Las fracciones maravillosas

Andrei Martínez Finkelshtein
Universidad de Almería

Preparación para las Olimpiadas Matemáticas
Curso 2014/2015

Índice

1. Introducción

En matemática sucede a veces que un campo de investigación muy activo deja de cumplir con las expectativas de los científicos y es abandonado a su suerte, perdiendo importancia. Pero al igual que el Polo Norte, que siempre atrae exploradores, esos campos nunca se quedan totalmente desiertos, visitados periódicamente por algún que otro investigador, hasta que un día un descubrimiento fortuito de una mina de oro hace volver todo el campo a la vida con renovadas fuerzas.

Algo así ha pasado con las fracciones continuas, que fueron estudiadas con profundidad hasta finales del siglo XIX. En aquel momento se consideró que las fracciones continuas podían ser una llave a los secretos mejor guardados de la teoría de números. Pero esas expectativas se cumplieron sólo en parte, y el estudio de las fracciones continuas fue temporalmente abandonado.

Solamente a finales del siglo XX el tema de las fracciones continuas resurgió con nuevos métodos y nuevas perspectivas, ligado al desarrollo de ramas como sistemas dinámicos, teoría ergódica, teoría de aproximación y otras.

Sin embargo, aquí nos vamos a centrar únicamente en algunas aplicaciones en la teoría de números, bien conocidas ya a los "padres fundadores".

2. Calendarios y ruedas dentadas

¿Cuántos días tiene un año? Todo el mundo conoce la respuesta: por lo general, 365 días, excepto en los años bisiestos, cuando tenemos 366. Los años bisiestos son divisibles por 4; por ejemplo, 2012 y 2016 lo son. Pero no todos: los años 1900, 2100 y 2200 no lo son. ¿Por qué?

La explicación está en la velocidad de rotación de la Tierra alrededor del Sol: ésta necesita $365,24219878\ldots$ días para una vuelta completa. Este "pico" de $0,24219878\ldots$ días se va acumulando, y si no lo corregimos, puede llegar a ser considerable. Se sabe que en la antigua Roma en el año 46 A.C. el error acumulado llegó a ser de 90 días. Esta es la razón para introducir los años bisiestos.

Pero imaginemos que podamos decidir una regla para nombrar a un año como bisiesto, ¿cuál sería la mejor? Ante todo, como el movimiento de la Tierra es periódico, es lógico esperar que la regla que vayamos a usar sea periódica también. De modo que debemos decidir cuál será el período, llamémosle q, después del cual la sucesión de años bisiestos y normales se repite. Por otra parte, debemos fijar también la cantidad de años bisiestos (llamémosle p) en un solo período. Ya sabemos que la duración de un año terrestre es

$$365 + \alpha, \quad \alpha = 0,24219878\ldots$$

Por tanto, en un período de q años de 365 días cada uno el error acumulado sería de $q\alpha$ días, que debería ser corregido con los p días "extra" que nos dan los años bisiestos dentro de cada ciclo. Nuestro objetivo por tanto es escoger p y q tales que

- p y q no sean demasiado grandes, y
- el valor de
$$\beta = q\alpha - p$$
sea el más pequeño posible.

De hecho, basta decidir el valor de q, pues p será el entero más cercano a $q\alpha$. De esta forma, un período de q años ocupará $365q + p$ días; observe que

$$365q + p = (365 + \alpha)q + p - q\alpha = (365 + \alpha)q - \beta,$$

o en otras palabras,

$$\text{Días reales en un período} - \text{Días contabilizados según el calendario} = \beta.$$

Por tanto, acumulamos aproximadamente 1 día de error en la fracción $1/\beta$ de dicho período, o sea, en q/β años.

En la actualidad utilizamos el calendario Gregoriano, según el cual $q = 400$. De esos 400 días, sólo $p = 97$ son bisiestos (los divisibles por 4, a excepción de aquellos que terminen en 00 y *no sean* múltiplos de 400). De esta forma,

$$\beta = 400\alpha - 97 = -0,120488\ldots$$

Observe que

$$400/|\beta| \approx 3320,$$

o sea, con las reglas actuales acumulamos un día de error en aproximadamente 3320 años.

Ejercicio 1 *Compruebe si la opción de tomar $q = 128$ y $p = 31$ es mejor o peor que la que propone el calendario Gregoriano.*

Nos hemos encontrado con un problema matemático muy importante:

Dado un número real α, encontrar dos números enteros, p y q, suficientemente pequeños, para que el residuo $\beta = q\alpha - p$ sea el menor posible.

