1. Lógica

1.1. Proposiciones

Definición 1.1

Diremos que una **proposición** es cualquier sentencia declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo.

Ejemplo 1.2

- París es la capital de Canadá.
- $2^2 = 4$
- Todo entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos

Un error común que se da en la introducción de estos temas es la suposición que afirmaciones ambiguas son proposiciones, como por ejemplo: **Las matemáticas son divertidas**, ya que para todos nosotros esta afirmación es cierta, sin embargo todos conocemos a alguien, a quien las matemáticas no le parezcan divertidas. A continuación ejemplos de enunciados que no son proposiciones:

Ejemplo 1.3

- ¿Cuándo es el siguiente selectivo?
- $X - y = x + r$

Existen dos tipos de proposiciones:

- *Simples*: Proposición
- *Compuestas*: Estructura y conectivos con proposiciones simples.

1.2. Conectivos lógicos

En el lenguaje cotidiano utilizamos proposiciones compuestas, que consisten de dos o más proposiciones unidas por uno o más conectivos lógicos, siendo "y" ($\wedge$), "o" ($\vee$), "no" ($\neg$), "implica" ($\rightarrow$) y "equivale" ($\leftrightarrow$), los más comunes. Por ejemplo, podemos combinar 3 proposiciones:

Ejemplo 2.1

Si los humanos son mortales y todos los mexicanos son humanos entonces todos los mexicanos son mortales.

Identificamos las siguientes proposiciones:

- p : Todos los humanos son mortales.
- q : Todos los mexicanos son humanos.
- r : Todos los mexicanos son mortales

Simbólicamente podemos escribirlo como $(p \wedge q) \to r$.

- **CONJUNCIÓN:** Expresa que dos eventos son ciertos simultáneamente (será verdadera solamente en el caso en que ambas proposiciones lo sean).

  > **Ejemplo 2.2**
  > "Son las 4 PM y está lloviendo". Está compuesta por las proposiciones:
  > - p : Son las 4 PM.
  > - q : Está lloviendo.
  >
  > Se simboliza como $p \wedge q$

  Una observación importante es que en el lenguaje matemático: $p \wedge q$ es lo mismo que $q \wedge p$. Esto no siempre es cierto en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo: "José pateó el tiro libre y la pelota entró en la portería", no significa lo mismo que, "La pelota entró en la portería y José pateó el tiro libre".

  Nota: En la frase: "Juan y Pedro son amigos", el conectivo "y" no se está utilizando para unir dos proposiciones.

- **DISYUNCIÓN:** Se utiliza cuando queremos expresar que el evento A es cierto, o el evento B es cierto. Se simboliza como $p \vee q$, y es verdadera cuando al menos una de las proposiciones componentes lo es. La proposición compuesta será falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas.

  > **Ejemplo 2.3**
  > "Esta noche comeré pollo o vegetales". Está compuesta por las proposiciones:
  > - r : Esta noche comeré pollo.
  > - s : Esta noche comeré vegetales.

- **NEGACIÓN:** Surge de la necesidad de negar sentencias, expresando que una proposición es falsa. Dada una proposición p, podemos formar la proposición compuesta "no p", que se simboliza por "$\neg p$", la cual es verdadera si p es falsa y es falsa si p es verdadera.

  > **Ejemplo 2.4**
  > "Rosa no cenará". Está compuesto por la negación de una proposición. Sea $p =$"Rosa cenará", podemos reescribir la sentencia como "$\neg p$".

  Nota: $\neg\neg p$ es equivalente a decir p, esto no siempre se cumple en nuestro lenguaje cotidiano. Así en frases como: "No me desagradó la película", no quiere decir que a quien lo dijo, le haya agradado la película.

- **CONDICIONAL:** Se refiere a la noción de implicación. En matemática utilizamos expresiones como "p implica q", que se simboliza como $p \to q$, donde p es llamado *antecedente* y q, *consecuente* posee un valor de verdad "verdadero", en los siguientes casos:
  - p y q son ambas verdaderas.
  - p y q son ambas falsas.
  - p es falsa y q es verdadera.

  Es decir, la expresión condicional es falsa únicamente cuando el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso. La expresión puede leerse de las siguientes formas:
  - p implica q.
  - Si p entonces q.

