Juegos de estrategia

José H. Nieto (jhnieto@yahoo.com)

1. Introducción

Los *juegos* a los cuales nos referimos en este trabajo pueden conceptualizarse como sistemas que pueden estar en cierto número de estados, también llamados *posiciones* del juego. Debe haber un estado *inicial* y uno o más estados *finales*. El estado del juego puede cambiar como consecuencia de las *jugadas* que realizan los contendientes, siguiendo las reglas específicas del juego. En los juegos *bipersonales* participan dos personas, a las cuales convencionalmente se les llama A y B, o primer y segundo jugador, respectivamente. Una *partida* se inicia en el estado inicial, y su desarrollo consiste en que A y B realizan jugadas de manera alternada, comenzando por A. Cada jugador, en su turno, tiene a su disposición un número finito de jugadas posibles y puede elegir cualquiera de ellas. Cuando se llega a una posición final la partida finaliza y las reglas del juego determinan qué jugador es el ganador, o si hay empate.

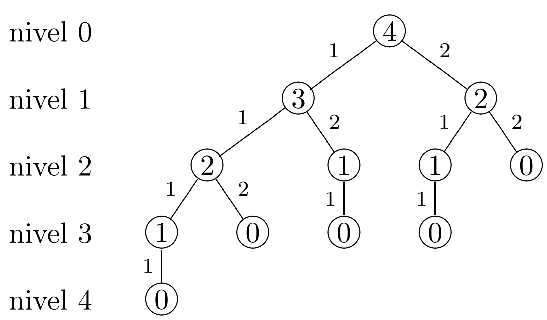
En lo que sigue se considerarán juegos que acaban siempre con un ganador y un perdedor, es decir que no pueden finalizar en empate o prolongarse indefinidamente (juegos *infinitos*) sin que ningún jugador logre vencer al otro. También se supondrá que ambos jugadores tienen pleno conocimiento del juego, de sus reglas y de las jugadas que cada uno ha realizado, es decir que no hay jugadas ocultas ni interviene para nada el azar. A estos juegos se les llama "juegos bipersonales finitos de información completa".

2. Un primer ejemplo sencillo

Para aclarar los conceptos introducidos consideremos un juego muy simple, que se inicia con un montón de cuatro piedras. Cada jugador, en su turno, puede retirar una o dos piedras del montón, y el primero que no pueda jugar porque el montón está vacío, pierde (equivalentemente, el que retire la última piedra gana). Los estados de este juego son cinco, y se pueden identificar mediante el número de piedras que haya en el montón, a saber 4, 3, 2, 1 ó 0. El estado inicial es el 4 y el estado 0 es final. Al que le toque jugar y encuentre el estado final (montón vacío) pierde. Es claro que cualquier juego finaliza con un ganador y un perdedor, pues el número de piedras en el montón disminuye en cada jugada y tiene que llegar a 0.

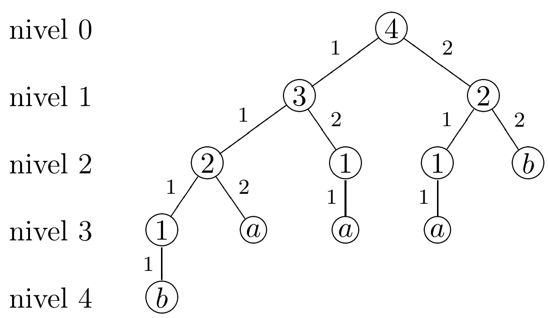
Una posible partida es la siguiente: A retira dos piedras, B retira una piedra, A retira una piedra y gana. Inmediatamente se observa que B jugó muy mal: si hubiese retirado dos piedras en vez de una hubiese ganado en la segunda jugada. Más aun, A jugó mal al retirar dos piedras en su primera jugada: retirando una no le hubiese dejado ninguna posibilidad de ganar a B. En efecto, si luego de retirar A una piedra, B retira una, entonces A retira dos y gana. Si en cambio B retira dos, entonces A retira una y también gana. Esto es lo que se llama una *estrategia ganadora* para A, es decir un sistema de juego que le asegura la victoria, juegue lo que juegue B. Por supuesto que en éste caso no hay ninguna estrategia ganadora para B, cuya única esperanza de ganar consiste en esperar que A se equivoque y juegue mal.

Todas las partidas posibles en este juego pueden representarse en forma de árbol. El estado inicial es la raíz del árbol, y a cada jugada posible le corresponde una rama que conecta dos estados. Le colocamos la etiqueta 1 o 2 a cada rama según que corresponda a la jugada de retirar una o dos piedras, respectivamente. Los nodos que corresponden a estados finales son llamados *hojas*, y no tienen hijos. Por alguna razón se acostumbra representar a los árboles en forma invertida, es decir con la raíz arriba y las ramas hacia abajo. El diagrama correspondiente a nuestro juego es por lo tanto el siguiente:

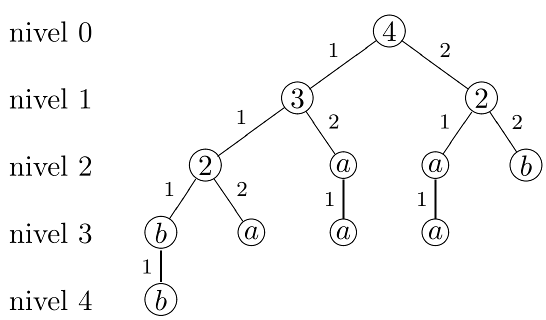


Se dice que la raíz del árbol es un nodo de nivel 0. Los hijos de la raíz son nodos de nivel 1, los hijos de los nodos de nivel 1 son de nivel 2 y así sucesivamente. Observe que los nodos de nivel par son posiciones que se encuentra el jugador A cuando le toca jugar, mientras que los nodos de nivel impar son posiciones que se encuentra B cuando le toca jugar. A cada partida le corresponde un camino en el árbol que se inicia en la raíz y va pasando de nodo en nodo hasta llegar a un nodo final. En este ejemplo hay cinco partidas posibles. Las tres que finalizan en un nodo de nivel impar son ganadas por A, mientras que las dos que finalizan en un nodo de nivel par son ganadas por B.

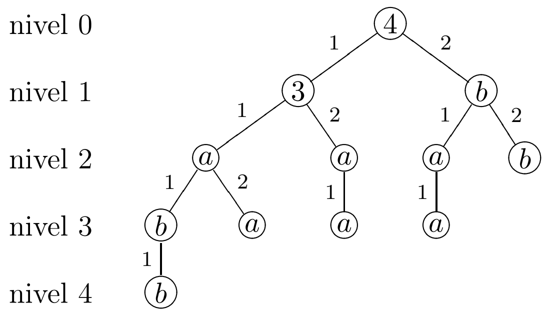
Digamos que un nodo es de tipo a si en cualquier partida que pase por ese nodo el jugador A tiene una manera de ganar, juegue lo que juegue B (análogamente se definen los nodos de tipo b). Entonces el árbol del juego permite determinar el tipo de todos los nodos. Para ello se comienza por etiquetar los nodos finales con a o b según correspondan a partidas ganadas por A o por B, respectivamente. Luego se observa que si un nodo x es de nivel par y alguno de sus hijos y es de tipo a, entonces x también es de tipo a, pues A puede jugar de modo de llevar el juego al nodo y, a partir del cual gana. Si por el contrario todos los hijos de un nodo x de nivel par son de tipo b, entonces x es de tipo b, pues juegue lo que juegue A siempre llegará a una posición en la que B le puede ganar. Análogamente, si un nodo de nivel impar tiene algún hijo de tipo b, él también es de tipo b; si en cambio todos sus hijos son de tipo a, entonces él también es de tipo A. Estas sencillas observaciones nos permiten ir etiquetando todos los nodos del árbol, ascendiendo desde las hojas hasta la raíz. El resultado del proceso de etiquetado en el árbol anterior se ilustra paso a paso en las figuras siguientes. Primero se etiquetan los nodos finales:



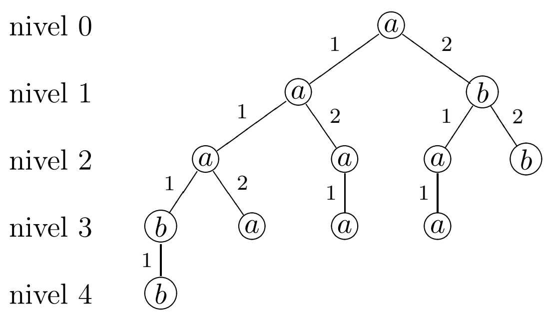
A continuación los nodos cuyos hijos están todos etiquetados:



Se repite el proceso con los nodos que ahora tienen todos sus hijos etiquetados:



En el paso siguiente se etiqueta el hijo izquierdo de la raíz con a (pues todos sus hijos son de tipo a) y finalmente se completa el proceso etiquetando la raíz con a, ya que es un nodo de nivel par con un hijo de tipo a. El árbol queda así:



Esto nos muestra que el primer jugador tiene una estrategia ganadora.

El razonamiento anterior puede aplicarse al árbol de cualquier juego del tipo que estamos considerando, y así se demuestra el *Teorema de Zermelo*, que fue el primer resultado de la teoría matemática de los juegos.

Teorema 1. *En un juego bipersonal finito de información perfecta sin posibilidad de empate, uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.*

(Una demostración formal puede realizarse por inducción en la profundidad del árbol.)

Si el juego admite la posibilidad de empate, entonces del teorema anterior se desprende que uno de los dos jugadores tiene una estrategia *no perdedora* (para verlo basta considerar el empate como una victoria para el primer jugador). Un juego de este tipo es el ajedrez. Aunque en el ajedrez se pueden repetir posiciones, en realidad es un juego finito debido a la regla según la cual si una posición se repite tres veces tocándole el turno al mismo jugador, la partida es tablas.

3. Algunos juegos más interesantes

Ejemplo 1. En un montón hay 100 piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Cada jugador puede retirar como mínimo una y como máximo cinco piedras. Gana el que retire la última piedra. ¿Tiene alguno de ellos una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?