Un problema similar aparece cuando diseñamos un sistema de ruedas dentadas. Vamos a suponer que la primera rueda, que gira con una velocidad angular 1, posee p dientes, y la segunda, q dientes, y deseamos que el la velocidad de rotación de la segunda rueda sea ω. De esta forma, en una unidad de tiempo la rueda 1 gira $1 \times p$ "dientes", y la segunda, $\omega \times q$. Es razonable por tanto intentar que $q\omega - p$ sea la menor posible, manteniendo los valores de p y q pequeños.

Las *fracciones continuas* han sido durante siglos la herramienta utilizada para resolver el problema anterior. En 1572 R. Bombelli las aplicó para calcular el valor de $\sqrt{13}$; en ≈ 1660 W. Brouncker las utilizó para aproximar el valor de π. Euler (1707–1783) encontró y probó varias propiedades de las fracciones continuas que aproximan el número e. Posiblemente el primero que inició el estudio sistemático de las fracciones continuas fue el matemático ruso P. L. Chebyshev (1821–1894).

3. Fracciones continuas y algoritmo de Euclides

Tomemos un par de números enteros, por ejemplo $p = 1638$ y $q = 105$, y hagamos la división con residuo del mayor entre el menor:

$$\begin{aligned} 1638 &= 15 \times 105 + 63, \\ 105 &= 1 \times 63 + 42, \\ 63 &= 1 \times 42 + 21, \\ 42 &= 2 \times 21 + 0. \end{aligned}$$

Este es el conocido *algoritmo de Euclides* que se usa para encontrar el máximo común divisor (mcd) de dos números. En este caso, $\text{mcd}\,(1638, 105) = 21$.

Esquemáticamente, hemos calculado

$$\begin{aligned} p &= a_0 \times q + q_1, \quad 0 < q_1 < q, \\ q &= a_1 \times q_1 + q_2, \quad 0 < q_2 < q_1, \\ q_1 &= a_2 \times q_2 + q_3, \quad 0 < q_3 < q_2, \\ q_2 &= a_3 \times q_3. \end{aligned}$$

Puesto que la sucesión de números enteros $q > q_1 > q_2 > \dots$ es estrictamente decreciente, ésta ha de terminar en algún momento, siendo uno de esos valores, digamos $q_{k+1} = 0$. Entonces $\operatorname{mcd}(q, p) = q_k$.

Vamos a reescribir estas relaciones en otra forma equivalente. Por ejemplo, podemos combinar

$$\begin{aligned} p = a_0 \times q + q_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p}{q} = a_0 + \frac{q_1}{q} \\ q = a_1 \times q_1 + q_2, \quad &\Rightarrow \quad \frac{q}{q_1} = a_1 + \frac{q_2}{q_1}, \end{aligned}$$

en una sola relación,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\dfrac{q}{q_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{q_2}{q_1}}.$$

Siguiendo este proceso, obtenemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{q_1}{q_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{q_3}{q_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{q_2}{q_3}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3}}}.$$

Esta expresión se llama la *fracción continua* correspondiente al número racional p/q.

En realidad, este proceso podemos extender a cualquier número real. Sea $\alpha > 0$, de modo que podemos escribir

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

donde $[x]$ es la parte entera, y $\{\alpha\}$ la fraccionaria del número x; si $\alpha \notin \mathbb{N}$, entonces $0 < \{\alpha\} < 1$. De modo que podemos escribir

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\dfrac{1}{\{\alpha\}}}, \quad \frac{1}{\{\alpha\}} > 1, \tag{1}$$

y podemos iterar el proceso. De esta forma, tenemos dos posibilidades: o bien el proceso termina, y obtenemos una representación

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}, \tag{2}$$

o bien, continua indefinidamente. En este caso podemos escribir

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \ddots}}}, \tag{3}$$

donde usamos el símbolo $\sim$ porque aun no hemos dado sentido a lo que está escrito en el miembro derecho cuando la fracción continua es infinita.

Puesto que esta notación es muy engorrosa y ocupa mucho espacio, vamos a utilizar la forma compacta,

$$\alpha \sim a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots + \frac{1|}{|a_k} + \cdots, \tag{4}$$

o incluso,

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

ó

$$\alpha \sim [a_0; a_1, \dots, a_k, \dots],$$

respectivamente. Recuerde que cada $a_j \in \mathbb{N}$.

