Lugares geométricos

Entrenamiento #6 Rumbo al Nacional
22-25 de octubre de 2015
Por: Clemente

Resumen

Bueno, chamacos, aquí les va la segunda parte de la lista de esta semana. Ya que aprendieron a gatear, les toca caminar (y resolver más problemas). Personalmente les puedo decir que este tema me gusta más que el pasado, así que espero que a ustedes también les agrade.

1. ¿Dónde quedan los "lugares geométricos"?

La respuesta en concreto es en el plano. Pero como en el plano no se puede usar google maps para ubicarse, pues van a necesitar de toda su astucia llegar a ese lugar.

Bueno, ya en serio. Los lugares geométricos son una colección de puntos en el plano de manera que todos esos puntos y sólo esos puntos cumplen con una característica especial.

¿Les suena como un si y sólo si? Pues más o menos por ahí va la cosa. Las soluciones de este tipo de problemas involucran dos partes... Bueno, tres.

1. Enunciar la figura F que describe el lugar geométrico de los puntos P que cumplen una propiedad o característica.
2. Demostrar que todo punto P sobre F cumple con dicha característica.
3. Demostrar que sólo los puntos P sobre F cumplen dicha característica.

Ahora, nomás por enfadarlos, les diré que, aunque no con el mismo enfoque, ya se han enfrentado a varios lugares geométricos (e.g. la bisectriz, la mediana, la mediatriz). así que esos los pondré como ejercicios y no como problemas.

¡Ah! Casi se me olvida. Para que no teman por su seguridad, los lugares geométricos por lo general no va a salir de rectas, circunferencias, segmentos, arcos o un solo punto.

1.1. Todos los caminos llevan a Roma

Ejemplo: *Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B.*

Solución: Como las integrales, vamos por partes.

Primero, yo enuncio que la figura F es la mediatriz del segmento AB.

Ahora demuestro que todo punto sobre F cumple. Sea P un punto sobre la mediatriz y M el punto medio de AB, entonces, como $AM = MB$ y $\angle AMP = \angle BMP = 90°$, por el criterio LAL $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ y $AP = PB$.

Por último demuestro que todo punto que cumple se encuentra sobre F. Digamos que hay un punto P fuera del segmento AB de manera que $AP = PB$. Sea M el punto medio de AB, entonces por el criterio LLL $\triangle AMP \cong \triangle BMP$, lo que implica que $\angle AMP = \angle BMP = 90°$ y P se encuentra sobre la mediatriz de AB. **Nota:** el caso en el que P se encuentra sobre AB es trivial, pero también hay que considerarlo.

2. Des-agregados culturales

1. La Puerta de Alcalá no tiene perilla.
2. Se cuenta que cuando los estadounidenses comenzaron a mandar personas al espacio tuvieron problemas para usar plumas por la falta de gravedad. Su solución fue diseñar plumas especiales de costos millonarios. Los rusos, al enfrentarse al mismo problema, decidieron usar lápices.

3. Ejercicios

1. Encuentra el lugar geometrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo O.
2. Encuentra el lugar geometrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a una recta fija l.
3. Encuentra el lugar geometrico de los puntos que equidistan a dos rectas fijas l y l' que se cortan en O.
4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a tres puntos fijos no colineales?
5. ¿Cuál es el lugar geometrico de los puntos que equidistan a tres rectas fijas no concurrentes?
6. Se dan dos puntos A y B. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos M tales que $AM^2 - MB^2 = k$, donde k es un número dado, es una recta perpendicular a AB.
7. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias no concéntricas.

4. Problemas

1. Encuentra el lugar geométrico de los puntos B que cumplen que el ángulo $\angle ABC$ es constante, donde A y C son dos puntos fijos.
2. Encuentra el lugar geométrico de los puntos C tales que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, donde A es un punto fijo y B un punto que varía sobre una recta fija.
3. Un segmento de longitud fija ℓ, tiene uno de sus extremos sobre una recta ℓ_1 y el otro sobre una recta ℓ_2 perpendicular a ℓ_1. Si el segmento se desliza desde una posición vertical hasta quedar en forma horizontal, ¿qué lugar geométrico describe el punto medio del segmento?
4. Muestre que el unico punto P dentro de una circunferencia donde pasan tres cuerdas de la misma longitud es el centro.
5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que AB no es paralelo a CD. Encuentra el lugar geométrico de los puntos P que están dentro de $ABCD$ y que cumplen que $|PBA| + |PCD| = k$, donde k es una constante.
6. El punto P varía sobre la circunferencia circunscrita al cuadrado $ABCD$. Las lneas AP y BD se cortan en Q y la línea que pasa a través de Q paralela a AC corta a la línea BP en X. Encuentra el lugar geométrico de los puntos X.
7. Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias se traza una recta que por segunda vez corta las circunferencias en dos puntos A y B. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB.
8. Se dan el punto A en una recta ℓ, B es un punto arbitrario de ℓ. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $\triangle ABM$ sea un triángulo equilátero.

9. **(1 OMM)** Consideramos dos rectas paralelas ℓ y ℓ'. Un punto fijo P que diste lo mismo de ℓ que de ℓ'. ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB, donde A está en ℓ y B está en ℓ' y el ángulo $\angle APB$ es recto?

10. **(Campeche)** Sea Γ una circunferencia y A un punto sobre ella. Halla el lugar geométrico de los puntos medios P de los segmentos con un extremo en A y el otro sobre Γ.

11. **(21 OMM)** Dado un triángulo equilátero $\triangle ABC$, encuentra todos los puntos P del plano que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

12. **(Canadá)** Sea $\triangle ABC$ un triángulo agudo. Se inscribe un rectángulo $DEFG$ en este triángulo tal que D esta en AB, E esta en AC, y F y G están en BC. Halla el lugar geométrico de las intersecciones de las diagonales de todos los posibles rectangulos $DEFG$.

13. **(Canada)** Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de altura 1. Un círculo de radio 1 y con centro del mismo lado de AB que C rueda sobre el segmento AB. Prueba que el arco de círculo que está dentro del triángulo es constante.

14. Dado un rectángulo $ABCD$, encuentra el lugar geométrico de los puntos que cumplen con $AX + BX = CX + DX$

15. Encuentra el ~~lugar de los puntos geométricos~~ lugar geométrico de los puntos M dentro de un rombo $ABCD$ que cumplen con $\angle AMD + \angle MBC = 180^\circ$.

16. Encuentra el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que tienen un extremo en el punto A que se encuentra sobre una circunferencia.

17. **(Circunferencia de Apolonio)** Determina el lugar geométrico de los puntos P que cumplen con que $\frac{AP}{PB} = k$, donde K es una constante.

18. Sean A y B puntos sobre una circunferencia y C un punto móvil sobre ésta. Encuentra el lugar geométrico descrito por los ortocentros de los triángulos $\triangle ABC$.

19. Sean A y B puntos sobre una circunferencia y C un punto móvil sobre ésta. Encuentra el lugar geométrico descrito por los incentros de los triángulos $\triangle ABC$.

20. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y X un punto dentro de él. Encuentra el lugar geométrico de los puntos X tales que $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.

21. Sea $ABCD$ un cuadrilátero no paralelogramo. Encuentra el lugar geométrico de los puntos X que cumplen con $AX^2 + CX^2 = Bx^2 + DX^2$.