Solución. Sin duda que alguno de ellos tiene una estrategia ganadora, por el teorema de Zermelo. El problema es determinar cuál de los dos la tiene, y cuál es esa estrategia. Parte de la dificultad de este problema es el gran número de piedras inicial, que hace imposible un análisis exhaustivo de todas las jugadas posibles. Lo indicado entonces es simplificar el problema suponiendo un número inicial de piedras menor. Por ejemplo si sólo hay una piedra, entonces A la retira y gana. Lo mismo ocurre si inicialmente hay 2, 3, 4, o 5 piedras, ya que A las puede retirar todas en una sola jugada. En cambio si hay 6 piedras quien tiene una estrategia ganadora es B, ya que juegue lo que juegue A en el montón quedarán de 1 a 5 piedras, y B gana retirándolas todas. Observe que en general el jugador que se enfrente a un montón con 6 piedras pierde. Por lo tanto si inicialmente hay 7 piedras, A gana retirando 1 y dejándole 6 a B. Del mismo modo si inicialmente hay 8, 9, 10 u 11 piedras A gana retirando respectivamente 2, 3, 4 o 5 piedras. En general el jugador que se enfrente a un montón con 7, 8, 9, 10 u 11 piedras gana. Por lo tanto si inicialmente hay 12 piedras A pierde, ya que luego de jugar le dejará a su oponente 7, 8, 9, 10 u 11 piedras. Aquí ya se puede observar un patrón:

> Si el número inicial de piedras es múltiplo de 6, hay una estrategia ganadora para el segundo jugador, de lo contrario la hay para el primero. En ambos casos la estrategia ganadora consiste en retirar un número de piedras tal que el número de las que permanezcan en el montón sea múltiplo de 6.

Para probar que esto es realmente así observemos que si en el montón hay n piedras y n no es múltiplo de 6, entonces $n = 6q+r$ con $1 \leq r \leq 5$. Por lo tanto quien tenga el turno puede retirar r piedras y dejar en el montón un múltiplo de 6. En cambio si n es múltiplo de 6 el jugador que tenga el turno deberá retirar de 1 a 5 piedras, dejando en el montón un número que no es múltiplo de 6. Entonces si inicialmente n no es múltiplo de 6, A tiene una estrategia ganadora que consiste en retirar siempre el resto de la división entre 6 del número de piedras que quedan en el montón. Como siempre dejará un múltiplo de 6, y el número de piedras disminuye en cada jugada, eventualmente llegará a 0 dando la victoria al jugador A. En cambio si inicialmente n no es múltiplo de 6, cualquiera que sea la jugada de A quedará en el montón un número de piedras que no es múltiplo de 6, lo que le permite a B aplicar la estrategia ganadora ya descripta. Como en este problema $n = 100$ no es múltiplo de 6, A es quien tiene una estrategia ganadora. $\square$

Si inicialmente hay n piedras en el montón y cada jugador puede retirar de 1 hasta k piedras, es claro que si n no es múltiplo de $k+1$ el primer jugador tiene una estrategia ganadora, consistente en jugar de manera tal que a su oponente le queden siempre un múltiplo de $k+1$ piedras. Si $(k+a) \mid n$ entonces el segundo jugador es quien tiene una estrategia ganadora.

Este juego admite numerosas variantes: se puede cambiar el conjunto de jugadas permitidas, el número de montones o la regla "el que retira la última piedra gana" por "el que retira la última piedra pierde". En los problemas al final de la sección hay varios ejemplos.

4. Transformaciones e Invariantes

Muchos problemas están relacionados con *sistemas* cuyo estado se puede cambiar aplicando ciertas *transformaciones*. Los juegos pertenecen a esta categoría, así como muchos otros problemas en los cuales ee aplican en forma reiterada transformaciones geométricas o algebraicas.

Un *invariante* I es una función que a cada estado E del sistema le asocia un valor $I(E)$ de tal manera que, si de un estado E_1 se puede pasar a otro estado E_2 mediante una transformación válida, entonces $I(E_1) = I(E_2)$.

La siguiente es una importante estrategia para resolver problemas olímpicos:

Si en su problema hay un sistema que cambia de estado al aplicarle ciertas transformaciones, trate de hallar un invariante.

Los invariantes son muy útiles para probar la imposibilidad de pasar de un estado a otro: si un invariante toma valores diferentes en dos estados, entonces es imposible pasar de uno al otro mediante transformaciones válidas. Veamos un ejemplo sencillo:

Ejemplo 2. Suponga que en una pizarra se escriben los números naturales desde el 1 hasta $2n$, siendo n un número natural impar. A continuación se escogen dos de esos números a y b, se borran y se escribe $|a-b|$. Se continúa de este modo hasta que quede un sólo número k en la pizarra. Probar que k es impar.

Solución. Busquemos un invariante. La suma de todos los números en la pizarra no sirve, ya que disminuye en cada operación. ¿Pero en cuánto disminuye? En $a+b-|a-b|$, que es igual al doble del menor de los números a y b. Es decir que la disminución es siempre par. Por lo tanto la *paridad* de la suma se mantiene durante todo el proceso, y es el invariante que buscábamos. El valor inicial de la suma es $1+2+\cdots+2n = n(2n+1)$, que es impar. Por lo tanto el valor final también será impar. $\square$

Ejemplo 3. Considere la matriz de 100×100

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & 99 & 100 \\
2 & 3 & 4 & \dots & 100 & 1 \\
3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
99 & 100 & 1 & \dots & 97 & 98 \\
100 & 1 & 2 & \dots & 98 & 99
\end{array}$$

en la cual se permite sumar o restar un mismo número a todos los elementos de una fila o de una columna. Aplicando operaciones de este tipo, ¿será posible obtener una matriz con todos los elementos iguales?