  Nota: Algo falso puede llevarnos a cualquier parte, por ello no debemos de dar por hecho nada, pues tomar como verdadero algo no significa que lo sea. Abraham Lincoln, propuso en una ocasión la siguiente adivinanza: Si el rabo de un perro se llamase pata, ¿cuántas patas tendría un perro? La respuesta de Lincoln fue: "Cuatro, el llamar pata al rabo no significa que lo sea."

- **BICONDICIONAL:** Se refiere a la noción de equivalencia. Se dice que dos proposiciones p y q son (lógicamente) equivalentes si cada una implica a la otra. La proposición bicondicional "p si y sólo si q" se simboliza por $p \leftrightarrow q$.

  El bicondicional será verdadero cuando p y q tengan el mismo valor de verdad. Y se puede leer de las siguientes formas:
  - p es equivalente a q.
  - p si y sólo si q.

1.3. Tablas de verdad:

Cuando una proposición p es verdadera se representa por 1 y cuando es falsa por 0. La siguiente tabla muestra los valores de verdad de las proposiciones compuestas para cada uno de los diferentes conectivos.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

1.4. Equivalencias lógicas

Es posible comprobar por medio de tablas de verdad que dos expresiones p y q son *lógicamente equivalentes* al observar que se obtienen los mismos valores de verdad de las proposiciones simples que las componen. Algunas de las equivalencias más importantes están resumidas en la siguiente tabla:

Nombre	**Equivalencia lógica**
Doble negación	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
Leyes conmutativas	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
Leyes asociativas	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
	$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
Leyes distributivas	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
Leyes de idempotencia	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
Leyes de identidad	$(p \vee c) \Leftrightarrow p$
	$(p \wedge t) \Leftrightarrow p$
Leyes de dominación	$(p \vee t) \Leftrightarrow t$
	$(p \wedge c) \Leftrightarrow c$
Leyes de negación	$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow t$
	$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow c$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
	$(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
Contrarrecíproca o contrapositiva	$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
Implicación	$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
	$(p \to q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
	$(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \to q)$
	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$

Las equivalencias de la tabla anterior nos permiten simplificar expresiones lógicas o encontrar otras expresiones que, aunque con mayor o menor complejidad tengan el mismo significado. Se dice que estás expresiones son **lógicamente equivalentes**. Para entender mejor el concepto veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1

Demostrar la equivalencia lógica:

$$[(p \vee q) \vee (p \vee r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \vee (p \vee r) &\Leftrightarrow [(p \vee q) \vee p] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow [p \vee (q \vee p)] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow [p \vee (p \vee q)] \vee r && \text{ley conmutativa}\\
&\Leftrightarrow [(p \vee p) \vee q] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \vee r && \text{ley de idempotenc}\blacksquare
\end{aligned}
$$

1.5. Métodos de demostración

En matemática, un **teorema** es una proposición para la cual es posible mostrar que su valor de verdad es siempre cierto siempre y cuando se cumplan ciertas suposiciones llamadas **hipótesis**. La **demostración** de un teorema es un argumento lógico valido cuyas premisas son las hipótesis del teorema y cuya conclusión es la conclusión del problema. Las hipótesis utilizadas pueden incluir axiomas o postulados (que son proposiciones que se asumen verdaderas sin necesidad de demostración dentro de un cuerpo de conocimiento especifico), las premisas del argumento o los resultados de otros teoremas.

Si existe tan solo una instancia para la cual las hipótesis son verdaderas pero la conclusión es falsa, entonces el teorema es incorrecto. Dicha instancia es llamada un **contraejemplo del teorema.**

1.5.1. Demostración directa

Las primeras técnicas que estudiaremos son usadas para demostrar teoremas cuyas conclusiones tienen la forma $P \to Q$. Es decir, cuando un teorema tiene la forma lógica siguiente:

$$\begin{array}{rl} & H_1 \\ & H_2 \\ & \vdots \\ & H_n \\ \hline \therefore & P \to Q \end{array}$$

donde $H_1, H_2, \ldots H_n$ son todas hipótesis del problema a demostrar. Recuerde que demostrar que un argumento como este es válido es equivalente a demostrar que

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \to (P \to Q)$$

es una tautología. Ya que sólo nos interesa demostrar que un teorema específico se cumple cuando sus hipótesis son verdaderas. Así mismo, sabemos que la implicación $P \to Q$ será verdadera si P es falsa sin importar que valor de verdad tome Q. Por lo tanto, sólo es necesario analizar cuando P es verdadera, ya que en ese caso es necesario que Q también es verdadera para que $P \to Q$ sea verdadera. En otras palabras, para demostrar este tipo de conclusión es suficiente asumir que P es verdadera y demostrar que Q también sea verdadera para que toda la implicación sea verdadera.

