Jueguitos

Entrenamiento #9 para 3ª etapa
7-13 de mayo de 2016
Por: Lulú

Resumen

Por primera vez en estas sesiones de entrenamiento sucederá algo que se hace aparte. Juegos, también conocido como Teoría de Juegos, normalmente requiere de todos los conocimientos de las demás áreas. Se trata de una de las partes más dinámicas de las matemáticas. La razón del nombre la entenderás conforme vayas realizando los problemas.

1. Un pequeño preámbulo

Afortunada o lamentablemente, no existe teoría para este tema. No es algo que se enseñe a hacer, puesto que los conocimientos necesarios para resolver problemas de juegos son, por lo general, de Combi o Numeritos. Podremos ver ejemplos; sí, eso sí. Pero no puedo decirte "así se resuelve un problema de juegos". Se trata de romperse la cabeza tratando de utilizar lo que ya sabes de Números o Combinatoria para generar las condiciones que te permitan ganar. A veces basta con un poco de lógica. Pero, como digo, siempre se trata de romperse la cabeza.

Debido al tipo de material que representa y al hecho de que ahora no tienes que aplicar un conocimiento nuevo para ver si lo aprendiste, esta vez no contaremos con una sección de ejercicios. Sólo habrán problemas. Pero espero que sean los suficientes para que no te quedes sin hacer nada. La parte buena es que tendrás de dónde elegir.

La mayor parte de los problemas serán de situaciones en las que dos jugadores toman turnos para realizar un movimiento o jugada permitida. Lo interesante está después en comprender, si ambos son lo más inteligentes posibles, ¿quién es el que puede siempre ganar y cómo logra hacerlo?

2. Ejemplos

Ejemplo 1 Dos niños toman turnos para romper una barra de chocolate rectangular de 6 cuadritos de ancho y 8 cuadritos de largo. Le regla es la siguiente: Ellos pueden romper la barra únicamente a lo largo de las divisiones entre los cuadritos. Si la barra se rompe en varias piezas, éstas se siguen rompiendo de acuerdo a la regla, hasta que queden cuadritos individuales. El jugador que ya no pueda romper un pedazo pierde el juego. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

Para resolver este problema es necesario notar que el número de trozos de chocolate aumenta en uno con cada corte que se hace. Por ser el chocolate una cuadrícula de 8×6, el máximo de cuadritos es de 48, a lo cual se llega después de 47 movimientos. La jugada número 48 no existe, por lo tanto el segundo jugar (quien siempre realiza los movimientos pares) perderá. En este caso la estrategia está en elegir el turno. No hay nada más que se pueda hacer.

Ejemplo 2 A y B juegan por turnos. Antes de empezar, se ponen alrededor de un círculo junto con otras 2001 personas. En cada turno se vale sacar del círculo a alguno de sus vecinos. Entre A y B gana quien logre sacar a la otra persona. Si A empieza y las otras 2001 personas no tienen turnos, encuentra quién tiene la estrategia ganadora.

Dado que A y B tienen 2001 lacayos, se entiende que dividen el círculo en dos arcos. El arco que va de A a B en el sentido de las manecillas del reloj tiene una cantidad N de personas. El arco que va de A a B en el sentido opuesto a las manecillas del reloj tiene una cantidad M de personas. Por lo tanto, $M + N = 2001$. Entonces, alguno de las dos cantidades es impar.

Si en algún momento fuera turno de B y quedaran 1 y 1 de cada lado, quite el que quite, A podrá sacar a B del juego en el siguiente turno. Por lo tanto, A debe provocar ese camino hacia B. La estrategia ganadora de A es sacar a una persona del arco que tenga una cantidad par (haciendo que la cantidad sea impar), porque de ese modo B sólo podrá quitar uno de alguna de las dos cantidades impares. Entonces, si B siempre tiene dos cantidades impares en cada lado, nunca podrá sacar a A porque necesitaría que hubiera 0 personas entre ellos y 0 no es impar.

Ejemplo 3 En un tablero de ajedrez, una torre se encuentra en la casilla inferior izquierda. Dos jugadores se turnan moviendo la torre la cantidad de casillas que deseen, ya sea hacia la derecha o hacia arriba (pero no ambas en un mismo turno). El jugador que logre colocar la torre en la casilla superior derecha del tablero gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

El primer jugador, mueva para donde mueva, sacará a la torre de la diagonal que conecta el inicio con el final. Lo único que debe hacer el segundo jugador es mover perpendicularmente a lo que movió el primero, pero la misma cantidad de pasos. Por ejemplo: si el primer jugador mueve 3 espacios a la derecha, el segundo debe mover 3 espacios hacia arriba. Si el segundo jugador se mantiene en la diagonal podrá asegurarse de llegar a la otra esquina, dado que se encuentra en la diagonal.

