$. Se suponen conocidas las interpretaciones geométricas de la suma y el producto de números complejos.

La notación AB se utiliza tanto para designar un segmento AB como su medida, y también para la recta que pasa por A y B. El sentido depende del contexto, por ejemplo en una razón AB/CD sólo tiene sentido interpretar AB y CD como medidas de segmentos. $\overrightarrow{AB}$ designa el vector de origen A y extremo B.

Hay ejercicios y problemas numerados consecutivamente. Los ejercicios generalmente completan la teoría expuesta y se resuelven con las mismas técnicas que ésta. Los problemas requieren un esfuerzo mayor.

2. Isometrías

Sea $\mathcal{E}$ el plano euclidiano, y $\mathrm{d} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ la función distancia. Una *isometría* es una función $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que conserva las distancias, es decir tal que para cualquier par de puntos $P, Q \in \mathcal{E}$ se cumple $\mathrm{d}(P, Q) = \mathrm{d}(f(P), f(Q))$.

En el plano complejo una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una isometría si y sólo si $|f(z)-f(w)| = |z - w|$ para todos los $z, w \in \mathbb{C}$.

Las isometrías también son llamadas *congruencias*, *movimientos rígidos* o simplemente *movimientos*.

La transformación *identidad* dada por $I(P) = P$ para todo P, es obviamente una isometría. Otros ejemplos bien conocidos son las rotaciones, traslaciones, reflexiones respecto a un punto o respecto a una recta, que se analizarán en las páginas siguientes.

La composición de dos isometrías f y g se denotará $f \circ g$ o simplemente fg. Seguimos la convención de que g se aplica primero, es decir que $f \circ g(P) = f(g(P))$. Es importante señalar que en general la composición no es conmutativa.

Ejercicio 1. Pruebe que toda isometría:

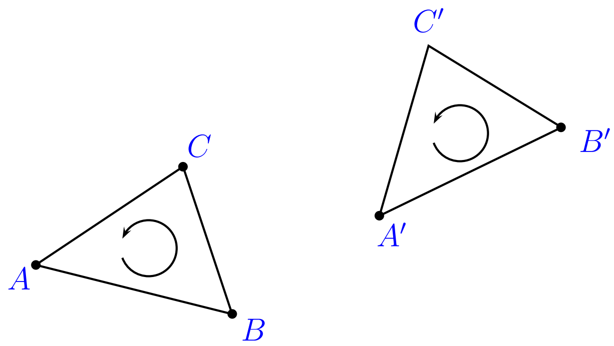
(a) Es inyectiva.

(b) Transforma puntos alineados en puntos alineados, preservando el orden.

(c) Transforma rectas en rectas, biyectivamente.
(d) Transforma semiplanos en semiplanos.
(e) Es una biyección del plano en sí mismo.
(f) Conserva los ángulos y el paralelismo.
(g) Transforma circunferencias en circunferencias.

Como toda isometría M es biyectiva, tiene inversa, que denotaremos M^{-1}. Entonces $MM^{-1} = M^{-1}M = I$. Así, las isometrías del plano con la composición como operación forman grupo.

Si una isometría lleva el punto A en A' y B en B', entonces por (c) y (d) del ejercicio anterior lleva el semiplano a la izquierda de la semirecta $\overrightarrow{AB}$ en uno de los semiplanos limitados por $\overrightarrow{A'B'}$. Si lo lleva en el izquierdo, entonces se dice que la isometría es *directa*, y si lo lleva en el derecho se dice que es *inversa*. Observe que una isometría directa conserva el sentido en el plano, en otras palabras para cualquier triángulo ABC los vértices de A', B', C' están ordenados en el mismo sentido (horario o antihorario) que A, B, C, como muestra la siguiente figura.



Ejercicio 2. Pruebe que la composición $f \circ g$ de dos isometrías f y g es una isometría, que es directa si f y g son ambas directas o ambas inversas, e inversa en caso contrario.

Ejercicio 3. Pruebe que las isometrías directas forman grupo.

Ejercicio 4. Pruebe que si una isometría deja fijos tres puntos no alineados A, B y C, entonces es la identidad.

3. Traslación

La *traslación* de vector $\overrightarrow{v}$ es la transformación definida como $T_{\overrightarrow{v}}(P) = P + \overrightarrow{v}$. La traslación de vector $\overrightarrow{0}$ es la identidad.

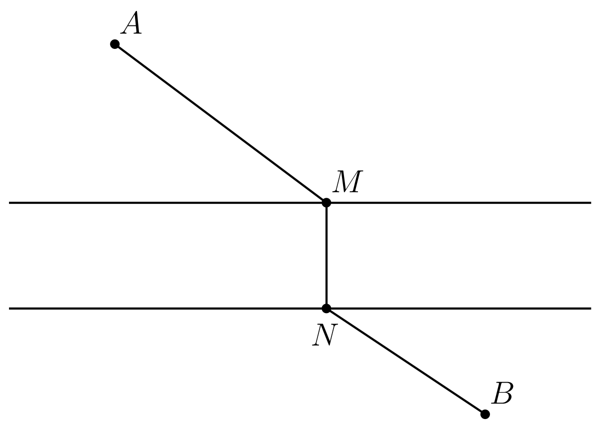
Las traslaciones son isometrías directas.

En una traslación cada recta r se transforma en una recta $r' \parallel r$.

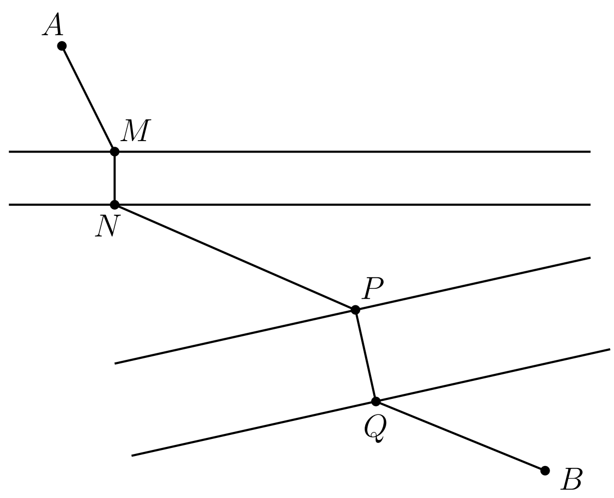
La composición de dos traslaciones T_v y T_w se ve fácilmente que es T_{v+w}, en cualquier orden que se haga. La inversa de $T_{\overrightarrow{v}}$ es $T_{-\overrightarrow{v}}$. Las traslaciones por lo tanto forman grupo.

En el plano complejo una traslación equivale a sumar una constante (que corresponde al vector de la traslación): $T(z) = z + v$.

Problema 5. Dos pueblos A y B se encuentran en lados diferentes de un río de orillas paralelas. Se desea contruir un puente MN, perpendicular a las orillas, de modo que $AM + MN + NB$ sea lo más pequeño posible. Hallar la solución con regla y compás.

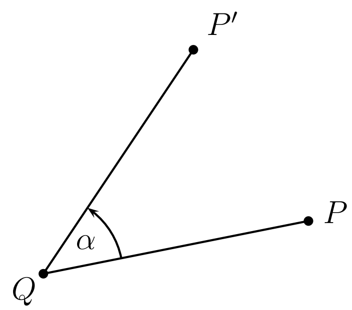


Problema 6. Similar al anterior, pero con dos ríos y dos puentes MN y PQ.



4. Rotación

La *rotación* de centro Q y ángulo α es la transformación $R_{Q,\alpha}$ que a cada punto P le hace corresponder el único punto P' tal que $QP = QP'$ y $\angle PQP' = \alpha$.

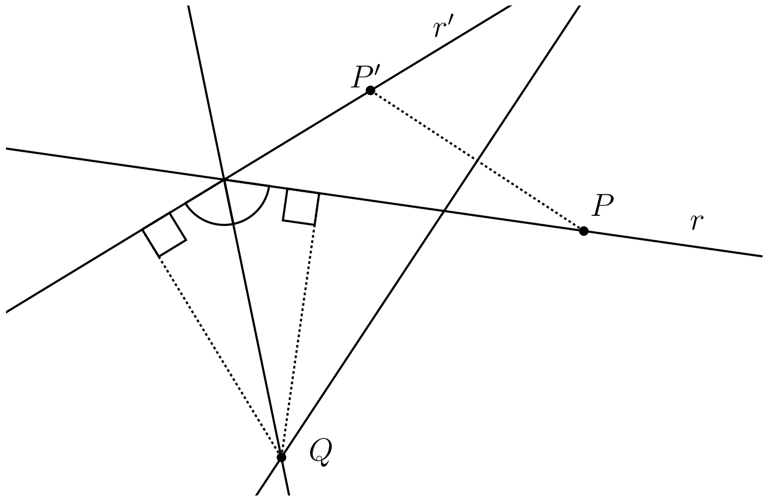


Las rotaciones son isometrías directas.