Para definir rigurosamente la noción de fracción continua infinita necesitamos considerar los *convergentes* de la fracción continua anterior, que se obtienen al truncarla en el paso n. Así, el *convergente n-ésimo*, π_n, se define como

$$\pi_n = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

Decimos que la fracción continua infinita (3) ó (4) es *convergente y su valor es igual a* α (o converge a α), si

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \alpha,$$

y en ese caso escribimos

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \dots].$$

Junto con los convergentes podemos definir los *residuos* de la fracción continua (2) ó (3) correspondiente a α: son los números r_n, $n \geq 0$, definidos por

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, r_n]. \tag{5}$$

Por ejemplo, (1) muestra que

$$a_0 = [\alpha], \quad r_1 = 1/\{\alpha\}, \qquad a_1 = [r_1]\,, \quad r_2 = \frac{1}{\{r_1\}},$$

y en general,

$$a_n = [r_n]\,, \quad r_{n+1} = \frac{1}{\{r_n\}}.$$

4. Propiedades básicas de las fracciones continuas

Sea como antes π_n el convergente n-ésimo a la fracción continua (3) ó (4); denotemos su numerador y denominador por p_n y q_n, respectivamente, de modo que

$$\pi_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Observe que

$$\pi_0 = a_0, \quad \pi_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

y por tanto,

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad \text{y} \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1. \tag{6}$$

Teorema 1 *Las sucesiones p_n y q_n satisfacen la misma relación de recurrencia,*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \\ q_{n+1} &= a_{n+1} q_n + q_{n-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

con los valores iniciales (6)*.*

Demostración. Vamos a usar la inducción matemática en n. Un cálculo directo demuestra que la fórmula (7) es válida para $n = 1$.

Supongamos ahora que esa fórmula ha sido demostrada para todo $n \leq k$, para un cierto $k \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\pi_{k+2} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} = [a_0; a_1, \ldots, a_{k+1}, a_{k+2}] = [a_0; a_1, \ldots, a_{k+1} + 1/a_{k+2}].$$

En otras palabras, π_{k+2} es igual al aproximante π_{k+1} si en la sucesión de coeficientes se hace la sustitución

$$a_{k+1} \mapsto a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}}.$$

Por hipótesis de inducción, el denominador y el numerador de ese aproximante satisfacen (7):

$$\begin{aligned} \pi_{k+2} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} &= \frac{\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}}\right) p_k + p_{k-1}}{\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}}\right) q_k + q_{k-1}} = \frac{(a_{k+1} p_k + p_{k-1}) + \frac{1}{a_{k+2}} p_k}{(a_{k+1} q_k + q_{k-1}) + \frac{1}{a_{k+2}} q_k} \\ &= \frac{p_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}} p_k}{q_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}} q_k} = \frac{a_{k+2} p_{k+1} + p_k}{a_{k+2} q_{k+1} + q_k}, \end{aligned}$$

lo que concluye el paso de inducción. □

Ejercicio 2 *Demuestre las siguientes relaciones que satisfacen p_n y q_n*

$$\begin{aligned}
(i) &\quad q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1, \\
(ii) &\quad q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n, \quad n \geq 2, \\
(iii) &\quad \pi_n - \pi_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \\
(iii) &\quad \pi - \pi_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Demuestre que los convergentes de orden par son monótonos crecientes,*

$$\pi_0 < \pi_2 < \pi_4 < \dots,$$

y los convergentes de orden impar son monótonos decrecientes,

$$\pi_1 > \pi_3 > \pi_5 > \dots.$$

Ejercicio 4 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y su correspondiente fracción continua* (4)*. Entonces para cualquier $j \geq 0$,*

$$\alpha = \frac{p_{j-1} r_j + p_{j-2}}{q_{j-1} r_j + q_{j-2}},$$

donde r_j es el residuo definido en (5)*.*

Ejercicio 5 *Demuestre que una fracción continua infinita* (4) *es convergente, entonces cualquiera de sus residuos r_j, definido en* (5)*, lo es también.*

Ejercicio 6 *Demuestre la desigualdad*

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}, \tag{8}$$

y deduzca de ahí que en realidad

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n = \alpha.$$

De estas últimas desigualdades, y tomando en cuenta que $q_{n+1} > q_n$, se deduce que si α es irracional, entonces

$$|\alpha - \pi_n| < \frac{1}{q_n^2}, \quad \pi_n = \frac{p_n}{q_n}. \tag{9}$$

Una consecuencia directa de este resultado es que si α es irracional, la inecuación

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

tiene infinita cantidad de soluciones enteras (p, q), y esos corresponden a los convergentes de la fracción continua de α. De hecho, el resultado sigue siendo cierto incluso si sustituimos el miembro derecho por $1/(\sqrt{5}q^2)$ (teorema de Hurwitz–Borel).