3. Pensándolo bien, sí hay un poco de teoría

No es tanto que haya teoría, pero gracias a los ejemplos pueden considerarse unas estrategias generales:

1. Entender el juego. Observar qué sucede. Jugarlo. En ocasiones basta con entender el juego porque el destino ha decidido quién ganará; sólo debes descubrirlo tú también.

2. Rescata lo que sepas. Apóyate en conocimientos básicos, como la paridad, la divisibilidad, simetría, etc. Con ello quizá encuentres un patrón con el que te puedas guiar hacia la estrategia ganadora.

3. Cuando juegues, analiza el juego. Entiende qué pasa. Fíjate en qué posiciones o situaciones ya estás forzado a perder (y que por lo tanto debes evitar). O en cuales otras estás destinado a vencer, y que debes procurar.

4. Si es posible, busca algo que no cambie, que permanezca siempre. Normalmente este tipo de cosas son las que dictan la posición ganadora. En los ejemplos, se trataba de que la cantidad de piezas aumentaba en 1 (esa cantidad de aumento nunca cambió); de que el primer jugador puede igualar la paridad a puros impares; el segundo jugador puede regresar la torre a la diagonal.

5. Si estás muy frustrado(a), puedes intentar hacer el problema al revés. Es decir, imagina que se acabó el juego y piensa "¿qué tuvo que haber pasado para llegar aquí?". Probablemente haciendo eso varias veces, con suficientes pasos hacia atrás, entenderás cómo debe jugarse el juego.

4. Agregados culturales

1. A una situación en la que uno de los jugadores está destinado a ganar (siempre y cuando no la riegue) se le llama **posición ganadora**.

2. A una situación en la que uno de los jugadores está destinado a la derrota (aunque juegue muy bien y no la riegue jamás) se le llama **posición perdedora**

3. Al hecho de que un jugador juegue tan inteligentemente que no se pueda evitar su victoria se le conoce como **estrategia ganadora**.
4. No existe algo así como una **estrategia perdedora**. Dado el caso, todas las que no son estrategias ganadoras lo son.
5. El concepto de "estrategia ganadora" sólo aplica para jugadores honestos que no hacen trampa. Cualquiera que esté en posición de perder contra alguien que tiene la estrategia ganadora podría romper el juego, tirar la mesa o algo así. Ese no es el chiste.
6. El gran incendio de Chicago (en 1871) tuvo como principal sospechoso a una vaca, acusada de golpear una lámpara de queroseno. 22 años después, el reportero que escribió la nota admitió haber inventado la historia.

5. Lista de problemas

1. Dos personas (A y B) juegan a colocar monedas (una por turno) del mismo tamaño en una mesa redonda sin poner una encima de otra. Cada quien coloca una moneda en su turno. Pierde quien ya no puede hacerlo. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
2. Hay tres pilas de piedras: una con 10 piedras, otra con 15 y otra con 20. En cada turno, un jugador elige una pila y la divide en dos pilas más pequeñas. El perdedor es el jugador que no puede hacer eso. ¿Quién va a ganar y cómo?
3. Hay dos pilas con piedras. Una tiene 30 piedras y la otra 20. Dos jugadores por turnos quitan tantas piedras como quieran de alguna de las pilas. Gana quien toma la última piedra. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
4. Hay tres pilas de piedras, cada una con 10 piedras. Dos jugadores por turnos quitan tantas piedras como quieran de alguna de las pilas. Pierde quien ya no pueda hacer una movida.
5. Dos jugadores por turnos ponen alfiles en los cuadrados de un tablero de ajedrez de tal forma que ninguno de los ya puestos pueda capturar al otro. (no importa en qué color se coloque). El que ya no puede poner un alfil pierde. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?
6. Diez 1's y diez 2's están escritos en una pizarra. En un turno, un jugador puede borrar cualesquiera dos cifras. Si las dos figuras borradas son idénticas, se se escribe un 2 en su lugar. Si son diferentes, se reemplazan con un 1. El primer jugador gana si al final queda 1; y el segundo si queda 2. ¿Quién gana y cuál es la estrategia ganadora?
7. Los números del 1 al 20 están escritos en un pizarrón, en orden y en una sola fila. Dos jugadores, por turnos, ponen signos "$+$" y "–" entre los números. Cuando todos los signos son puestos, la expresión resultante se evalúa. Gana el primer jugador si el resultado es par; gana el segundo jugador si es impar. ¿Quién gana y cómo?
8. Los números 2012 y 2008 se escriben en el pizarrón. En cada turno, los jugadores escriben la diferencia positiva entre dos números ya escritos (sólo si la diferencia es un número que no está ya escrito en el pizarrón). Gana quien ya no pueda escribir ningún número.
9. Los números 36 y 25 se escriben en el pizarrón. En cada turno, los jugadores escriben la diferencia positiva entre dos números ya escritos (sólo si la diferencia es un número que no está ya escrito en el pizarrón). Gana quien ya no pueda escribir ningún número.
10. Se eligen 20 puntos alrededor de un círculo. Dos jugadores por turnos unen dos de los puntos con un segmento de línea de tal forma que no se cruce un segmento ya trazado. El jugador que no lo puede hacer pierde. Determina quién gana.