Es claro que $R_{Q,0} = I$ y que $R_{Q,\alpha}^{-1} = R_{Q,-\alpha}$. Por tanto las rotaciones con centro Q forman grupo. En cambio el conjunto de todas las rotaciones no forma grupo (vea (11)).

A la rotación de centro Q y ángulo 180° se le llama *simetría central* o *reflexión* respecto al punto Q.

El centro de una rotación está en la mediatriz del segmento PP' determinado por cualquier par de puntos correspondientes, y en la bisectriz de uno de los ángulos determinados por cualquier par de rectas correspondientes r y r' (el que sea intersección de semiplanos correspondientes).



En el plano complejo una rotación de centro en el origen y ángulo α corresponde a multiplicar por el complejo $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, es decir $R(z) = e^{i\alpha}z$. Si el centro es w entonces $R(z) = w + e^{i\alpha}(z - w)$

La simetría central de centro w es $S(z) = 2w - z$.

Ejercicio 7. Si una rotación lleva el segmento PQ en el segmento $P'Q'$, halle su centro y su ángulo con regla y compás.

Ejercicio 8. Pruebe que si una isometría directa deja dos puntos fijos, entonces es la identidad.

Ejercicio 9. Pruebe que si una isometría directa deja un punto Q fijo, entonces es una rotación de centro Q.

Ejercicio 10. Pruebe que la composición de una traslación con una rotación distinta de la identidad es otra rotación del mismo ángulo.

Ejercicio 11. Pruebe que la composición de dos rotaciones de ángulos α y β es una rotación de ángulo $\alpha+\beta$, a menos que $\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, en cuyo caso es una traslación.

Ejercicio 12. Pruebe que toda isometría directa del plano es una traslación o una rotación.

Ejercicio 13. Pruebe que toda isometría directa del plano sin puntos fijos es es una traslación de vector no nulo.

Ejercicio 14. ¿Qué se obtiene si se componen dos simetrías centrales de centros O_1 y O_2?

Ejercicio 15. Puebe que toda traslación se puede obtener como composición de dos simetrías centrales.

Ejercicio 16. ¿Qué se obtiene si se compone una traslación con una simetría central?

Problema 17. Dadas dos circunferencias y un punto P común a ambas, trace una recta por P que determine cuerdas de igual longitud en ambas circunferencias.

Problema 18. Dadas tres circunferencias concéntricas de radios $r_1 < r_2 < r_3$ construya un triángulo equilátero que tenga un vértice en cada una de ellas. Discuta la posibilidad de tal construcción en función de los radios.

Problema 19. Sea ABC un triángulo con $AB > AC$. Sea ABF equilátero hacia afuera de ABC. Sea BCG equilátero hacia dentro de ABC. Pruebe que G pertenece a AF si y sólo si $\angle BAC = 60°$.

Problema 20. a) Dé un ejemplo de una figura que tenga dos centros de simetría diferentes.

b) Pruebe que si una figura tiene dos centros de simetría diferentes, entonces tiene infinitos.

Problema 21. Dados los puntos medios M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 de los lados consecutivos de un pentágono, halle sus vértices.

Problema 22. Si ABC es un triángulo con A, B y C ordenados en sentido positivo y ángulos α, β y γ, respectivamente, pruebe que la composición de la rotación de centro C y ángulo 2γ seguida de la rotación de centro B y ángulo 2β es la rotación de centro A y ángulo -2α.

Problema 23. Si ABC es un triángulo, sean A_1, B_1 y C_1 los puntos exteriores al mismo tales que los triángulos A_1BC, AB_1C y ABC_1 son equiláteros.

(a) Si se conocen A_1, B_1 y C_1, muestre cómo hallar A, B y C.

(b) Pruebe que los centros de A_1BC, AB_1C y ABC_1 son los vértices de un triángulo equilátero.

Problema 24. (Banco OIM 2015) Sean ABC y ADE dos triángulos isorectángulos que comparten sólo el punto A, que es el vértice del ángulo recto para ambos triángulos. El orden en que se dan los vértices es el de las agujas del reloj, para ambos triángulos. Sean M, N, P y Q los puntos medios de los segmentos BE, CD, BC y DE, respectivamente. Demuestre que los segmentos MN y PQ se cruzan y son perpendiculares.

Problema 25. (IMO 2005/5) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con los lados BC y AD de igual longitud pero no paralelos. Sean E y F puntos en los lados BC y AD, respectivamente, tales que $BE = DF$. Las rectas AC y BD se cortan en P, las rectas BD y EF se cortan en Q, las rectas EF y AC se cortan en R. Demuestre que los circuncírculos de todos los triángulos PQR (cuando E y F varían) pasan por un punto común distinto de P.

5. Simetría axial

La *simetría axial* con una recta r como eje (también llamada reflexión respecto a r) es la transformación que deja fijos todos los puntos de r y a cada punto P fuera de r le corresponde un punto P' al otro lado de r, tal que $PP' \perp r$ y P' está a la misma distancia de r que P.

Las simetrías axiales son isometrías inversas.

En el plano complejo, la simetría axial respecto al eje de las x es la conjugación $C(z) = \overline{z}$. La simetría axial respecto a una recta que pasa por el origen y forma un ángulo φ con el eje de las x viene dada por $S\varphi_(z) = e^{2\varphi i}\overline{z}$ (ver ejercicios).

Ejercicio 26. Dados dos puntos diferentes A y B, pruebe que hay exactamente una isometría inversa que deja ambos puntos fijos.

Ejercicio 27. Dados dos segmentos de igual longitud AB y CD, pruebe que hay exactamente una isometría directa y una isometría inversa que llevan A en C y B en D.

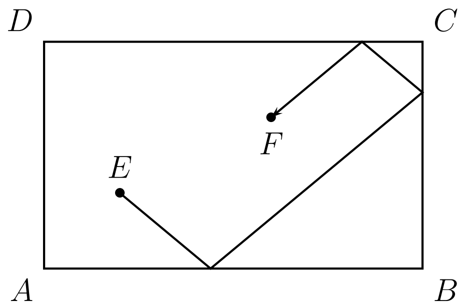
Ejercicio 28. ¿Qué se obtiene al componer dos simetrías axiales de ejes paralelos? ¿Y si los ejes son concurrentes?

Ejercicio 29. Pruebe que toda traslación es la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos, y que toda rotación es la composición de dos simetrías axiales de ejes concurrentes.

Ejercicio 30. Pruebe que la simetría axial respecto a una recta que pasa por el origen y forma un ángulo φ con el eje de las x viene dada por $S\varphi_(z) = e^{2\varphi i}\overline{z}$.

Problema 31. Dadas una recta r y dos puntos A y B del plano, a un mismo lado de r, construya con regla y compás un punto P en r tal que $AP + PB$ sea mínimo.

Problema 32. En una mesa rectangular de billar con vértices A, B, C y D, hay dos bolas E y F. Determine con regla y compás la dirección en que se debe lanzar la bola E para que después de rebotar en las bandas AB, BC y CD golpee a F.



6. Antitraslaciones

Dadas una recta r y un vector v paralelo a r, la *antitraslación* con eje r y vector v es la composición de la simetría axial S de eje r con la traslación T de vector v. Observe que en este caso el orden de composición es irrelevante, pues $ST = TS$.

Las antitraslaciones son isometrías inversas.

La simetría axial es un caso particular de antitraslación, con vector nulo.

A las antitraslaciones se les llama también *reflexiones o simetrías en deslizamiento.*

En el plano complejo, la antitraslación respecto al eje de las x con vector v real (pues debe ser paralelo al eje de las x) viene dada por $A(z) = \overline{z} + v$.

Ejercicio 33. Pruebe que la composición de una simetría axial con una traslación es siempre una antitraslación.

Problema 34. Dadas una recta r, dos puntos A y B a un mismo lado de r y una longitud d, construya un camino de longitud mínima que vaya de A a r, recorra una distancia d sobre r y luego llegue a B.

Ejercicio 35. Pruebe que toda isometría inversa es una antitraslación.

Ejercicio 36. Pruebe que cualquier isometría del plano se puede obtener componiendo a lo sumo tres simetrías axiales.

7. Homotecia

Dados un punto O del plano y un número real $k \neq 0$, la *homotecia* de centro O y razón k es la transformación H que a cada punto P le hace corresponder el punto $P' = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$. Observe que siempre $H(O) = O$. Si $k = 1$ entonces la homotecia es la identidad, y si $k = -1$ entonces es la simetría central con centro O. Si $k \neq 1$ y $P \neq O$ entonces O, P y P' son tres puntos alineados, con O entre P y P' si y sólo si $k < 0$.