Solución. Denotemos por $c(i,j)$ el elemento de la matriz que está en la fila i y en la columna j. Entonces $I = c(1,1) - c(1,100) - c(100,1) + c(100,100)$ es un invariante. En la posición inicial $I = 1 - 100 - 100 + 99 = -100$, pero en cualquier matriz con todos los elementos iguales I sería 0, por lo tanto la respuesta es negativa. $\square$

Ejemplo 4. A un tablero de ajedrez se le recortan dos casillas ubicadas en vértices diagonalmente opuestos. Se tienen además 31 rectángulos de cartón, cada uno de los cuales puede cubrir exactamente dos casillas del tablero. ¿Es posible cubrir completamente el tablero con los rectángulos?

Solución. Tomemos en cuenta los colores de las casillas en un tablero de ajedrez normal, y observamos que cada rectángulo cubre una casilla blanca y una negra. Si vamos cubriendo el tablero con rectángulos, en cada momento habrá tantas casillas cubiertas de un color como del otro. El número total de casillas cubiertas aumenta a medida que avanza el proceso, pero la *diferencia* entre las casillas blancas cubiertas y las negras es un invariante, ya que en todo momento es cero. Este invariante nos permite dar una respuesta negativa al problema, ya que el tablero recortado tiene 32 casillas de un color y sólo 30 del otro. □

Más en general, es fácil ver que si se quitan dos casillas del mismo color en un tablero rectangular de dimensiones $n \times k$, no es posible cubrirlo con rectángulos de dimensiones 1×2. ¿Pero qué ocurre si a un tablero de ajedrez (o a un tablero cualquiera con número par de casillas) se le quitan dos casillas de *diferente* color? En este caso habría tantas casillas por cubrir de un color como del otro, y si se logra cubrir completamente el tablero no se presenta ninguna contradicción. Pero esto no prueba que se pueda. En realidad sí se puede, pero para probarlo hay que exhibir un procedimiento concreto para cubrir el tablero, lo cual dejamos como ejercicio al lector.

Observe que los problemas del tipo de los tres anteriores pueden considerarse como juegos *unipersonales*.

Las estrategias ganadoras en juegos bipersonales suelen estar ligadas a invariantes, como en el siguiente problema:

Ejemplo 5 (OMCC 2002)**.**
Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Solución. Como 2001 es impar, en uno de los arcos que separan A de B hay un número par de personas interpuestas y en el otro una cantidad impar. Si A logra que se repita esa situación cada vez que sea su turno entonces ganará el juego, ya que la reducción del número de personas hará que eventualmente B quede a su lado. Esto lo logra A fácilmente tocando a su vecino en el arco par, dejando así un número impar de personas en cada arco. Al jugar B vuelven a quedar un arco par y otro impar. □

Veamos ahora un problema de una Olimpiada Internacional.

Ejemplo 6 (IMO 1990)**.**
Dado un entero inicial $n_0 > 1$, dos jugadores A y B escogen enteros n_1, n_2, n_3,... alternadamente y de acuerdo a las reglas siguientes:

- Conociendo n_{2k}, A puede escoger cualquier entero n_{2k+1} tal que $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq (n_{2k})^2$.

- Conociendo n_{2k+1}, B puede escoger cualquier entero n_{2k+2} tal que $n_{2k+1}/n_{2k+2} = p^r$ para algún primo p y algún entero $r \geq 1$.
- A gana si escoge el número 1990; B gana si escoge el 1.

¿Para qué valores de n_0
(a) A tiene una estrategia ganadora?
(b) B tiene una estrategia ganadora?
(c) ni A ni B tienen una estrategia ganadora?

Solución. Es claro que si $45 \leq n_0 \leq 1990$, A escoge el 1990 y gana en la primera jugada. Si en cualquier momento A puede escoger el número $5 \cdot 3^2 \cdot 11 = 495$, entonces B deberá escoger como mínimo 45 y A ganará. Como $23^2 = 529 > 495$, si $23 \leq n_0 < 45$ A gana con 495. Si A puede escoger el $3 \cdot 2^3 \cdot 11 = 264$, entonces B deberá escoger como mínimo 24 y A ganará como se acaba de ver. Por lo tanto si $17 \leq n_0 < 23$, A gana con 264 (y también con $5 \cdot 7 \cdot 2^3 = 280$). Análogamente si $12 \leq n_0 < 17$, A gana con 140, y si $8 \leq n_0 < 12$, A gana con 60. En resumen hasta ahora hemos probado que si $8 \leq n_0 \leq 1990$ entonces A tiene una estrategia ganadora.

Examinemos ahora los primeros valores de n_0. Es claro que si le toca jugar a B y el número anterior es de la forma p^r, con p primo, B puede escoger 1 y gana de inmediato. Entonces si $n_0 = 2$, como A sólo puede escoger 2, 3 o 4, pierde inmediatamente. Si $n_0 = 3$, A pierde de inmediato si escoge 3, 4, 5, 7, 8 o 9. Y si escoge 6, B juega 2 y A pierde. Si $n_0 = 4$, A pierde enseguida si escoge 4, 5, 7, 8, 9, 11 o 13. Si A escoge 6, 10 o 14, B escoge 2 y A pierde. Si A escoge 12 o 15, B escoge 3 y A pierde. Entonces los números de la forma p^r, $2p^r$, $4p^r$ y $3p^r$ son ganadores para B. Si $n_0 = 5$, A debe escoger un entero entre 5 y 25 y pierde, pues todos son de alguna de las formas p^r, $2p^r$, $4p^r$ y $3p^r$. Se sigue que también los números $5p^r$ son ganadores para B.