Note que asumir que P es verdadera es equivalente a agregar a P a la lista de hipótesis, Es por esto que probar que Q debe cumplirse significa tratar Q como la conclusión del teorema, olvidándose de la conclusión original.

Ejemplo 5.1
Suponga que a y b son números naturales. Demuestre que si ambos son números pares, entonces $a + b$ es un número par.

Solución. La hipótesis del problema son que a y b son números naturales. La conclusión tiene la forma $P \to Q$, donde P es la proposición compuesta "a y b son números pares", y Q "$a + b$ es también un número par".

Hipótesis	*Conclusión*
a y b son naturales	(a par y b par) $\Longrightarrow$ ($a + b$ par)

De acuerdo a nuestra técnica de demostración, debemos asumir que a y b son pares e intentar utilizar dicha suposición para demostrar que $a+b$ es par. En otras palabras, agregamos P a nuestra lista de hipótesis y cambiamos la conclusión original por $a+b$ es par, obtenemos:

Hipótesis	*Conclusión*
a y b son naturales	$a+b$ par
a y b son pares	

Solo nos queda escribir la prueba formalmente. Asumimos que a y b son números pares, por lo que $a=2m$ y $b=2n$ con $m,n \in \mathbb{N}$. De aquí que $a+b=2m+2n=2(m+n)$, si $q=m+n$ (lo cual estamos seguros que es número natural, pues los números naturales son cerrados bajo la suma), se tiene que: $a+b=2q$, i.e. $a+b$ es par. ■

1.5.2. Demostración por casos

Es común que durante la demostración de un teorema lleguemos a un punto donde sea natural que el argumento sea dividido en un número finito de casos. Dentro de esto podemos mencionar dos propiedades:

- Los casos a considerar tienen que ser *exhaustivos*, es decir que todas las instancias del problema cumplen con al menos uno de los casos, en otras palabras, todas las posibilidades son cubiertas por los casos listados.
- Los casos son *mutuamente excluyentes:* Todas las instancias del problema son cubiertas por a lo sumo uno de los casos.

Ejemplo 5.2

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^4 - n^2$ es divisible por tres.

Solución. Primero tenemos que identificar los datos que tenemos, como nos está pidiendo que n^4-n^2 sea divisible por 3, tiene que ser de la forma $n^4-n^2=3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Lo único que tenemos como hipótesis es que $n \in \mathbb{N}$, en estos casos donde no haya de donde partir, es conveniente seguir una prueba por casos.

Una opción sería analizar cuando n es par y cuando n es impar, y entonces se tendría:

$$n^4-n^2=(2j)^4-(2j)^2=16j^4-2j^2,$$

lo cual, desafortunadamente, no nos ayuda para concluir que es múltiplo de 3. Ya que la conclusión nos pide demostrar que un número es divisible por 3, una división por casos más natural es aquella que toma en cuenta la divisibilidad (o no) de n por 3; es decir, dividir el problema en casos en que n sea o no divisible por 3. Esto trae consigo la ventaja de introducir un factor 3 en los cálculos a realizar.

- **Primer caso**: $n=3m$

$$n^4-n^2=(3m)^4-(3m)^2=3(9m^4-3m^2)$$

- **Segundo caso**: n deja residuo 1 en la división por 3, $n=3k+1$

$$n^4-n^2=(3k+1)^4-(3k+1)^2=3(27k^4+36k^3+15k^2+2k)$$

- **Tercer caso**: n deja residuo 2 en la división por 3, $n = 3k + 2$

$$n^4 - n^2 = (3k + 2)^4 - (3k + 2)^2 = 3m + 2^4 - 2^2 = 3(m + 4)$$

Con lo anterior, se ha probado para todos los posibles valores de n, $n^4 - n^2$ es múltiplo de 3. ■