Observe que el centro O y un par de puntos correspondientes P y P' (que deben estar alineados con O) determinan la homotecia.

En el plano complejo, la homotecia de centro en el origen O y razón k se representa como la multiplicación por k: $H(z) = kz$.

Si $\overrightarrow{u}$ es un vector t $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$H(A + t\overrightarrow{u}) = P + k(\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}) = A' + kt\overrightarrow{u},$$

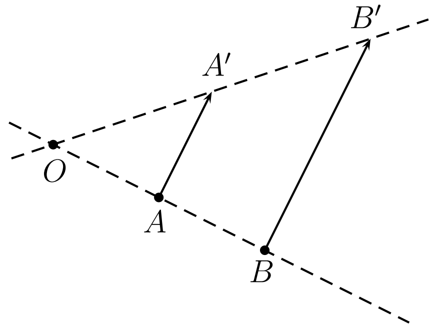
luego la recta que pasa por A con dirección $\overrightarrow{u}$ se transforma biyectivamente en la recta paralela que pasa por A'.

Si (A, A') y (B, B') dos son pares de puntos correspondientes en una homotecia de centro O y razón k, entonces

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

En particular los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos y $\frac{A'B'}{AB} = |k|$.

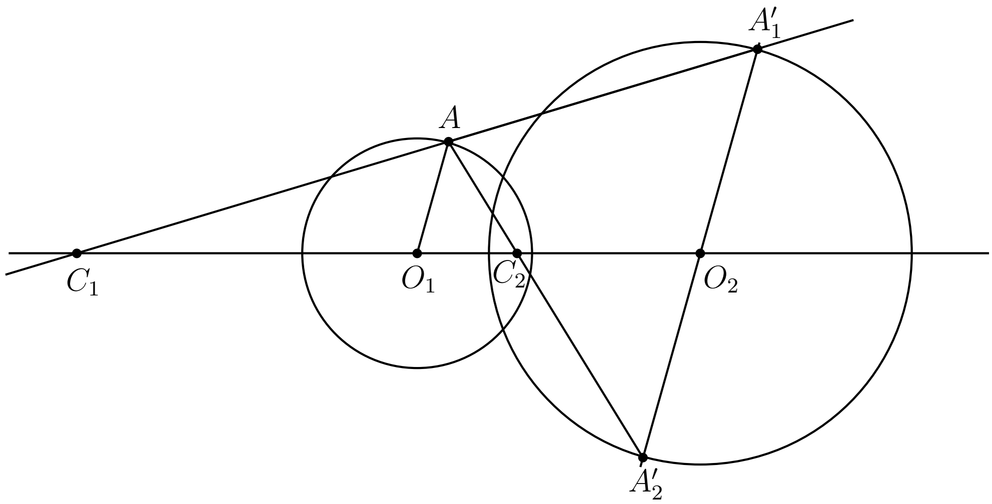
Recíprocamente, dados A, A', B y B' tales que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, si $k \neq 1$ existe una única homotecia H tal que $H(A) = A'$ y $H(B) = B'$. Si A, A', B y B' no son colineales, el centro O se puede hallar intersectando las rectas AB y $A'B'$.



Es fácil verificar que las homotecias conservan los ángulos.

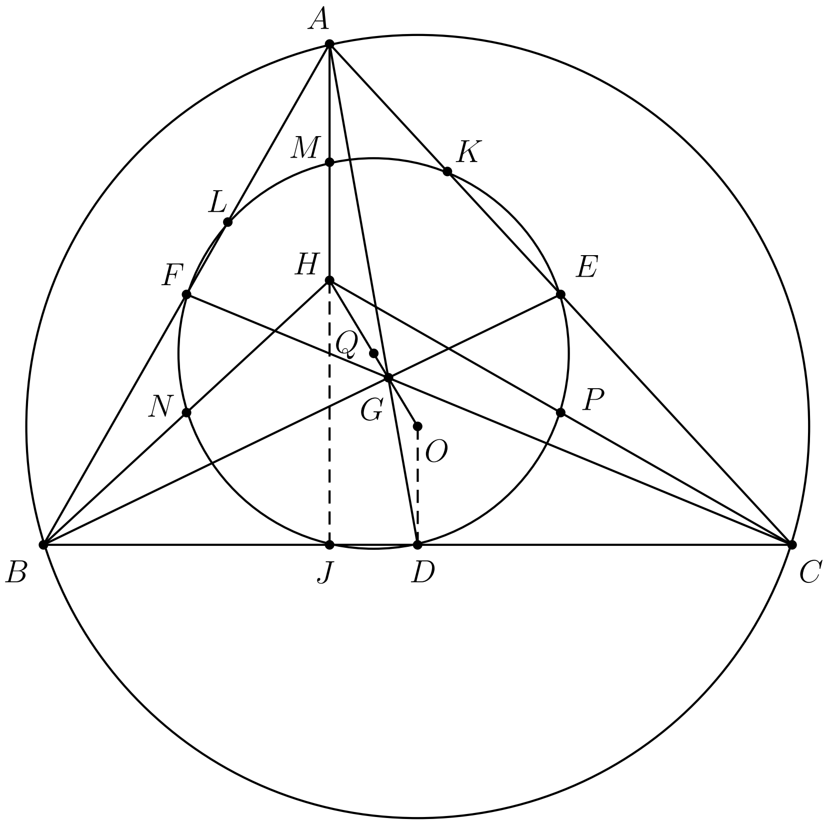
Dada una circunferencia de centro Q y radio r, su homotética es también una circunferencia, con centro Q' y radio kr.

Dadas dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 con centros O_1 y O_2 y radios diferentes r_1 y r_2, respectivamente, hay exactamente dos homotecias que llevan la primera en la segunda. Una de ellas tiene razón r_2/r_1 y la otra $-r_2/r_1$. Si $O_1 = O_2$, las dos homotecias tienen centro O_1. Si $O_1 \neq O_2$, tomemos un punto A en Γ_1. Su correspondiente A' debe estar en Γ_2 y como O_1A debe ser paralela a O_2A', hay exactamente dos posibilidades para A'. Para cada A', la intersección de las rectas AA' y O_1O_2 nos dan los centros C_1 y C_2 de las dos homotecias.



Si las circunferencias tienen tangentes comunes, éstas pasan por alguno de los dos centros de homotecia.

La circunferencia de los nueve puntos Sea ABC un triángulo y O su circuncentro. Es sabido que las medianas AD, BE y CF concurren en el baricentro G, y que $GA/GD = GB/GE = GC/GF = 2$. Por lo tanto la homotecia h de centro G y razón $-\frac{1}{2}$ transforma A, B y C en D, E y F, respectivamente. El triángulo DEF se llama *triángulo medial* del ABC y tiene el mismo baricentro que ABC. Su circuncírculo Γ es entonces el homotético del de ABC, por lo cual su radio es la mitad del de éste último. El centro Q de Γ está entonces alineado con G y O, es exterior al segmento GO y cumple $GO = 2GQ$. Las alturas del ABC se transforman en las alturas del DEF, que son las mediatrices del ABC. Por lo tabto el ortocentro H de ABC se transforma en O, es decir $h(H) = O$. Resulta entonces que H, G y O están alineados y $HG = 2GO$. La recta que contiene a H, G y O se llama *recta de Euler*, y también contiene a Q, que resulta ser el punto medio de HO. Entonces Q equidista de D y del pie J de la altura desde A, y Γ pasa por J y por los pies K y L de las otras dos alturas. Γ pasa también por los puntos medios M, N y P de los segmentos HA, HB y HC. Por esta razón se le llama *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo ABC.



La composición de dos homotecias del mismo centro O y razones k_1 y k_2 es obviamente una homotecia de centro O y razón k_1k_2. Esto muestra que la inversa de una homotecia de centro O y razón k es la homotecia del mismo centro y razón $1/k$.