En realidad, tiene lugar también un resultado recíproco (o casi):

Teorema 2 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si una fracción racional p/q irreducible (es decir, mcd$(p,q) = 1$) satisface*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

entonces $p/q = \pi_n$ para algún n; es decir, p/q es un convergente de la fracción continua correspondiente a α.

5. Dos ejemplos

Ejemplo 1 Sea $\alpha = \sqrt{2}$. Entonces $1 < \alpha < 2$, y

$$a_0 = [\alpha] = 1, \quad 1/r_1 = \{\alpha\} = \alpha - [\alpha] = \alpha - 1.$$

Luego,

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \in (2,3) \quad \Rightarrow \quad a_1 = [r_1] = 2,$$

de modo que

$$\frac{1}{r_2} = \{r_1\} = r_1 - 2 = \sqrt{2} - 1,$$

y nuevamente,

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

De aquí obtenemos que

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \overline{2}]. \tag{10}$$

Los primeros convergentes de esta fracción continua son

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \dots$$

De la fórmula (8) se deduce que

$$\left|\sqrt{2} - \frac{41}{29}\right| < \frac{1}{29 \times 70} < 0{,}0005.$$

Ejemplo 2 Consideremos la fracción continua periódica

$$[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots] = [2; \overline{1, 1, 1, 4}].$$

Vamos a denotar por α el número que le corresponde. Entonces tenemos la ecuación

$$\alpha = [2; 1, 1, 1, 2 + \alpha] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \alpha}}}}$$

(¿por qué?). Simplificando, obtenemos

$$\alpha = \frac{21 + 8\alpha}{8 + 3\alpha}.$$

Despejando, queda $\alpha^2 = 7$, y como $\alpha > 0$, concluimos que $\alpha = \sqrt{7}$.

Ejercicio 7 *Muestre que*

$$\sqrt{11} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots] = [3; \overline{3, 6}]. \tag{11}$$

6. Números cuadráticos

Definición 1 Llamamos *número cuadrático* a toda solución de una ecuación algebraica de grado 2 con coeficientes enteros. Un *irracional cuadrático* es todo número cuadrático que no sea racional.

En otras palabras, un irracional cuadrático es un número de la forma

$$\pm \frac{P + \sqrt{D}}{Q}, \tag{12}$$

donde P, Q, D son enteros, y D no sea un cuadrado perfecto. Ejemplos de irracionales cuadráticos son

$$\sqrt{2}, \quad 1 + \sqrt{5}, \quad \frac{5 - \sqrt{7}}{2},$$

etcétera.

En 1770 Lagrange demostró el siguiente

Teorema 3 *Los irracionales cuadráticos y solamente ellos tienen asociada una fracción continua periódica.*

Al igual que pasa con los desarrollos decimales, la repetición puede empezar después de una cantidad finita de valores.

La demostración de la afirmación

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \text{ es periódica} \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ es un irracional cuadrático}$$

es relativamente sencilla y se lleva a cabo como en el Ejemplo 2. La afirmación recíproca es mucho más compleja. Vamos a estudiar solamente el siguiente caso especial:

Definición 2 Sea α un irracional cuadrático, y sea α' la segunda solución de la ecuación algebraica de grado 2 con coeficientes enteros correspondiente (se dice que α' es el *conjugado* de α). Entonces α es *reducido* si $\alpha > 1$ y $-1 < \alpha' < 0$.

Ejercicio 8 *Sea*

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}, \quad Q > 0,$$

un irracional cuadrático reducido. Pruebe que en ese caso

$$0 < P < \sqrt{D} \quad y \quad P^2 - D \text{ es divisible por } Q.$$

Ejercicio 9 *Sea α la mayor solución (en valor absoluto) de la ecuación*

$$\alpha^2 - P\alpha - 1 = 0,$$

donde P es un número natural que no es un cuadrado perfecto. Muestre que α es un irracional cuadrático reducido y encuentre su desarrollo en fracción continua.