Una demostración por casos no siempre se usará para temas de divisibiliad, también podemos usarlas para particionar los reales en negativos, positivos y el cero, así como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3

Demuestre que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$

Solución. Ya que el valor absoluto está definido por casos, dividiremos la demostración de esa manera. La forma natural de hacerlo es utilizar las condiciones para definir los diferentes casos. Es decir, dada una variable x, utilizar los casos $x \geq 0$ y $x < 0$. Como tenemos dos variables con 2 casos cada una, el problema tiene un total de $2^2 = 4$ casos:

Caso 1. $x \geq 0, y \geq 0$.

Ya que ambas variables son positivas, $x + y \geq 0$ y, por lo tanto,

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

lo cual cumple con la expresión que queremos demostrar.

Caso 2. $x \geq 0$, $y < 0$.

A diferencia del caso anterior, no podemos estar seguros de cuál es el signo de $x + y$ a partir de $x \geq 0$ y $y < 0$ ya que esto dependerá de cuál variable tiene mayor valor absoluto. Si $|x| \geq |y|$, entonces $x + y$ será mayor o igual a cero, mientras que si $|x| < |y|$, $x + y$ será negativo. Analizamos estos dos casos por separado.

- $x + y \geq 0$.

$$x + y < x + 0 = |x| \geq |x| + |y|$$

- $x + y < 0$.

$$-(x + y) = -x + (-y) \geq 0 + (-y) = |y| \geq |x| + |y|$$

En ambos casos se cumple que $|x + y| \geq |x| + |y|$.

Caso 3. $x < 0$, $y \geq 0$.

Se demuestra de manera similar al caso 2.

Caso 4. $x < 0$, $y < 0$.

Ya que ambas variables son negativas, $x + y < 0$, y tenemos:

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|.$$

En los cuatro casos, podemos ver que $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

Uno de los errores más comunes detectados en los cursos de lógica matemática es que a la hora de considerar los casos para probar una divisibilidad es precisamente, el tomar los restos respecto a 2, lo cual como acabamos de ver no funcionará, o al menos no siempre. Por tanto cuando queramos usar este método de demostración para pruebas de divisibilidad, es de considerar como casos, los restos, respecto al número que queremos probar la divisibilidad.

1.5.3. Demostración por contradicción

En su forma más general, demostrar una proposición p por contradicción significa mostrar que si no es verdadera obtenemos una contradicción. Formalmente, esto significa demostrar que la proposición $\neg p \to falso$ es verdadera. De aquí sabemos por contrapositiva que $verdadero \to p$ es verdadera, y esta implicación es equivalente a p. Si queremos demostrar la proposición $p \to q$ por contradicción, asumimos que $p \to q$ es falso. Pero ya que $p \to q$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee q$, que $p \to q$ sea falso implica que $\neg(\neg p \vee q)$, o, equivalentemente $p \wedge \neg q$, es verdadero. De esta suposición intentamos derivar alguna proposición que contradiga a alguna proposición que sabemos que es verdadera, ya sea p, alguna de nuestras hipótesis, o cualquier axioma o tautología.

Note que asumir que $p \wedge \neg q$ es verdadero, es lo mismo que asumir que p es verdadero y que q es falso. Pero asumir que p es verdadero es equivalente a tomarlo como una de nuestras hipótesis, tal y como lo hacíamos en las demostraciones directas para condicionales. Sin embargo, a diferencia de dichas demostraciones, el concluyente de la conclusión no se convierte en nuestra nueva conclusión, si no que su negación se convierte en una nueva hipótesis y ahora la conclusión buscada es una contradicción.

Ejemplo 5.4

Sean n y m números enteros. Demuestre que si $n \cdot m$ es par, entonces al menos uno de n o m debe ser par.