Si dos homotecias H_1 y H_2 tienen centros diferentes O_1 y O_2 y razones k_1 y k_2, entonces si $k_1k_2 \neq 1$ la composición es una homotecia de razón k_1k_2 y centro O alineado con O_1 y O_2. Probémoslo usando la representación compleja. Tomemos el origen en O_1 y el 1 en O_2. Entonces $H_1(z) = k_1z$ y $H_2(z) = 1 + k_2(z - 1)$. Luego

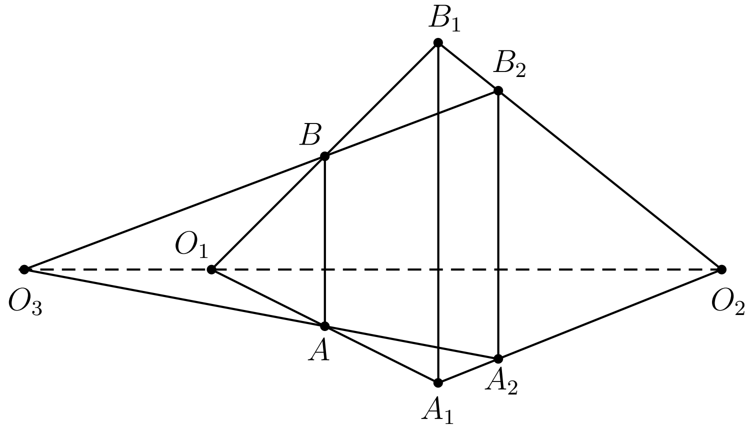
$$H_2(H_1(z)) = H_2(k_1z) = 1 + k_2(k_1z - 1) = 1 - k_2 + k_1k_2z.$$

Busquemos un w tal que la homotecia H_3 de centro x y razón k_1k_2 sea igual a $H_2 \circ H_1$, es decir tal que

$$H_3(z) = w + k_1k_2(z - w) = H_2(H_1(z)) = 1 - k_2 + k_1k_2z$$

para todo z. Esto equivale a $w - k_1k_2w = 1 - k_2$, es decir a $w = (1 - k_2)/(1 - k_1k_2)$. Entonces $H_2 \circ H_1$ es una homotecia de razón k_1k_2 y centro $w = (1 - k_2)/(1 - k_1k_2)$, que es real y por lo tanto está alineado con 0 y 1.

El centro O de $H_2 \circ H_1$ se puede construir tomando un par de puntos A y B y hallando $A_1 = H_1(A)$, $B_1 = H_1(B)$, $A_2 = H_2(A_1)$ y $B_2 = H_2(B_1)$. Entonces O es la intersección de AA_2 con BB_2, y se ve que está alineado con O_1 y O_2.



Si $k_1k_2 = 1$, entonces $H_1 \circ H_2$ es una traslación (ver ejercicios).

Ejercicio 37. Si A, A', B y B' son puntos colineales, con $A \neq B$ y $|AB| \neq |A'B'|$, muestre cómo se puede construir el centro de la homotecia que lleva A en A' y B en B'.

Ejercicio 38. Muestre que dasos dos puntos A y A' y un número real $k \neq 1$, existe una única homotecia de razón k que lleva A en A'.

Ejercicio 39. Si dos homotecias tienen centros diferentes O_1 y O_2 y razones k_1 y k_2 tales que $k_1k_2 = 1$, pruebe que la composición es una traslación de vector paralelo a la recta O_1O_2.

Ejercicio 40. Pruebe que la composición de una homotecia que no sea la identidad y una traslación es una homotecia.

Ejercicio 41. Pruebe que dadas dos circunferencias de radios diferentes, hay exactamente dos homotecias que llevan la primera en la segunda.

Ejercicio 42. Sea ABC un triángulo. Si por el punto medio de cada lado se traza una paralela a la bisectriz del ángulo opuesto, pruebe que se obtienen tres rectas concurrentes en un punto P, alineado con el baricentro G y el incentro I y tal que $GI = 2GP$.

Ejercicio 43. Dados un punto P y dos rectas r y s que se intersectan "fuera de la hoja del dibujo", trace por P una recta que sea concurrente con r y s.

Problema 44. Sea ABC un triángulo y sean X, Y y Z puntos en las rectas AB, BC y CA, respectivamente, diferentes de los vértices del triángulo. Pruebe el teorema de Menelao:

X, Y y Z están alineados si y sólo si $\frac{AX}{XB}\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot = -1$,

aplicando homotecias de centros X, Y y Z.

Nota: los segmentos se consideran orientados, y sus razones son positivas o negativas según que ambos tengan sentidos iguales u opuestos.

Problema 45. Sea ABC un triángulo y sean R y r su circunradio y su inradio, respectivamente. Pruebe la desigualdad de Euler $R \geq 2r$ aplicando a la circunferencia de los nueve puntos tres homotecias de centros A, B y C que la transformen en el incírculo del ABC.

Ejercicio 46. Sea ABC un triángulo. Pruebe que las rectas que pasan por cada vértice y el punto de tangencia del lado opuesto con la circunferencia exinscrita son concurrentes en un punto N (llamado *punto de Nagel*), alineado con el baricentro G y el incentro I y tal que $GN = 2GI$.

8. Semejanza

A la composición $H \circ M$ de una homotecia H con una isometría M se le llama *semejanza*.

De las propiedades de las isometrías y las homotecias se deduce que las semejanzas transforman rectas en rectas, que conservan los ángulos entre rectas y que los segmentos correspondientes son proporcionales: si la razón de la homotecia es k, entonces para cada par de segmentos correspondientes AB y $A'B'$ se tiene $\frac{A'B'}{AB} = |k|$.

Si H es una homotecia y M una isometría, entonces $H^{-1} \circ M \circ H$ conserva las distancias y es una isometría M'. De $H^{-1} \circ M \circ H = M'$ se obtiene $M \circ H = H \circ M'$, es decir que no importa en qué orden se componga una homotecia con una isometría, siempre se obtiene una semejanza. En particular la inversa de una semejanza $S = H \circ M$ es $S^{-1} = M^{-1} \circ H^{-1}$, que también es una semejanza.

De esto se sigue que la composición de semejanzas es una semejanza, ya que $(H \circ M) \circ (H_1 \circ M_1) = H \circ (M \circ H_1) \circ M_1$ y $M \circ H_1$se puede escribir como $H_1 \circ M'$, de donde $(H \circ M) \circ (H_1 \circ M_1) = H \circ H_1 \circ M' \circ M_1$, y como $H \circ H_1$ es una homotecia y $M' \circ M_1$ una isometría, listo.

Por lo tanto las semejanzas forman grupo (y las semejanzas directas son un subgrupo).

Dados dos segmentos AB y $A'B'$ hay exactamente dos semejanzas que llevan el primero en el segundo, una directa y otra inversa. En efecto, sea C el punto de la semirecta AB tal que $AC = A'B'$. Sea H la homotecia de centro A y razón AC/AB, y M el único movimiento directo que lleva AC en $A'B'$. Entonces $S = M \circ H$ es una semejanza directa que lleva AB en $A'B'$. Si hubiese otra U, entonces $S \circ U^{-1}$ sería una isometría directa que lleva AB en AB, por lo tanto sería la identidad y de $S \circ U^{-1} = Id$ se sigue $S = U$.

Análogamente se prueba que hay sólo una semejanza inversa que lleva AB en $A'B'$.

Es claro que los movimientos y las homotecias son casos particulares de semejanza, pero hay otras. Una *rotohomotecia* (también llamada semejanza o similitud *en espiral*) es la composición de una rotación con una homotecia del mismo centro (no importa en qué orden, el resultado será el mismo). Por ejemplo si se aplica una rotación de $90°$ con centro O y a continuación una homotecia con centro O y razón 2, la rotohomotecia resultante no es un movimiento (pues duplica las distancias entre puntos) ni una homotecia (pues cada segmento se transforma en otro perpendicular).

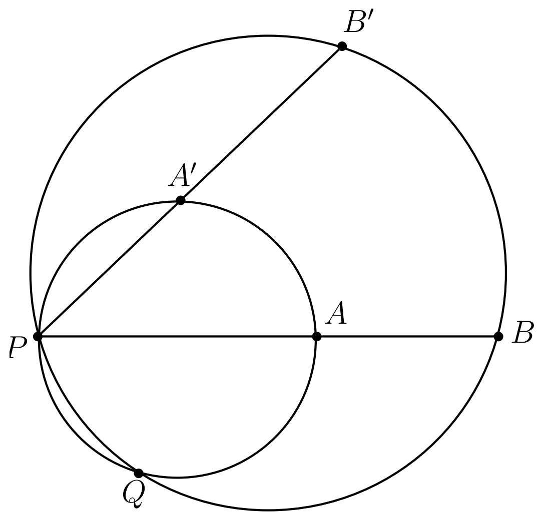
En una rotohomotecia de centro O, ángulo φ y razón k, cualquier par de puntos correspondientes A y A' cumple $\angle AOA' = \varphi$ y $OA'/OA = |k|$. Todos los triángulos OAA' son semejantes, y en particular los ángulos $\angle OAA'$ son todos iguales.