Ejercicio 10 *Sea α lun irracional cuadrático reducido, y denotemos*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad a_0 = [\alpha].$$

Entonces α_1 también es un irracional cuadrático reducido.

Del ejercicio anterior se deduce que todos los números α_n definidos recursivamente por

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \quad a_n = [\alpha_n]$$

son irracionales cuadráticos reducidos; es fácil ver que todos tendrán la forma (12) con el mismo D. Pero la cantidad de distintos P enteros que satisfagan $0 < P < \sqrt{D}$ es finito, de modo que por el Ejercicio 8, en la sucesión $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ hay solamente una cantidad finita de valores distintos. Esto prueba que

$$\alpha \text{ es un irracional cuadrático reducido} \quad \Rightarrow \quad \alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \text{ es periódica},$$

lo que prueba el Teorema 3 para el caso de los irracionales cuadráticos reducidos.

Para los irracionales cuadráticos reducidos la fracción continua no sólo es periódica, sino *puramente periódica*, es decir, es de la forma

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_k}].$$

Este hecho fue probado por Évarite Galois en 1828, que en ese momento tenía 17 años.

Vamos a detenernos un poco en el período de las irracionalidades cuadráticas. Empecemos con un ejemplo: sea

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{7}}{3};$$

obviamente, su conjugado es $\alpha' = (2-\sqrt{7})/3$, y α es un irracional cuadrático reducido.

Ejercicio 11 *Pruebe que*

$$\frac{2+\sqrt{7}}{3} = [\overline{1;1,1,4}] \quad y \quad \frac{3}{-2+\sqrt{7}} = [\overline{4;1,1,1}].$$

Del ejercicio anterior observamos que los períodos de α y de $-1/\alpha'$ son inversos. ¿Es esa una casualidad? En realidad no:

Ejercicio 12 *Sea α un irracional cuadrático tal que*

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_n}],$$

y sea α' su conjugado. Entonces

$$-1/\alpha' = [\overline{a_n; a_{n-1}, \dots, a_0}].$$

Por otra parte, sea D un entero que no sea un cuadrado perfecto, y tomemos $a_0 = [\sqrt{D}]$; entonces

$$\alpha = a_0 + \sqrt{D}$$

es un irracional cuadrático reducido. En efecto, $\alpha' = a_0 - \sqrt{D}$, y es fácil ver que $-1 < \alpha' < 0$. Hemos visto que en este caso la fracción continua de α tiene que ser puramente periódica,

$$\alpha = a_0 + \sqrt{D} = [\overline{2a_0; a_1, \dots, a_n}],$$

de modo que

$$\sqrt{D} = \alpha - a_0 = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]. \tag{13}$$

Ejercicio 13 *Demuestre que si D es un entero que no sea un cuadrado perfecto, entonces su desarrollo en fracción continua tiene la forma* (13)*, y la parte $a_1, \dots, a_n$ del período es simétrica.*

Compare este resultado con las fórmulas obtenidas en (10) y (11).

7. Ecuación de Pell

En el siglo III A. C. Arquímedes formuló su famoso problema del ganado. Según Wikipedia, su formulación aproximada era así:

El dios sol tenía un rebaño formado por un cierto número de toros blancos, negros, moteados y amarillos, así como vacas de los mismos colores. De tal forma que:

- El número de toros blancos es la mitad y la tercera parte de los negros más los amarillos.
- El número de toros negros es igual a la cuarta más la quinta parte de los moteados más los amarillos.
- El número de toros moteados e igual a la sexta más la séptima parte de los blancos más los amarillos.
- El número de vacas blancas es igual a un tercio más un cuarto de la suma de los toros negros y las vacas negras.
- El número de vacas negras es igual a la cuarta parte más la quinta aparte de la suma de los toros moteados más las vacas moteadas.
- El número de vacas moteadas es igual a la quinta más la sexta parte de la suma de los toros amarillos más las vacas amarillas.
- El número de vacas amarillas es igual a la sexta más la séptima parte de la suma de los toros blancos más las vacas blancas.