Si $n_0 = 6$, el único número que puede escoger A para no perder de inmediato es $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Entonces B debe escoger 6, 10 o 15. Como veremos enseguida si B escoge 10 o 15 pierde, por lo cual lo mejor que puede hacer es escoger el 6 y ninguno de los dos puede forzar la victoria. Si $n_0 = 7$, A pierde excepto si juega $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ o $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Ante cualquiera de estas jugadas B debe jugar 6 para no perder y nadie gana.

En este punto sólo nos queda analizar los números $n_0 > 1990$. Comencemos con el primero, 1991. Como $1991 = 11 \cdot 181$ y 181 es primo, es claro que A gana escogiendo 1991. Para $n_0 > 1991$ la idea es la misma: escoger productos de potencias de dos primos diferentes que obliguen a B a escoger números cada vez menores, hasta caer en el intervalo $[8, 1990]$. Por ejemplo si $r \geq 1$ y $11^r \cdot 181 < n_0 \leq 11^{r+1} \cdot 181$ entonces A puede escoger $11^{r+1} \cdot 181$

(ya que $n_0^2 > (11^r \cdot 181)^2 > 11^{r+1} \cdot 181$) y el número más grande que puede escoger B es $11^r \cdot 181$, y repitiendo el proceso inductivamente eventualmente B tendrá que escoger 11 o 181, perdiendo. En conclusión,
(a) Si $n_0 \geq 8$ entonces A tiene una estrategia ganadora.
(b) Si $n_0 = 2$, 3, 4 o 5 entonces B tiene una estrategia ganadora.
(c) Si $n_0 = 6$ o 7 entonces ni A ni B tienen una estrategia ganadora. $\square$

5. Problemas propuestos

Problema 1.
En un montón hay 100 piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Cada jugador puede retirar como mínimo una y como máximo cinco piedras. El que retire la última piedra pierde. ¿Tiene alguno de ellos una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?

Problema 2. [Concurso Nacional de Matemática de Cuba, 2004-2005]
Se tienen dos pilas de cartas, una con n cartas y otra con m cartas. A y B juegan alternadamente, realizando en cada turno una de las siguientes operaciones: (i) Quitar una carta de una pila, (ii) Quitar una carta de cada pila, (iii) Mover una carta de una pila a la otra. El jugador A comienza el juego y gana el que coja la última carta. Determine si existe alguna estrategia ganadora en función de m y n, de modo que uno de los jugadores siguiéndola pueda ganar siempre.

Problema 3. En un tablero de ajedrez hay un rey en una esquina. A y B se turnan moviendo el rey a cualquier casilla que tenga al menos un vértice en común con la ocupada por el rey y que no haya sido visitada previamente. El primero que no pueda jugar pierde. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora, y cuál es? ¿Y si se cambia el rey por un caballo?

Problema 4. [OIM 1998]
Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

Problema 5. [OMCC 2003]
Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un

montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 6. [OMCC 2004]

En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

Problema 7. [OMCC 2005]

Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla: Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul. Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

Problema 8. [Juego Nim]

Se tienen cuatro filas de cerillas, la primera con una, la segunda con 3, la tercera con 5 y la cuarta con 7 cerillas. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Cada jugador, en su turno, elige una fila y retira de ella todas las cerillas que quiera, pero al meno una. Gana el que retira la última cerilla. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es esa estrategia.

Problema 9.

En un montón hay 2005 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras alternadamente. Pueden retirar cualquier cantidad de piedras desde 1 hasta un máximo de 4. Cuando no queden piedras en el montón, gana el que tenga en su poder un número par de piedras. ¿Quién tiene una estrategia ganadora y cuál es?

Problema 10. [OIM 2000]
Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

1. En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras del montón.

2. En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

Problema 11. [Juego de Wythoff]
Hay dos montones de piedras. Cada jugador en su turno puede retirar cualquier número de piedras de un solo montón, o el mismo número de piedras de cada uno de los montones, siempre que retire al menos una piedra. Gana el que retira la última piedra. Caracterice las posiciones para las cuales el primer jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 12. [Ajedrez doble]
Este juego es como el ajedrez normal, pero cada jugador en su turno hace dos jugadas en vez de una (si la primera es jaque, en la segunda se puede capturar al rey enemigo y ganar la partida). Pruebe que el primer jugador tiene una estrategia no perdedora.

Problema 13.
En un montón hay 1000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras alternadamente. El primer jugador en su primera jugada puede retirar todas las piedras que quiera, pero no todas, y debe retirar por lo menos una. A partir de allí cada jugador debe retirar al menos una piedra y como máximo el doble de las que retiró su contrario en la jugada precedente. El que retira la última piedra gana. Determinar cuál jugador tiene estrategia una ganadora y encontrarla.