Un resultado importante es que **toda semejanza directa es una traslación o una rotohomotecia**. En efecto, sea $S = H \circ M$ donde H es una homotecia y M una isometría directa, es decir una traslación o una rotación. Si H es la identidad, entonces $S = M$ es una traslación o una rotación. Si H no es la identidad y M es una traslación, ya sabemos que $S = H \circ M$ es una homotecia. El caso que queda por analizar es cuando H tiene razón $k \neq 1$ y M es una rotación. Romemos el centro de M como origen y sea a el centro de H. Entonces $H(z) = a+k(z-a)$ y $M(z) = e^{i\varphi}z$, de donde $S(z) = H(M(z)) = a+k(e^{i\varphi}z-a)$. Si $S = H \circ M$ es una rotohomotecia de centro b, su razón y ángulo deben ser los mismos k y φ, es decir que se debe cumplir

$$a + k(e^{i\varphi}z - a) = b + ke^{i\varphi}(z - b)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Pero es inmediato que esto se cumple para $b = a(1-k)/(1-ke^{i\varphi})$.

Dados dos segmentos AB y $A'B'$, si son paralelos entonces la única semejanza directa que lleva AB en $A'B'$ es una homotecia, o una traslación si $AB = A'B'$. Si no son paralelos es una rotohomotecia, cuyo ángulo φ es uno de los dos que forman las rectas AB y $A'B'$. El centro Q puede hallarse geométricamente del siguiente modo: sea P la intersección de las rectas AB y $A'B'$. Entonces $\angle AQA' = \varphi$ y $\angle APA'$ debe ser igual a φ o a su suplementario, es decir que A, A', P y Q son concíclicos. Análogamente B, B', P y Q deben ser concíclicos y por lo ranto Q es uno de los puntos de intersección de los circincírculos Γ_A de PAA' y Γ_B de PBB'. Podría ser P, pero sólo si $PA'/PA = PB'/PB$, en cuyo caso $PB/PA = PB'/PA'$, PAA' y PBB' son homotéticos con centro en P y Γ_A y Γ_B son tangentes en P. Es decir que si Γ_A y Γ_B no son tangentes, Q es su punto de intersección diferente de P.



Ejercicio 47. Sean ABC y DEF dos triángulos, y P un punto en el segmento AB. Construya puntos Q en BC y R en CA de modo que PQR sea semejante a DEF.

Problema 48. (APMO 2017) Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interna de $\angle BAC$ con el circincírculo de ABC. Sea Z el punto de intersección de la mediatriz de AC con la bisectriz externa de $\angle BAC$. Pruebe que el punto medio del segmento AB está en el circuncírculo del triángulo ADZ.

9. Soluciones y sugerencias

1. Sea f una isometría y para cualquier punto P pongamos $P' = f(P)$.

(a) Si $P' = Q'$ entonces $\mathrm{d}(P,Q) = \mathrm{d}(P',Q') = 0$, de donde $P = Q$. Luego f es inyectiva.

(b) Si A, B y C están alineados, con B entre A y C, entonces $\mathrm{d}(A,C) = \mathrm{d}(A,B)+\mathrm{d}(B,C)$. Por lo tanto $\mathrm{d}(A',C') = \mathrm{d}(A',B') + \mathrm{d}(B',C')$, lo que significa que A', B' y C' están alineados, con B' entre A' y C'.

(c) Dada una recta r sea A un punto de la misma y sea B otro punto a distancia 1 de A. Introduzca coordenadas en r de modo que A sea el origen y B tenga abscisa 1. Como $\mathrm{d}(A',B') = \mathrm{d}(A,B) = 1$, se pueden introducir coordenadas en la recta $r' = A'B'$ de modo que A' sea el origen y B' tenga abscisa 1. Si $X \in r$ tiene abscisa x, entonces X' está en r' por (b) y es claro que debe tener la misma abscisa x. Recíprocamente, si $Y \in r'$ tiene abscisa y, entonces el punto X con abscisa y en r sólo puede transformarse en Y, y la correspondencia es sobre.

(d) Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ los dos semiplanos determinados por una recta r. Si $P_1 \in \mathcal{H}_1$ y $P_2 \in \mathcal{H}_2$ entonces el segmento P_1P_2 corta a r en un punto Q, luego $P_1'P_2'$ corta a r' en el punto Q' y P_1' y P_2' están a distinto lado de r'. Si $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son los dos semiplanos determinados por r' y $P_i' \in \mathcal{K}_i$, es claro que todos los puntos de $\mathcal{H}_i$ van a puntos de $\mathcal{K}_i$, para $i = 1, 2$.

(e) Para ver que f es sobre, dado un punto P_1 tomemos dos puntos cualesquiera A y B. Si A', B' y P_1 están alineados, entonces por (c) hay un (único) punto Q_1 en AB tal que $Q_1' = P_1$. Si en cambio A', B' y P_1 forman triángulo, entonces hay exactamente otro punto P_2 tal que $\mathrm{d}(A',P_2) = \mathrm{d}(A',P_1)$ y $\mathrm{d}(B',P_2) = \mathrm{d}(B',P_1)$. También hay exactamente dos puntos Q_1 y Q_2 tales que $\mathrm{d}(A,Q_2) = \mathrm{d}(A,Q_1)$ y $\mathrm{d}(B,Q_2) = \mathrm{d}(B,Q_1)$. Ahora Q_1' y Q_2' sólo pueden ser P_1 o P_2, y como f es inyectiva $Q_1' \neq Q_2'$. Es decir que P_1 es imagen de Q_1 o de Q_2.

(f) Si $\angle ABC = 0$ entonces A, B y C están alineados, con A y C de un mismo lado de B, luego lo mismo ocurre con A', B' y C' y $\angle A'B'C' = 0$. Análogamente se prueba el caso $\angle ABC = 180\circ$. Si A, B y C forman triángulo, entonces $A'B'C$ es un triángulo con lados respectivamente iguales a los de ABC, y por lo tanto $\angle A'B'C' = \angle ABC$.

Si $AB \parallel CD$, entonces $\angle ABC = \angle BCD$, luego $\angle A'B'C' = \angle B'C'D'$ y $A'B' \parallel C'D'$.

(g) Sea Γ una circunferencia de centro O y radio r. Si $P \in \Gamma$ entonces $\mathrm{d}(P',O') = \mathrm{d}(P,O) = r$ y P' pertenece a la circunferencia Γ' de centro O' y radio r. Recíprocamente si $Q \in \Gamma'$ entonces como f es sobre $Q = f(S)$ para algún S, pero $\mathrm{d}(S,O) = \mathrm{d}(Q,O') = r$ y $S \in \Gamma$. Es decir que f transforma biyectivamente Γ en Γ'.

2. $\mathrm{d}(f(g(P)), f(g(Q))) = \mathrm{d}(g(P), g(Q)) = \mathrm{d}(P,Q)$, luego $f \circ g$ es una isometría. Si f y g son ambas directas, cada una conserva el sentido y la composición $f \circ g$ también. Si ambas son inversas, g cambia el sentido y f lo vuelve a cambiar, luego $f \circ g$ lo conserva. Si f y g son de diferente tipo entonces una cambia el sentido y la otra lo conserva, luego $f \circ g$ lo cambia.

3. La identidad I es una isometría directa. La composición de dos isometrías directas es directa por (2). Cualquier isometría M y su inversa M^{-1} son del mismo tipo, puesto que $MM^{-1} = I$ es directa. Luego la inversa de una isometría directa es también directa.

4. Por dejar fijos A, B y C deja fijas las rectas AB y AC. Dado cualquier punto P, sean P_1 la intersección de AB con la paralela r a AC por P, y P_2 la intersección de AC con la paralela s a AB por P. Como P_1 y P_2 quedan fijos, y se preserva el paralelismo, r se transforma en r y s en s, luego P que está en ambas debe ir a la intersección de r y s, es decir que queda fijo.

5. Si A' es el trasladado de A en dirección perpendicular al río una distancia igual al ancho del mismo, entonces $AM + MN + NB = AA' + A'N + NB$, por lo cual basta minimizar $A'N + NB$, lo que se consigue tomando como N la intersección de $A'B$ con la orilla sur del río.

6. Se toma A' como en el problema anterior y luego se traslada en dirección perpendicular al segundo río una distancia igual a su ancho, obteniendo A''. La intersección de $A''B$ con la orilla del segundo río más cercana a B nos da Q, etc.

7. El centro Q debe pertenecer a las mediatrices de PP' y de QQ'. Si éstas se cortan en un punto, ese es el centro. Si ambas mediatrices coinciden, entonces Q se halla en la intersección de las rectas PQ y $P'Q'$. Hallado Q, el ángulo es $\angle PQP'$.

8. Sea M una isometría directa que deja fijos A y B. Entonces deja fijo cualquier punto de la recta AB. Si C es un punto fuera de la recta AB, entonces $M(C)$ sólo puede ser C o el punto D simétrico de C respecto a AB. Pero en este último caso M no sería directa. Luego $M(C) = C$ y M es la identidad.