Encontrar la cantidad exacta de las vacas y toros de cada tipo requiere de una notable habilidad matemática; en particular, se debe resolver un sistema de 9 ecuaciones (2 de ellas cuadráticas y el resto, lineales) con 10 incógnitas. Tras eliminar variables el problema se reduce a encontrar una solución de la ecuación

$$x^2 - 4.729.494\, y^2 = 1 \tag{14}$$

en números enteros x e y. Arquímedes y sus contemporáneos no la pudieron resolver.

Vamos a mirar un problema algo más general: resolver la ecuación

$$x^2 - D\, y^2 = 1 \tag{15}$$

en números enteros x e y. Esta ecuación, conocida como *ecuación de Pell*, es un ejemplo de ecuación diofántica. Hay que señalar que el nombre de J. Pell (1610–1685) se asoció con esta ecuación por un error de Euler. En realidad esta ecuación fue estudiada por J. Wallis, W. Brouncker y P. Fermat.

¿Cómo podemos resolver la ecuación de Pell? Ante todo, si D es un cuadrado perfecto, la ecuación no tiene soluciones enteras (¿por qué?). Así que vamos a asumir que D no es un cuadrado perfecto. Podríamos escribir, por ejemplo,

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{D}},$$

e intentar darle valores a $x \in \mathbb{N}$ hasta que el número dentro de la raíz sea un cuadrado perfecto. ¡Mala idea! Por ejemplo, para $D = 991$, el valor más pequeño de x que satisface esta condición es

$$379.516.400.906.811.930.638.014.896.080.$$

La ecuación (15) se puede reescribir como

$$(x - \sqrt{D}\,y)(x + \sqrt{D}\,y) = 1,$$

de modo que si (x, y) es una solución, se cumple

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| = \frac{1}{y\left|x + \sqrt{D}\,y\right|} = \frac{1}{y^2\left|x/y + \sqrt{D}\right|} < \frac{1}{2y^2},$$

donde hemos usado el hecho que $\sqrt{D} > 1$, y por tanto $x/y > 1$ (¿por qué?). Pero por el Teorema 2, *necesariamente x/y tiene que ser un convergente de la fracción continua correspondiente a $\sqrt{D}$!*

Ejemplo 3 Tomemos $D = 13$; tenemos que

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

Los primeros convergentes a la fracción continua de $\sqrt{13}$ son

$$3,\ 4,\ 7/2,\ 11/3,\ 18/5,\ 119/33,\ 137/38,\ 256/71,\ 393/109,\ 649/180,\ 4287/1189, \ldots$$

Sustituyendo directamente en la ecuación $x^2 - 13y^2 = 1$ comprobamos que la primera solución que encontramos es $(x, y) = (649, 180)$.

Estas observaciones nos conducen al algoritmo, basado en las fracciones continuas, que nos permite hallar la solución (x, y) de (15) que corresponde a y más pequeño posible, y que denotamos por (x_0, y_0). Esta solución la vamos a llamar *solución fundamental* de (15).

Partimos de la expansión (13) de $\sqrt{D}$, es decir,

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n, 2a_0}].$$

Sea $\pi_n = p_n/q_n$ el n-ésimo convergente de dicha fracción continua. Se puede probar que entonces

$$p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1}.$$

- Si n es impar (o sea, si el período es par), tomamos $x_0 = p_n$, $y_0 = q_n$;
- Si n es par (o sea, si el período es impar), calculamos x_0 e y_0 a partir de la ecuación

$$x_0 + \sqrt{D}\,y_0 = (p_n + \sqrt{D}\,q_n)^2.$$

Ejemplo 4 (Continuación del Ejemplo 3) Hemos visto que para $D = 13$, $n = 4$, y

$$\pi_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{18}{5},$$

de modo que tenemos que tomar $p_4 = 18$, $q_4 = 5$, y considerar

$$(18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13}.$$

Nuevamente, $(x_0, y_0) = (649, 180)$.

Ejemplo 5 Para encontrar la solución fundamental de $x^2 - 7y^2 = 1$ calculamos

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}],$$

de modo que $n = 3$. Por tanto,

$$\pi_3 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{3},$$

y $x_0 = p_3 = 8$, $y_0 = q_3 = 3$.

Ejercicio 14 *Encuentre la solución fundamental de $x^2 - 61y^2 = 1$.*
Respuesta: $y_0 = 226.153.980$.

