Entrenamiento de Geometría

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato 2019

Domingo 29 de Septiembre de 2019

Linea de Simson, de Euler y Circunferencia de los 9 puntos:

Teorema (Linea de Simson): Sean A_0, B_0, C_0 las proyecciones de un punto P sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Entonces los puntos A_0, B_0, C_0 son colineales si y sólo si el punto P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo. A la recta que pasa por A_0, B_0, C_0 se le conoce como línea de Simson (de P).

Teorema (Linea de Euler): En todo triángulo, el ortocentro H, el gravicentro G y el circuncentro O se encuentran sobre una línea la cual es llamada línea de Euler. Además, $HG : GO = 2 : 1$.

Teorema (Circunferencia de los nueve puntos): Consideremos los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos 9 puntos están sobre una circunferencia, la cual es llamada Circunferencia de los nueve puntos, su centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro y su diámetro es igual al circunradio del triángulo.

1) Demuestra que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, es equivalente a la mitad del arco entre estos puntos.

2) Demuestra que la proyección del lado AB de un triángulo ABC sobre la recta de Simson que corresponde a un punto P, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto P sobre los lados AC y BC.

3) Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo $\triangle ABC$. La recta perpendicular a BC, la cual pasa por P, corta por segunda vez a la circunferencia en el punto M. Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto P, es paralela a la recta AM.

4) Sea K un punto simétrico al circuncentro de un triángulo $\triangle ABC$, con respecto al lado BC. Demuestra que la línea de Euler en el triángulo $\triangle ABC$ divide el segmento AK por la mitad.

5) Demuestra que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.

6) Demuestra que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo.

7) Sean H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$, D el punto medio del lado BC y P uno de los puntos de intersección de la recta HD con el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que D es el punto medio de HP.

8) En un triángulo $\triangle ABC$, sean BD la altura, BM la mediana y P y Q las proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo $\angle B$. Demuestra que los puntos D, M, P y Q están sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\triangle ABC$.

Homotecia:

Una homotecia es una transformación del plano que manda un punto X a un punto X', donde $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$. El punto O se llama centro de homotecia y la constante k se llama razón de homotecia. Y se dice que dos figuras son homotéticas si una figura se transforma en la otra bajo una homotecia. Por lo general se denota la homotecia con centro O y razón k como $H(O, k)$.

Lemas importantes:

a) Dos figuras semejantes, pero no congruentes, con lados correspondientes paralelos, son homotéticas. En particulas las líneas que unen cada par de puntos correspondientes entre las figuras son concurrentes en el centro de homotecia.

b) Dos circunferencias de centros y radios distintos son figuras homotéticas.

c) Cada tangente común a dos circunferencias dadas, pasa por un punto de homotecia.

d) La homotecia de una recta que no pasa por el centro de homotecia es otra recta paralela a la original.

e) La composición de dos homotecias con coeficientes k_1 y k_2, donde $k_1 k_2 \neq 1$, es una homotecia con coeficiente $k_1 k_2$ y su centro de homotecia pertenece a la línea que conecta los centros de estas homotecias.

Ejemplo: Sea ABC un triángulo y D el punto de tangencia del incirculo ω de ABC con el lado AC. Sea M sobre ω tal que DM es diámetro de ω. Sea K la intersección de BM con AC. Demuestra que $AK = CD$.

1) Muestra que si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común interseca a las circunferencias en B_0, B, C, C_0 entonces $\measuredangle B_0AC = \measuredangle BAC_0$.

2) Sean dos triángulos homotéticos ABC y DEF con centro de homotecia P. Sean Y y Z los circuncentros de los triángulos ABC y DEF. Muestra que P, Y, Z son colineales.

3) Sea ABC un triángulo y sea P un punto en su interior. La recta AP intersecta al circuncírculo de ABC nuevamente en A'. Los puntos B' y C' se definen de manera análoga. Sea O_A el circuncentro del triángulo BCP. Los circuncentros O_B y O_C se definen de manera análoga. Sea O'_A el circuncentro de $B'C'P$. Los circuncentros O'_B y O'_C se definen de manera análoga. Muestra que las rectas $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ y $O_CO'_C$ son concurrentes.

4) Sean dos circunferencias C_1 y C_2 con centros O y P respectivamente, tangentes internamente en un punto A. Sea C_3 una circunferencia con centro Q tangente externamente a C_1 en B. Sea C un punto en C_1, J la segunda intersección de la recta AC con C_2, y L la segunda intersección de la recta BC con ~~Q~~. Muestra que las rectas PQ, AB y JL concurren. C_3

5) Sean I, O el incentro y el circuncentro de ABC respectivamente, y D, E, F los circuncentros de los triángulos BIC, CIA, AIB. Sean P, Q, R los puntos medios de los segmentos DI, EI, FI. Muestra que el circuncentro M del triángulo PQR es el punto medio del segmento IO.

6) Dados dos puntos fijos A, B en una circunferencia, y un punto C móvil sobre la misma circunferencia, encuentra el lugar geométrico de los gravicentros de todos los triángulos ABC.

7) Dado un triángulo ABC, encuentra el lugar geométrico de los centros de los rectángulos $PQRS$ cuyos vértices Q, P están sobre el lado AC y los vértices R, S están sobre los lados AB, BC respectivamente.

8) Se toma un punto arbitrario dentro de un triángulo acutángulo. Desde él se trazan las proyecciones hacia los lados, y se traza una circunferencia que pasa por esos tres pies de proyección. Dicha circunferencia corta una segunda vez a cada uno de los lados. Muestra que las perpendiculares a los lados desde estos tres nuevos puntos son concurrentes.

9) Tres círculos congruentes tienen un punto común O y son tangentes por pares a los lados de un triángulo dado ABC. Muestra que el incentro y el circuncentro del triángulo ABC con colineales con el punto O.

10) En un triángulo ABC, $AB = AC$. Un círculo es tangente internamente al círcuncírculo de ABC y también a los lados AB, AC en P, Q, respectivamente. Prueba que el punto medio del segmento PQ es el incentro de ABC.