9. Sea M una isometría directa tal que $M(Q) = Q$. Sea $P \neq Q$ y $P' = M(P)$. Como $QP = QP'$ la rotación R de centro Q y ángulo $\alpha = \angle PQP'$ lleva P en P'. Sea R^{-1} la rotación inversa de R (es decir la rotación de centro Q y ángulo $-\alpha$. Entonces $M \circ R^{-1}$ deja fijos Q y P, y como es directa por (8) es la identidad, de donde $M \circ R^{-1} = I$ y $M = R$.

10. Tomemos el centro de la rotación como origen y sea $T(z) = z + v$ la traslación y $R(z) = e^{i\alpha}z$ la rotación. Entonces, como $e^{i\alpha} \neq 1$, se tiene

$$T(R(z)) = T(e^{i\alpha}z) = e^{i\alpha}z + v = e^{i\alpha}\left(z - \frac{v}{1-e^{i\alpha}}\right) + \frac{v}{1-e^{i\alpha}},$$

es decir que $T(R(z))$ es una rotación de centro $\frac{v}{1-e^{i\alpha}}$ y ángulo α.

Observe que $R(T(z))$ también es una rotación de ángulo α pero con diferente centro, ya que

$$R(T(z)) = e^{i\alpha}(z+v) = e^{i\alpha}\left(z - \frac{e^{i\alpha}v}{1-e^{i\alpha}}\right) + \frac{e^{i\alpha}v}{1-e^{i\alpha}}.$$

11. Si $R_1(z) = e^{i\alpha}z$ y $R_2(z) = u + e^{i\beta}(z-u)$ entonces, si $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, se tiene

$$R_1(R_2(z)) = e^{i\alpha}u + e^{i(\alpha+\beta)}(z-u) = e^{i(\alpha+\beta)}\left(z - \frac{e^{i\alpha}u(1-e^{i\beta})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}\right) + \frac{e^{i\alpha}u(1-e^{i\beta})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}.$$

Si $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ entonces

$$R_1(R_2(z)) = e^{i\alpha}u + e^{i(\alpha+\beta)}(z-u) = z + (e^{i\alpha}-1)u.$$

12. Sea M una isometría directa, P un punto, $P' = M(P)$ y T la traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$. Entonces $M \circ T^{-1}$ es una isometría directa que deja P' fijo, luego es una rotación

R, es decir que $M \circ T^{-1} = R$, de donde $M = R \circ T$, que es una traslación o una rotación según que R sea o no la identidad.

13. Consecuencia de (9) y (12).

14. Son dos rotaciones cuyos ángulos suman 360°, luego la composición es una traslación, cuyo vector es fácil ver que es $\overrightarrow{O_1O_2}$.

15. Si el vector de la traslación es v, basta tomar cualquier O_1 y $O_2 = O_1 + \frac{1}{2}v$.

16. Una rotación de 180°, es decir otra simetría central.

17. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias, y sea Γ_1' el resultado de aplicar la simetría central de centro P a Γ_1. Si Q es un punto común a Γ_1' y Γ_2 distinto de P, entonces la recta PQ tiene la propiedad deseada. El problema no tiene solución si Γ_1 y Γ_2 son tangentes en P.

18. Sea Γ_i la circunferencia de radio r_i. Si $A_1A_2A_3$ es un triángulo equilátero con $A_i \in \Gamma_i$, entonces la rotación de 60° con centro A_3 que lleva A_1 en A_2 debe llevar Γ_1 en una circunferencia Γ_1' que corta a Γ_2 en A_2. Esto da la idea para la contrucción: tome un $A_3 \in \Gamma_3$ cualquiera, construya Γ_1' rotando Γ_1 60° alrededor de A_3, y corte con Γ_2 para obtener A_2. A_1 se obtiene aplicando el giro inverso a A_2. Si Γ_1' y Γ_2 se intersectan en dos puntos tendremos así dos soluciones, y como Γ_1 se puede girar alrededor de A_3 en el sentido contrario habrá dos soluciones más para un total de cuatro. Si Γ_1' y Γ_2 son tangentes, cosa que ocurre si $r_1 + r_2 = r_3$, hay dos soluciones. Y si si $r_1 + r_2 < r_3$ no hay solución.

19. La rotación de 60° con centro B lleva C en G y A en F, luego lleva la recta CA en la GF y B está en la bisectriz del ángulo formados por estas rectas que contiene a B. Pero G pertenece a AF si y sólo si las rectas GF y AF coinciden, caso en el cual la bisectriz debe ser BA y $\angle CBA = \angle BAF = 60°$.

20. a) $F = \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$. Todos los puntos $(n, 0)$ y $(n/2, 0)$ para $n \in \mathbb{Z}$ son centros de simetría.

b) Si F tiene centros de simetría O_1 y O_2, y S_i es la simetría central de centro O_i, entonces $S_1(F) = S_2(F) = F$. Sea $O_3 = S_2(O_1)$ y S_3 la simetría central de centro O_3. $S_2S_1S_2$ es una simetría central, y $S_2S_1S_2(S_2(O_1)) = S_2S_1(O_1) = S_2(O_1) = O_3$, es decir que $S_2S_1S_2 = S_3$ y $S_3(F) = F$. O sea que S_3 es también centro de simetría. Y a partir de O_2 y O_3 se construye otro centro O_4 y así sucesivamente resultan infinitos centros equiespaciados.

21. Sean A_1, A_2,..., A_5 los vértices del pentágono, de modo que M_i sea el punto medio de A_iA_{i+1} (con $A_6 = A_1$). Sea S_i la simetría central con centro M_i. Entonces $S_i(A_i) = A_{i+1}$. $S = S_5S_4S_3S_2S_1$ es una simetría central, y como $S(A_1) = A_1$, A_1 es su centro. Entonces para hallar A_1 basta aplicar S a un punto cualquiera, por ejemplo a M_1, y A_1 será el punto medio del segmento $M_1S(M_1)$. Una vez hallado A_1, aplicándole sucesivamente S_1, S_2, S_3 y S_4 se obtienen los demás vértices.

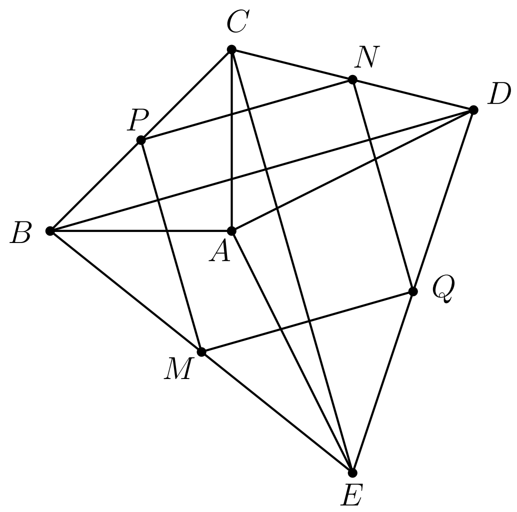
22. Si la rotación de centro C y ángulo 2γ se aplica al punto A se obtiene el punto A' simétrico de A respecto a BC. Si ahora se aplica la rotación de centro B y ángulo 2β a A' se obtiene A. Luego A es el centro de la composición, que es una rotación de ángulo $2\gamma + 2\beta = 360° - 2\alpha$.

23. Supongamos A, B y C ordenados en sentido positivo.

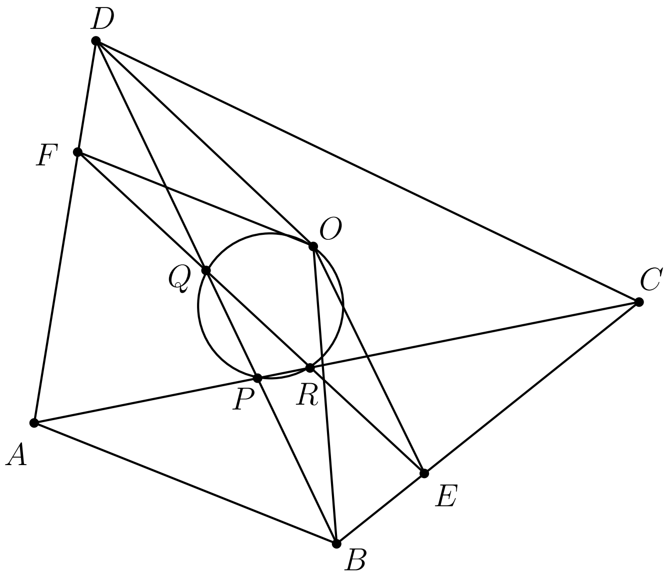
(a) Sean R_a, R_b y R_c las rotaciones de 60° con centros A_1, B_1 y C_1, respectivamente. La composición $R_cR_aR_b$ es una rotación de 180° que deja fijo el punto A, es decir que es una simetría central de centro A. Luego A es el punto medio de cualquier segmento con extremos correspondientes, por ejemplo de $B_1R_c(R_a(B_1)$, etc.