Finalmente, se sabe que si D no es un cuadrado perfecto, la ecuación (15) tiene infinita cantidad de soluciones enteras positivas, (x_k, y_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$. Todas ellas se pueden calcular a partir de la solución fundamental por medio de la siguiente fórmula:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{k+1}.$$

Es fácil ver que todo par (x_k, y_k) obtenido con esta fórmula es solución de $x^2 - Dy^2 = 1$. En efecto,

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad x_k - y_k\sqrt{D} = (x_0 - y_0\sqrt{D})^{k+1}.$$

Por tanto,

$$x_k^2 - Dy_k^2 = (x_k + y_k\sqrt{D})(x_k - y_k\sqrt{D}) = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{k+1}(x_0 - y_0\sqrt{D})^{k+1} = (x_0^2 - Dy_0^2)^{k+1} = 1.$$

Ah, por cierto. El problema del ganado de Archimedes fue resuelto solamente en 1880. La solución fundamental de la ecuación (14) contiene 41 dígitos, y la cantidad total del ganado es del orden de $10^{206.545}$.

8. Ecuaciones diofánticas $x^2 + y^2 = p$

Se puede probar que *si p es un número primo de la forma $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces el período de la fracción continua de $\sqrt{p}$ es impar.* Por lo que hemos visto, esto significa que en este caso (recuerde Ejercicio 13 de la página 11),

$$\sqrt{p} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_m, a_m, \ldots, a_1, 2a_0}].$$

Denotemos por α el siguiente número, obtenido a partir de la fracción continua anterior:

$$\alpha = [a_m; \overline{a_{m-1}, \ldots, a_1, 2a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m}].$$

Al ser esta fracción puramente periódica, α tiene que ser un irracional cuadrático reducido. Es más, por el Ejercicio 12, al número $-1/\alpha'$ le corresponde la misma fracción continua (donde α' es el conjugado de α). Luego,

$$-1/\alpha' = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha\alpha' = -1.$$

Recuerde que

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{p}}{B}, \quad \alpha' = \frac{A - \sqrt{p}}{B},$$

donde A y B son enteros. Luego,

$$\alpha\alpha' = \frac{A^2 - p}{B^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad A^2 + B^2 = p.$$

Esto nos conduce a un procedimiento para resolver las ecuaciones diofánticas de este tipo, descubierto por Legendre (1808). Se puede probar que *para los p primos de la forma $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, la solución de*

$$x^2 + y^2 = p$$

es única (salvo permutación de x e y), mientras que para $p = 4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, la solución no existe.

Ejemplo 6 Resolvamos la ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = 1009.$$

Para ello obtenemos

$$\sqrt{1009} = [31; \overline{1, 3, 3, 1, 62}].$$

Formamos

$$\alpha = [3; \overline{1, 62, 1, 3}] = \frac{28 + \sqrt{1009}}{15},$$

y concluimos que $(28, 15)$ es la solución buscada.

Ejercicio 15 *Encontrar la solución en números enteros de*

$$x^2 + y^2 = 1129.$$

9. De postre, tres curiosidades

1) Hemos dicho mucho sobre los números irracionales cuadráticos. Sabemos en particular que toda fracción continua correspondiente a tales números es periódica, y por tanto, sus elementos son acotados.

Pero ¿qué se puede decir sobre los irracionales cúbicos (soluciones de ecuaciones polinomiales de grado 3 de coeficientes enteros)? Por ejemplo, algo tan sencillo como ¿qué pasa con la fracción continua de $\sqrt[3]{2}$? Se tiene

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, \dots]$$

Con ordenador se han encontrado cerca de 10^6 coeficientes de esta fracción continua, y aun no se ha podido observar regularidad alguna. En particular, no se sabe si los coeficientes son acotados.

2) L. Euler encontró la siguiente fracción continua para el número e,

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, \dots],$$

donde los coeficientes a_k se calculan según la fórmula

$$a_0 = 2, \ a_{3m} = a_{3m-2} = 1, \ a_{3m-1} = 2m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

No se conoce ninguna fórmula análoga para el número π.

3) Gauss se preguntó cuál sería la probabilidad, c_k, de que un número $k \in \mathbb{N}$ aparezca como elemento en una fracción continua. Él mismo encontró la solución, pero nunca la publicó. Fueron R. Kuzmin (1928) y P. Lévy (1929) quienes demostraron que para casi todo número real α,

$$c_k = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Por ejemplo,

$$c_1 = 0.415037\dots, \quad c_2 = 0.169925\dots, \quad c_3 = 0.0931094\dots$$