11. En un tablero de 10×10, dos jugadores por turnos colocan un dominó sobre dos cuadritos del tablero. Los dominós no se pueden traslapar. El que ya no pueda colocar más dominós pierde. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

12. En un tablero de ajedrez, un rey se encuentra en la casilla inferior izquierda. Dos jugadores se turnan moviendo al rey una casilla, ya sea hacia la derecho, hacia arriba o diagonalmente (derecha y arriba). El jugador que logre colocar al rey una casilla superior derecha del tablero gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

13. Se tiene el número 1234 escrito en una hoja blanca. Dos jugadores A y B toman turnos para jugar lo siguiente: en cada turno, un jugador puede restarle cualquiera de los dígitos del número escrito en la hoja (obviamente no se resta el cero); se borra el viejo número y se escribe el nuevo. Pierde el que ya no pueda restar números (cuando se llegue al número cero). Si A es el que empieza jugando, ¿quién gana y cuál es su estrategia ganadora?

14. En un tablero de 1×2012 se encuentran escritos los números del 1 al 2012, no necesariamente en orden. Dos jugadores A y B juegan por turnos, cada uno haciendo una jugada por turno. El jugador A comienza. Una jugada consiste en tomar una casilla y pintarla de rojo o azul. Una casilla pintada no puede volver a ser coloreada. Cuando se pinta todo el tablero, se toman las casillas coloreadas con azul y se suman los números en ellos. Si el número resultante es divisible entre 3, gana B. De lo contrario, gana A.

15. En una mesa hay 21 papitas. Dos jugadores por turnos se comen 1, 2 ó 3 papitas de las mesa. El jugador que se coma la última papita gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

16. Gregorio y Eva se turnan para decir enteros positivos. Eva empieza por decir un número que es a lo más 10. Luego Gregorio dice un número que es, a lo más, 10 unidades mayor que el de Eva. Después Eva dice un número que es, a lo más, 10 unidades mayor que el de Gregorio. Y así sucesivamente. El que diga 100 gana.

17. En dos tableros de $m \times n$ se colocan fichas de la siguiente manera:

    a) Si en la casilla (i, j) del primer tablero hay una ficha, en la casilla (i, j) del segundo tablero no la hay.
    b) Si en la casilla (i, j) del primer tablero no hay ficha, en la casilla (i, j) del segundo tablero sí la hay.

    En las casillas que terminan sin fichas, se colocan números, de la siguiente manera: Se cuentan las fichas que existen inmediatamente alrededor de la casilla de manera horizontal, vertical y diagonal, y se coloca ese número en dicha casilla. Demuestra que la suma de los números del primer tablero es igual a la suma de los números del segundo tablero.

18. Se escriben doce 3's en un pizarrón en una fila. En cada turno un jugador puede colocar un signo "$+$" ó un signo "$\times$" entre dos números adyacentes, siempre y cuando no exista ya un signo entre ellos. Eventualmente todos los espacios se llenan con esos signos. La expresión resultante se evalúa para obtener un número. Si es par, gana el primer jugador; si no, gana el segundo. ¿Quién gana y cuál es la estrategia ganadora?