(b) Si A_2, B_2 y C_2 son los centros de los triángulos equiláteros A_1BC, AB_1C y ABC_1, y R_a, R_b y R_c son ahora las rotaciones de 120° con centros A_2, B_2 y C_2, entonces $R_cR_aR_b$ es la identidad, pues $120° + 120° + 120° = 180°$ y A queda fijo. Luego $B_2 = R_c(R_a(R_b(B_2))) = R_c(R_a(B_2))$, es decir que B_2 es el centro de R_cR_a. Por (22) resulta que $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_2C_2A_2 = 60°$. Considerando $R_bR_cR_a$ se prueba análogamente que $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_2C_2B_2 = 60°$ y listo.

24. La rotación de 90° y centro A que lleva a B en C, lleva también a D en E y por lo tanto a BD en CE. Luego BD y CE tienen igual longitud y $BD \perp CE$. Pero PN es la paralela media del triángulo BCD, es decir que es paralela a BD y de longitud mitad que BD. Análogamente MQ es paralela media del triángulo BED, luego $MQ \parallel BD \parallel PN$ y MQ y PN tienen igual longitud (la mitad de BD). Análogamente $PM \parallel CE \parallel NQ$ y PM y NQ tienen igual longitud, a saber la mitad de CE que es igual a la mitad de BE. Luego $MPNQ$ es un cuadrado y sus diagonales MN y PQ se cruzan y son perpendiculares.



25. La isometría directa que lleva DA en BC lleva también F en E, y como DA y BC no son paralelos, debe ser una rotación cuyo centro es el punto O de intersección de las mediatrices de BD y AC. Veremos que Q es el punto buscado. Si el ángulo de la rotación es φ, entonces se tiene $OD = OB$, $OF = OE$, $OA = OC$, $\angle DOB \angle FOE \angle AOC = \varphi$ y por lo tanto $\angle ODB \angle OFE \angle OAC = (180° - \varphi)/2$. Luego O, F, A y R son concíclicos y $\angle ORP = 180° - \angle OFA$. Análogamente O, E, B, Q son concíclicos y $\angle OQP = 180° - \angle OEB = \angle OEC = \angle OFA$. Por lo tanto $\angle ORP = 180° - \angle OQP$ y O, P, Q y R son concíclicos.



26. Sea M una isometría inversa que deja A y B fijos, Sea S la simetría axial de eje AB. Entonces SM es una isometría directa que deja A y B fijos, y por (8) es la identidad. Es decir que $SM = I$, de donde $SSM = SI$ y $M = S$.

27. Sea $v = \overrightarrow{AC}$ y $B_1 = T_v(B)$. Sea $\alpha = \angle B_1CD$ y R la rotación de centro C y ángulo α. Entonces RT_v es una isometría directa que lleva A en C y B en D. Si hubiese otra M entonces $M^{-1}RT_v$ por (8) es la identidad y $M = RT_v$. Si S es la simetría axial de eje CD entonces SRT_v es una isometría inversa que lleva A en C y B en D. Si hubiese otra M entonces $M^{-1}SRT_v$ por (26) es la identidad y $M = SRT_v$.

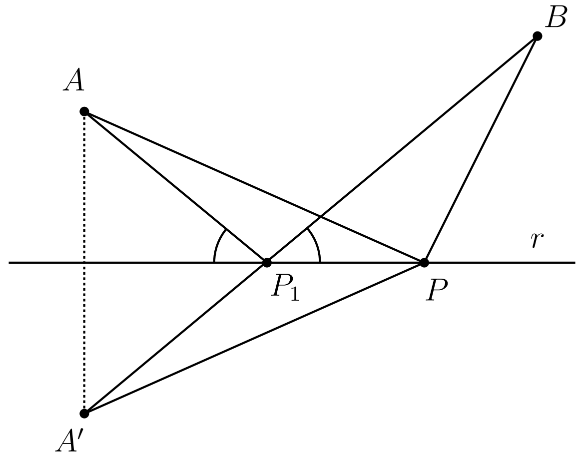
28. Si los ejes son paralelos, una traslación de vector perpendicular a los ejes y magnitud doble de la distancia entre ellos. Si se cortan en un punto Q, una rotación de centro Q y ángulo doble del que forman los ejes.

29. Si T es una traslación de vector v, sea r_1 una recta perpendicular a v y sea r_2 la trasladada de r_1 según el vector $v/2$. Entonces si S_i es la simetría axial de eje r_i se tiene $S_2S_1 = T$.

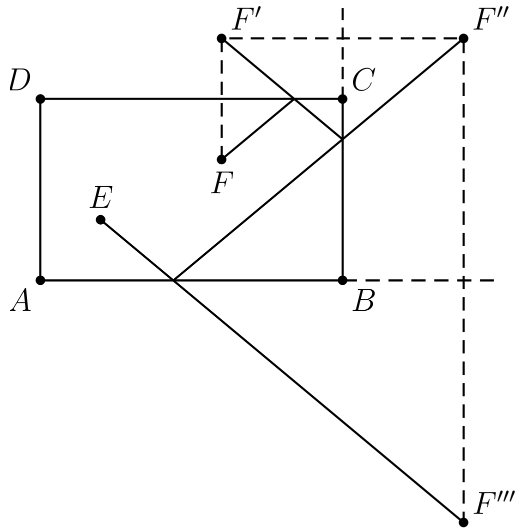
Sea R una rotación de centro Q y ángulo α. Tracemos por Q dos rectas r_1 y r_2 que formen ángulo $\alpha/2$. Entonces si S_i es la simetría axial de eje r_i se tiene $S_2S_1 = R$.

30. La composición de la simetría axial S_0 respecto al eje de las x y la simetría axial S_φ respecto a una recta que pasa por el origen y forma un ángulo φ con el eje de las x es la rotación $R_{O,2\varphi}$. Es decir que $S_\varphi \circ S_0 = R_{O,2\varphi}$, y componiendo a la derecha con S_0 se obtiene $S_\varphi = R_{O,2\varphi} \circ S_0$. Por lo tanto $S_\varphi(z) = R_{O,2\varphi}(S_0(z)) = e^{2\varphi i}\overline{z}$.

31. Sea A' el simétrico de A respecto a r. Entonces $AP+PB = A'P+PB$, que es mínimo cuando P es el punto P_1 de intersección de $A'B$ con r.



32. Si F' es el punto simétrico de F respecto a la recta CD, F'' el simétrico de F' respecto a la recta BC y F''' el simétrico de F'' respecto a la recta AB, entonces la bola E debe dirigirse hacia F'''.



33. Sea S_1 una simetría axial con eje r_1 y sea T_v una traslación de vector v. Escribamos $v = w + u$, con u paralelo a r_1 y v perpendicular a r_1. Rntonces $T_v = T_u T_w = T_w T_u$. Sea r_2 la trasladada de r_1 según el vector $w/2$, y sea S_2 la simetría axial con eje r_2. Entonces $S_2 S_1 = T_w$ y $T_v S_1 = T_u T_w S_1 = T_u S_2 S_1 S_1 = T_u S_2$. Además si r_3 es la trasladada de r_1 según el vector $-w/2$, y S_3 la simetría axial con eje r_3, entonces $S_1 S_3 = T_w$ y $S_1 T_v = S_1 T_w T_u = S_1 S_1 S_3 T_u = S_3 T_u$.

34. Este es una generalización del (31). Sea v un vector de magnitud d paralelo a r y sea A' el resultado de aplicar a A la antitraslación de eje r y vector v. Sea Y la intersección de $A'B$ con r, t $X = Y - v$. La solución es $AXYB$.

35. Si M es una isometría inversa, sea S_1 una simetría axial respecto a un eje r_1 cualquiera. Entonces MS_1 es una isometría directa, que por (12) es una traslación o una rotación. Si es una traslación T entonces $MS_1 = T$, de donde $M = MS_1 S_1 = TS_1$ que por (33) es una antitraslación. Si en cambio MS_1 es una rotación R de centro Q y ángulo α, tracemos por Q una recta r_2 paralela a r_1 y otra recta r_3 que forme ángulo $\alpha/2$ con r_2, de modo que si S_2 y S_3 son las simetrías de ejes r_2 y r_3 se tenga $S_3S_2 = R$. Entonces $MS_1 = R = S_3S_2$ y $M = MS_1S_1 = RS_1 = S_3S_2S_1$. Pero como $r_2 \parallel r_1$, S_2S_1 es una traslación T y $M = S_3S_2S_1 = S_3T$ es una antitraslación por (33).

36. Si la isometría es directa entonces es una traslación o es una rotación, que se puede expresar como la composición de dos simetrías axiales por (29). Si es inversa es una antitraslación TS_1, y expresando la traslación T como la composición de dos simetrías axiales S_3S_2 resulta $TS_1 = S_3S_2S_1$.