6. Soluciones

Problema 1
Este problema es similar al del Ejemplo 1, sólo que en éste el que retire la

última piedra pierde, mientras que en el ejemplo ganaba. Esto hace pensar a algunos que ambos juegos son simétricos, y que el jugador que tiene una estrategia ganadora en uno de ellos ahora pierde, y viceversa. En realidad no es así. Si se examina el juego con n piedras se ve que para $n = 1$, A debe retirar la única piedra y pierde. Para $n = 2, 3, 4, 5$ o 6 A gana retirando $n - 1$ piedras y dejando una sola en el montón. Con $n = 7$, A pierde pues al jugar le dejará de 2 a 6 piedras a B. Para $n = 8, 9, 10, 11$ o 12 A gana, dejando 7 piedras en el montón. Surge entonces el siguiente patrón: A tiene una estrategia ganadora siempre que n no deje resto 1 al ser dividido entre 6. Esa estrategia consiste en jugar de modo de dejarle a B siempre un múltiplo de 6 más una piedra. Una prueba formal se obtiene por inducción. Como $100 = 6 \cdot 16 + 4$, para $n = 100$ A tiene una estrategia ganadora. Su primera jugada debe consistir en retirar 3 piedras.

Problema 2

Si al menos uno de los números m y n es impar, A tiene una estrategia ganadora que consiste en retirar una carta de cada pila impar, de manera tal que en ambas pilas quede un número par de cartas. Si m y n son ambos pares entonces B tiene una estrategia ganadora.

Problema 3

Dividamos el tablero en rectángulos de 2×1. Entonces A tiene una estrategia ganadora, que consiste en mover el rey a la otra casilla del rectángulo en que se encuentre. Luego de a lo sumo 63 jugadas B pierde. Con un cabalo en vez del rey, dividimos el tablero en rectángulos de 2×4. Un caballo que esté en uno de estos rectángulos tiene una única movida que lo lleva a otra casilla del rectángulo. Por lo tanto A tiene una estrategia ganadora.

Problema 4

Es claro que el primero que al jugar deje menos de 3 puntos aislados (es decir, que no sean extremo de ningún segmento) pierde, ya que su contrario puede jugar de manera de conectar el punto o los dos puntos que estén aislados. Ahora bien, 95 puntos se pueden conectar por medio de $95 \cdot 94/2 = 4465$ segmentos. Como este número es impar, José (el que inicia el juego) tiene una estrategia ganadora. En efecto, cuando queden 3 puntos aislados José debe jugar trazando segmentos entre los 95 que ya están conectados. Como José comienza y 4465 es impar, él será también quien trace el último de estos segmentos. Entonces María al jugar dejará uno o dos puntos aislados y José gana. Si habiendo 4 puntos aislados María conecta dos de ellos, para evitar que haya 95 puntos conectados, José gana de inmediato conectando los otros dos.

Este problema se puede generalizar para un número arbitrario n de puntos iniciales. Como $(n-3)(n-4)/2$ es impar si y sólo si n deja resto 1 o 2 en la división entre 4, éstos son los casos en que el primer jugador tiene una estrategia ganadora. Si en cambio n es múltiplo de 4 o deja resto 3 en la división entre 4, entonces el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 5

Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor. Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par).

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.
- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

Problema 6

En primer lugar observemos que si queda una cantidad impar de números ninguno de los cuales sea múltiplo de otro, el jugador que tiene el turno pierde. El primer jugador A puede ganar borrando 4 y 8. Ahora si B borra el 1 debe borrar también todos los que quedan y pierde de inmediato.

Si B borra 2 y 6, A borra 3 y 9 y gana.

Si B borra 3, 6 y 9, A borra cualquiera de los que quedan y gana.

Si B borra 6, A borra 9 y gana.

Si B borra 7, A borra 3, 6 y 9 y gana.

Si B borra 9, A borra 6 y gana.

La estrategia ganadora desacripta no es única, A también puede ganar borrando 5 o 7 en su primer jugada.

Problema 7

Rojo tiene una estrategia ganadora, que consiste en seleccionar, cada vez que le toca jugar, una línea del tablero perpendicular a la seleccionada por Azul en su jugada previa. Para probar que esta estrategia es ganadora observemos que cada casilla del tablero es pintada exactamente dos veces, una cuando uno de los jugadores selecciona la fila en la cual se encuentra la casilla, y otra cuando alguno selecciona su columna. Luego de las dos primeras jugadas una sola casilla alcanza su color final, y éste es rojo. Luego de las jugadas 3 y 4, tres nuevas casillas alcanzan su color final, y de ellas dos quedarán rojas y 2 azul. En general luego de las jugadas $2k-1$ y $2k$ hay $2k-1$ nuevas casillas que alcanzan su color final, de las cuales $k-1$ quedarán azules y k quedarán rojas. Como cada dos jugadas el número de casillas rojas aumenta en uno, al final Rojo tendrá una ventaja de 10 casillas sobre Azul y ganará el juego.

Problema 8

En general, para cualquier número de filas y de cerillas, se puede proceder así: primero se escribe el número de cerillas de cada fila en binario, y se escriben los números resultantes uno encima de otro, alineados por la derecha. En este problema con 1, 3, 5 y 7 cerillas se escribe

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Si alguna columna contiene un número impar de unos, el primer jugador tiene una estrategia ganadora. De lo contrario, la tiene el segundo. La estrategia ganadora consiste en jugar de manera tal que, al representar el número de cerillas de cada fila en binario, cada columna tenga un número par de unos. Para ello, se busca la columna c más a la izquierda que tenga un número impar de unos y se selecciona una fila que tenga un 1 en la columna c. Sea n el número de cerillas en esa fila, y sea n' el número que se obtiene de la representación binaria de n intercambiando ceros y unos en cada columna con un número impar de unos. Entonces la jugada ganadora consiste en retirar $n-n'$ cerillas de esa fila. Al jugar el contrario necesariamente alterará la paridad de alguna columna, permitiendo a su oponente aplicar la misma estrategia hasta retirar la última cerilla. Por ejemplo la configuración inicial clásica 1,3,5,7 es perdedora para A, pues todas las columnas tienen un número par de unos. Si A retira, digamos, 2 cerillas de la tercera fila dejando las filas (en binario) con 1, 11, 11 y 111 cerillas, entonces B debe seleccionar la cuarta fila y dejar $n'=1$ cerillas, retirando 6.