19. Se escriben los números del uno al cien en un pizarrón. En cada turno un jugador borra uno de los números. El juego se acaba cuando sólo quedan dos números. Si la suma de esos dos números es múltiplo de 3, gana el primer jugador; de lo contrario, gana el segundo. ¿Quién gana y cuál es la estrategia ganadora?

20. Se tienen n fichas en un tablero. Dos jugadores se turnan para quitar una cantidad de fichas que sea potencia de 2 (incluyendo $2^0 = 1$). Determina quién tiene la estrategia ganadora.

21. Se tienen n fichas en un tablero. Dos jugadores se turnan para quitar una cantidad de fichas que sea un número primo ó 1. Determina quién tiene la estrategia ganadora.

22. Se inicia con el número 0. En cada turno, un jugador puede sumar al número actual cualquier entero desde 1 hasta 9. El jugador que llegue a 100 gana. Determina quién ganará.

23. Se inicia con número 1. En cada turno, un jugador puede multiplicar el número actual por cualquier entero desde el 2 hasta el 9. El jugador que llegue a un número mayor que 1000 gana. Determinar quién ganará.

24. Se tiene una cuadrícula de 5×5. Las reglas del juego son las siguientes: El jugador que empieza marca cualquiera de las casillas de la fila de arriba. El otro jugador señala una casilla a la derecha, a la izquierda o abajo (nunca en diagonal) de la marca hecha por el primer jugador. A continuación hace lo mismo el primer jugador y siguen jugando por turnos. Nunca se puede marcar una casilla dos veces. El jugador que llegue a la última fila (la de hasta abajo) gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?

25. Se tienen 200 monedas apiladas. Cada uno de los dos jugadores en su turno puede retirar mínimo una de las monedas, pero como máximo la mitad de las monedas restantes. ¿Quién vence y cuál es la estrategia ganadora?

6. Problemas más jarcors

1. En un pizarrón se encuentra escrito un número formado por 12061 1's. Lulú y Adrián juegan por turnos a borrar un 1 y cambiarlo por un 0. El juego termina cuando la cantidad de 0's sea mayor a la cantidad de 1's. Gana Lulú si el número restante es múltiplo de 7; de lo contrario, gana Adrián. Si comienza Lulú, ¿quién gana y cuál es la estrategia ganadora?

2. Hay 1001 cerillos en una mesa. Una jugada consisten en tomar p^n cerillos de la mesa, donde p es cualquier número primo y n puede ser cualquier entero mayor o igual a cero. Se juega entre dos personas (A y B), empezando por A. El jugador que tome el último cerillo gana. ¿Quién gana y cuál es la estrategia ganadora

3. De una baraja de cartas, se toman las cartas as, 2, 3, 4, 5 y 6 de cada pao. Estas 24 cartas se colocan boca arriba en una mesa. Los jugadores por turnos voltean una carta que esté boca arriba, y cada vez que pasa esto se considera la suma de las cartas volteadas (el as cuenta como 1). El jugador que obtenga una suma mayor a 31 pierde.

4. Itzel juega Batalla Naval Z con David. En Batalla Naval Z, se tiene un tablero de 7×7, donde David coloca 3 buques, uno azul que mide 1×2, uno verde que mide 1×3, y uno rojo que mide 1×4, de manera que no se traslapan ni se salen del tablero. Después, David cubre el tablero con 49 cuadros de 1×1, de manera que Itzel no conoce la ubicación de los buques. Una jugada de Itzel consiste en escoger una casilla del tablero y quitar el cuadro que lo cubre, revelando lo que hay debajo. Si encuentra un buque, se ve su color, mas no la parte del buque (frontal, trasera, central). Demuestra que 33 jugadas son suficientes para que Itzel destape completamente los 3 buques.

5. Se tiene un tablero de 5×5 coloreado como ajedrez, con las esquinas negras. En cada casilla negra, hay una ficha negra y en cada blanca una blanca. Las fichas se pueden mover a casillas vecinas (si comparten lado). A y B van a jugar alternadamente de la siguiente manera: primero A escoge una ficha negra y la quita del tablero. Después, A mueve una ficha blanca al espacio vacío. Luego, B mueve alguna ficha negra al espacio vacío. El juego continúa de esta manera hasta que alguno no puede hacer una movida, el cual pierde en ese momento. ¿Quién tiene la estrategia ganadora?