37. Tomemos un punto C fuera de la recta r que contiene a A, A', B y B'. Entonces la homotecia transforma la recta AC en la recta $a \parallel AC$ que pasa por A', y la recta BC en la recta $b \parallel BC$ que pasa por B'. La intersección de a y b debe ser C', y la intersección de las rectas CC' y r es el centro de la homotecia.

38. La homotecia de centro w y razón k es $H(z) = w + k(z - w)$. La condición $H(a) = a'$ nos da $a' = w + k(a - w)$, o equivalentemente $w = (a' - ka)/(1 - k)$.

39. Identifiquemos el plano con $\mathbb{C}$ de modo que O_1 sea el origen y O_2 sea el punto 1. Entonces $H_1(z) = k_1z$ y $H_2(z) = 1 + k_2(z - 1)$. Luego $H_2(H_1(z)) = 1 + k_2(k_1z - 1) = 1 - k_2 + k_2k_1z = z + (1 - k_2)$, que es una traslación de vector paralelo a la recta O_1O_2.

40. Si la homotecia es $H(z) = kz$ y la traslación $T(z) = z + v$, entonces $T(H(z)) = kz + v = k(z - \frac{v}{1-k}) + \frac{v}{1-k}$, que es una homotecia de centro $\frac{v}{1-k}$ y razón k. Si se hace la composición en orden diferente se tiene $H(T(z)) = k(z + v) = k(z - \frac{kv}{1-k}) + \frac{kv}{1-k}$, que es una homotecia de centro $\frac{kv}{1-k}$ y razón k.

41. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias. Sean O_i y r_i el centro y el radio, respectivamente, de Γ_i. Una homotecia que lleve Γ_1 en Γ_2 debe llevar O_1 en O_2 y debe tener razón r_2/r_1 o $-r_2/r_1$. Por el problema 38 hay sólo una homotecia del primer tipo y una del segundo.

42. La homotecia de centro G y razón $-\frac{1}{2}$ lleva cada bisectriz en la paralela a ella por el punto medio del lado opuesto, luego las tres paralelas se cortan en $h(I)$.

43. Considere una homotecia de centro P y razón suficientemente pequeña para que las rectas r' y s', homotéticas de r y s, se corten en un punto Q dentro de la hoja del dibujo. Entonces PQ es la recta buscada.

44. Supongamos que $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot = -1$. Sean h_1 y h_2 las homotecias de centros X e Y y razones $\frac{XA}{XB}$ y $\frac{YB}{YC}$, respectivamente. Entonces $h_1 \circ h_2$ es una homotecia de razón

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} = \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} = -\frac{ZA}{CZ} = \frac{ZA}{ZC},$$

y $h_1(h_2(C)) = A$. Pero la homotecia de centro Z y razón $\frac{ZA}{ZC}$ es la única que lleva C en A, luego Z es el centro de $h_1 \circ h_2$ y por lo tanto está alineado con Y y Z.

El recíproco es inmediato, ya que si X, Y, Z están alineados entonces podemos tomar un punto X' en la recta AB tal que $\frac{AX'}{X'B} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot = -1$, y por el directo X' está alineado con Y y Z, luego es la intersección de AB con YZ, que es Z.

45. La circunferencia de los nueve puntos Γ tiene radio $R/2$. Aplicándole una homotecia de centro A y razón $k_1 \leq 1$, se puede transformar en una circunferencia Γ_1 tangente al lado BC. Aplicando ptra homotecia de centro B y razón $k_2 \leq 1$, Γ_1 se puede transformar en una circunferencia Γ_2 tangente al lado AC y que sigue siendo tangente al lado BC.

Finalmente mediante una homotecia de centro C y razón $k_3 \le 1$, Γ_2 se puede transformar en el incírculo de ABC. Por lo tanto $r = k_1k_2k_3(R/2) \le R/2$.

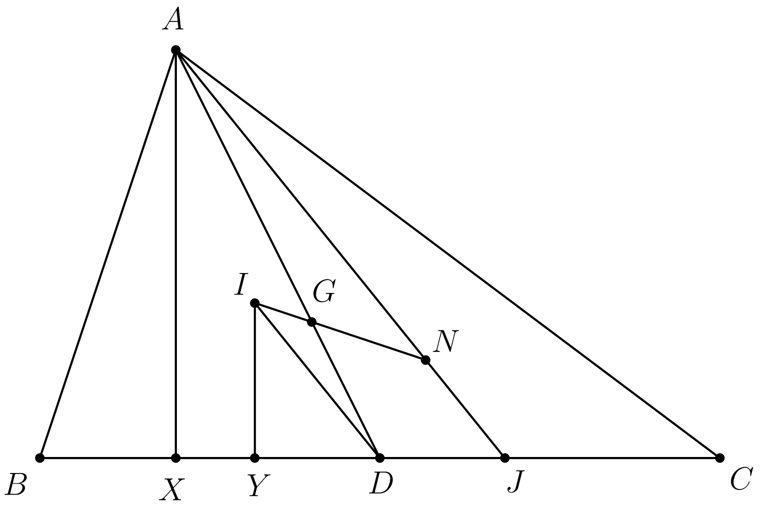
46. Sean D, E y F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Sea X el pie de la altura desde A. Sea Y el punto de contacto del incírculo con el lado BC. Sean J, K y L los puntos de contacto de los lados BC, CA y AB con sus correspondientes exincírculos. Probemos primero que los triángulos rectángulos IYD y AXJ son semejantes. Para eso basta ver que $YD/YI = XJ/XA$. Sean $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ y $p = (a+b+c)/2$. Es sabido (y fácil de probar) que $BY = p - b = JC$. Si $x = BX$ entonces, calculando AX^2 por Pitágoras en los triángulos ABC y AXC se tiene $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$, de donde $2ax = c^2 - b^2 + a^2$ y $x = (a^2 - b^2 + c^2)/(2a)$. Además $UY = r$ (el inradio) y $AX = h_a$ (la altura desde A). Como el área de ABC es $ah_a/2 = pr$ se tiene que $ah_a = 2pr$. Ahora bien,

$$YD = BD - BY = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{1}{2}(b-c),$$

y

$$\begin{aligned} XJ &= a - BX - JC = a - \frac{1}{2a}(a^2 - b^2 + c^2) - (p-b) \\ &= \frac{1}{2}(a+b-c) - \frac{1}{2a}(a^2 - b^2 + c^2) = \frac{1}{2a}\big(a^2 + ab - ac - (a^2 - b^2 + c^2)\big)) \\ &= \frac{1}{2a}(ab - ac + b^2 - c^2) = \frac{1}{2a}(a+b+c)(b-c)) = \frac{p}{a}(b-c). \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\frac{XJ}{XA} = \frac{p}{ah_a}(b-c) = \frac{1}{2r}(b-c) = \frac{YD}{YI}.$$



Finalmente, como la homotecia h de centro G y razón -2 lleva D en A, debe llevar la recta DY en la recta AJ. Análogamente lleva EY en AK y FY en AL. Como DY, EY y FY concurren en I, las rectas AJ, AK y AL concurren en el punto $N = h(I)$, que por consiguiente está alineado con I y G y $GN = 2GI$.

47. La rotohomotecia r de centro P, ángulo $\angle EDF$ y eazón DF/DE debe llevar Q en R. Aplicando r a la recta $s = BC$ e intersectando s' con CA se obtiene R, y es inmediato hallar Q. Podría no haber solución, si s' no corta a CA, o haber infinitas, si s' contiene a CA.

48. Sea O el circuncentro de ABC y D' el punto diametralmente opuesto a D. Observe que la bisectriz externa de $\angle BAC$ es la recta AD'. Si $\alpha = \angle BAC$ entonces $\angle DAC = \alpha/2$ y $\angle ACZ = \angle CAZ = 90° - \alpha/2$, es decir que Z se obtiene aplicando a A una rotohomotecia r de centro C, ángulo $90° - \alpha/2$ y razón $CZ/CA = \frac{1}{2}\sec(90° - \alpha/2) = \frac{1}{2}\csc(\alpha/2)$. Luego para pasar de M a Z se debe aplicar una homotecia de centro B y razón 2 seguida de r, composición que es otra rotohomotecia r' de ángulo $90° - \alpha/2$ y razón $\csc(\alpha/2)$. Para determinar su centro observemos que si F es el punto medio de BC entonces $r'(F) = r(C) = C$, y $r'(O) = r(E) = Y$, donde OY es mediatriz de EC y es paralela a BC. Como $FC \parallel OY$, el centro buscado es la intersección de FP y CT, es decir D. por lo tanto $\angle MDZ = 90° - \alpha/2$ y como $DM/DZ = \operatorname{sen}(\alpha/2)$ resulta $\angle DMZ = 90°$.