Problema 9

La situación del jugador que tiene el turno depende del número de piedras que queden en el montón y del número de las que ya haya retirado, más precisamente de la *paridad* de ese número. Clasifiquemos cada par (paridad, montón) como ganador o perdedor para el jugador que tiene el turno. A continuación se clasifican los primeros pares. La paridad puede ser p (par) o i (impar), y entre paréntesis después de cada posición ganadora se indica lo que se debe jugar.

(p,1)	perdedora	(i,1)	ganadora (1)
(p,2)	ganadora (2)	(i,2)	ganadora (1)
(p,3)	ganadora (2)	(i,3)	ganadora (3)
(p,4)	ganadora (4)	(i,4)	ganadora (3)
(p,5)	ganadora (4)	(i,5)	perdedora
(p,6)	ganadora (1)	(i,6)	perdedora
(p,7)	perdedora	(i,7)	ganadora (1)
(p,8)	ganadora (2)	(i,8)	ganadora (1)
(p,9)	ganadora (2)	(i,9)	ganadora (3)

Aparentemente hay periodicidad módulo 6 y las posiciones se pueden clasificar e dos tipos (el segundo elemento de cada par se debe interpretar módulo 6):

Malas: (p, 1), (i, 0), (i, 5).

Buenas: (p, 0), (p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (i, 1), (i, 2), (i, 3), (i, 4).

Probaremos que un jugador tiene una estrategia ganadora si y sólo si se encuentra en una posición buena. Para ello mostraremos (a) que desde una posición mala cualquier jugada conduce a una posición buena, y (b) que desde una posición buena en la cual el montón no esté vacío, siempre hay al menos una jugada que conduce a una posición mala. Esto se muestra en las tablas siguientes.

pos.	ret. 1	ret. 2	ret. 3	ret. 4
(p,1)	(p,0)	(p,5)	(p,4)	(p,3)
(i,0)	(p,5)	(p,4)	(p,3)	(p,2)
(i,5)	(i,4)	(i,3)	(i,2)	(i,1)

pos.	ret.	queda
(p,0)	1	(i,5)
(p,2)	2	(i,0)
(p,3)	2	(p,1)
(p,4)	4	(i,0)
(p,5)	4	(p,1)
(i,1)	1	(i,0)
(i,2)	1	(p,1)
(i,3)	3	(i,0)
(i,4)	3	(p,1)

De este modo el jugador que esté en una posición buena puede mantenerse siempre en posiciones buenas. Cuando se acaben las piedras quedará en (p,

0) y ganará. En cambio el que esté en una posición mala, al jugar, le dejará una posición buena a su contrario, quien podrá ganarle.

Finalmente, como $2005 \equiv 1 \bmod 6$, la posición inicial es del tipo (p, 1), es decir perdedora para el primer jugador. La estrategia ganadora para el segundo jugador consiste en dejar al primero siempre en alguna de las posiciones (p, 1), (i, 0) o (i, 5).

Problema 10

Sea x un entero no negativo, a un entero tal que $0 \leq a \leq 5$. Definamos una *posición* como un par (x, a), donde x es el número de piedras que hay en el montón y a es la cantidad de piedras retiradas por el adversario en su jugada inmediatamente anterior; $(x, 0)$ indica la posición inicial, en todo otro caso $a > 0$. Digamos que una posición es *buena* si a partir de ella el jugador que tenga el turno tiene una estrategia ganadora, y que es *mala* en caso contrario. Veamos las primeras posiciones malas:
Claramente $(0, a)$ es mala para $0 \leq a \leq 5$.

$(1, 1)$ es mala (las demás $(1, a)$ son buenas).

$(2, a)$ es buena para cualquier a. La única posible mala sería $(2, 2)$, pero aquí tenemos la jugada (forzada): retirar una piedra, que gana inmediatamente.

Las siguientes posiciones malas son $(3, 3)$, $(4, 4)$ y $(5, 5)$. Por ejemplo la posición $(5, 5)$ deja 4 posibles posiciones: $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 4)$, todas buenas.

$(6, 3)$ es mala, pues las posibles posiciones después de efectuar una jugada son $(5, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 4)$ y $(1, 5)$, todas buenas.

$(7, a)$ es mala para cualquier a. En efecto $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$ y $(2, 5)$ son todas buenas.

Las posiciones $(8, a)$ son buenas para todo a. En efecto, podemos elegir dejar al adversario una de las posiciones malas $(7, 1)$ o $(4, 4)$, según lo que éste haya jugado.

$(9, a)$ y $(10, a)$ son buenas para todo a.

$(11, 4)$ es mala. $(12, 5)$ es mala. $(13, a)$ es mala para cualquier a. Continuando con este análisis, encontramos las próximas posiciones malas: $(14, 1)$, $(16, 3)$, $(17, 4)$, $(18, 5)$, $(19, 3)$, $(20, a)$, $(24, 4)$, $(25, 5)$ y $(26, a)$. De aquí por inducción podemos fácilmente probar que este último patrón se repite indefinidamente módulo 13.

Para $x \geq 13$ las posiciones malas son, tomando x módulo 13: $(0, a)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 3)$, $(7, a)$, $(11, 4)$, $(12, 5)$. Con 2000 piedras la posición inicial equivale a $(11, 0)$, lo que permite al primer jugador retirar 4 piedras dejando la posición mala $(7, 4)$. En sus jugadas posteriores el primer jugador deberá retirar siempre un número de piedras tal que deje a su adversario en una posición mala. En caso de que la cantidad inicial de piedras sea de la forma $13k$, o $13k + 7$, es el segundo jugador el que posee una estrategia ganadora.

Problema 11

Sugerencia: examinando las posiciones iniciales (x, y) con pocas piedras, se encuentra que las primeras posiciones perdedoras para quien tenga el turno son (1,2), (3,5), (4,7) y (6,10). Esto sugiere que todas las posiciones perdedoras forman una sucesión (x_n, y_n) en la cual x_n es el menor entero positivo que no aparece en la lista x_1, y_1, x_2, y_2,…, x_{n-1}, y_{n-1} y $y_n = x_n + n$. Pruebe esta afirmación por inducción.

Además se puede probar que $x_n = \lfloor \alpha n \rfloor$, donde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

Para más detalles vea [2], capítulo 13.

Problema 12

La ventaja de las blancas es muy grande por lo cual un buen jugador de ajedrez probablemente encuentre una estrategia ganadora sin mayor dificultad. Aquí sólo probaremos que las negras no pueden tener una estrategia ganadora. Supongamos por absurdo que la tuviesen. Entonces las blancas podrían iniciar el juego moviendo un caballo y regresándolo enseguida a su posición original, lo que equivale a ceder el turno a las negras. Las blancas siguen jugando entonces como si fuesen las negras, aplicando su supuesta estrategia ganadora. Se llega así al absurdo de que ganarían las blancas. Por lo no existe ninguna estrategia ganadora para las negras y debe existir una estrategia no perdedora para las blancas. Observe que esta demostración no da ningún indicio de cuál pueda ser esa estrategia, es una prueba existencial no constructiva.

Problema 13

Sugerencia: Pruebe primero que cualquier entero positivo n se puede expresar de manera única como suma de $r \geq 1$ números de Fibonacci $F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$ donde $k_i \geq k_{i+1} + 2$ para $i = 1, 2, \ldots, r - 1$ y $k_r \geq 2$. Esto se conoce como *sistema de numeración de Fibonacci.* La idea es tomar como F_{k_1} el mayor número de Fibonacci menor o igual que n, si $n - F_{k_1} > 0$ entonces se toma como F_{k_2} el mayor número de Fibonacci menor o igual que $n - F_{k_1}$ y así sucesivamente. Por ejemplo $1000 = 987 + 13 = F_{16} + F_7$.

A continuación pruebe que el primer jugador tiene una estrategia ganadora si y sólo si el número inicial de piedras n no es un número de Fibonacci. La estrategia consiste en expresar n en el sistema de numeración de Fibonacci y retirar F_{k_r} piedras. De lo contrario quien tiene una estrategia ganadora es el segundo jugador. Con $n = 1000 = F_{16} + F_7$ la única jugada inicial correcta para el primer jugador es $F_7 = 13$.

Para más detalles y referencias sobre este problema vea [3], vol. I, sección 1.2.8, problemas 34 y 37.

7. Epílogo

Hay muchos juegos que se salen de los parámetros de los que aquí se han visto, por ejemplo juegos infinitos, juegos con más de dos participantes, juegos en los que interviene el azar, juegos en los que los participantes no tienen información completa, etc.

Los juegos infinitos son difíciles de analizar, pero pueden ser muy interesantes, como el siguiente:

Ejemplo 7. En un tablero infinito un diablo caza a un ángel. En cada jugada el diablo se come una casilla del tablero, y el ángel vuela en cualquier dirección, hasta una casilla que no haya sido comida por el diablo y que no se halle a más de mil pasos de rey de la que ocupa. El objetivo del diablo es atrapar al ángel en una isla rodeada por un agujero de mil o más casillas de ancho. ¿Puede el ángel escapar indefinidamente?

Este problema permanece abierto. Se puede generalizar sustituyendo la autonomía de vuelo del ángel de 1000 casillas por un entero fijo n cualquiera. Se sabe que un ángel con autonomía 1 (que se mueve igual que el rey del ajedrez) puede ser atrapado siempre por el diablo. Pero ya para $n = 2$ no se conoce la respuesta. Para más detalles vea [1].

Referencias

[1] Conway, J. *The Angel Problem*, en Nowakowski, R. J. (Ed.) *Games of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, pp. 3–12. Disponioble en línea en `http://www.msri.org/publications/books/Book29/files/conway.pdf`

[2] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[3] Knuth, D. E. *The art of computer programming, 2nd ed.*, Addison-Wesley, Reading, 1973. Hay traducción: *El arte de programar ordenadores* (3 vols.), Reverté, Barcelona, 1980.