Solución: El teorema a demostrar tiene los siguientes datos:

Hipótesis	*Conclusión*
n y m son números enteros	$(n \cdot m \text{ par}) \implies (n \text{ par} \vee m \text{ par})$

Para aplicar el método por contradicción, asumimos que el antecedente $(n \cdot m$ par$)$ de la conclusión es verdadero y que la negación del concluyente $(\neg\,[n \quad par \vee m \quad par])$ es verdadera, y tratamos de llegar a una contradicción. Es decir, modificamos el problema para obtener:

Hipótesis	*Conclusión*
n y m son números enteros	
$n \cdot m$ par	
$\neg\,[n \quad par \vee m \quad par]$	

Pero ahora, $\neg\,[n \quad par \vee m \quad par]$ significa que ni n ni m son pares. Por lo tanto, pueden ser escritos como $n = 2k+1$ para algún entero k y $m = 2j+1$ para algún entero j. Por lo tanto,

$$n \cdot m = (2k+1)(2j+1) = 4kj + 2k + 2j + 1 = 2(2kj + k + j) + 1,$$

y como $(2kj+k+j)$ es un número entero, entonces $n \cdot m$ es un número impar. Pero ya que habíamos asumido que $n \cdot m$ era un número par, entonces encontramos la contradicción que deseábamos, por lo que la suposición que $\neg\,[n \quad par \vee m \quad par]$ debe ser falsa.

1.5.4. Demostración por inducción

Para entender cómo funciona la inducción, imagine que entra a clase y descubre que su profesora ha traído consigo una bolsa llena de chocolates. Después de enumerar a los estudiantes con 1, 2, 3, 4, y así sucesivamente, ella ofrece compartir los chocolates con los alumnos siguiendo dos reglas:

1. El estudiante 1 recibe un chocolate.

2. Para todos los $n \in \mathbb{N}$, si el estudiante n recibe un chocolate, entonces el estudiante $n+1$ también recibe un chocolate.

Puede imaginar a la segunda regla como una manera compacta de escribir una larga serie de proposiciones, uno por cada valor natural de n:

- Si el estudiante 1 recibe chocolate, entonces el estudiante 2 recibe un chocolate.
- Si el estudiante 2 recibe chocolate, entonces el estudiante 3 recibe un chocolate.
- Si el estudiante 3 recibe chocolate, entonces el estudiante 4 recibe un chocolate.
- ...

Imagínese que usted es el estudiante 13. Bajo estas reglas, ¿tendrá derecho a un chocolate? Bueno, el estudiante 1 recibe un chocolate por la primer regla. Por lo tanto, por la segunda regla, el estudiante 2 también recibe un chocolate, que significa que el estudiante 3 también recibe chocolate, que significa que el estudiante 4 recibe chocolate, y así sucesivamente hasta llegar a que el estudiante 12 recibe un chocolate y, por lo tanto, usted reciba uno. Como usted podrá observar, la segunda regla de la profesora de hecho asegura que todos los estudiantes reciben chocolate siempre y cuando se cumpla la primera regla, sin importar cuán grande sea la clase.

Ahora suponga que queremos demostrar que todo número natural cumple con alguna propiedad P. En otras palabras, quiere demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el predicado $P(n)$ es verdadero. A diferencia de los alumnos en una clase, existen infinitos números naturales, por lo que no es posible comprobar uno a uno que cumplen cumplen con el predicado $P(n)$. Sin embargo, es posible utilizar una idea similar a la usada en el problema anterior: comenzamos con 1 y repetidamente agregamos 1. Es decir, es posible demostrar que todo número natural cumple con $P(n)$ mostrando que dicho predicado es verdadero para 1 y que cuando le agreguemos 1 a un número k para el cual $P(k)$ sea verdadero, el número resultante también cumple con la propiedad P. Esto garantizaría que, mientras se avanza en la lista de números naturales, comenzando con 1 y repetidamente agregando 1, cada número que encuentre debe también cumplir con P. En otras palabras, todos los números naturales tienen la propiedad P.

Este mismo razonamiento se resume en un principio llamado *inducción matemática*:

> **Definición 5.5** (Principio de inducción matemática)
> Suponga que $P(n)$ es un predicado sobre un entero n. Entonces para demostrar que $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq n_0$, es suficiente mostrar que:
>
> 1. $P(n_0)$ es verdadero.
>
> 2. Para cualquier $k \geq n_0$, si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k+1)$ es verdadero.

En el ejemplo de la profesora y sus chocolates, suponga que $P(n)$ es el predicado "el estudiante n recibe un chocolate". Entonces la primera regla de la profesora asegura que $P(1)$ es verdadera, y su segunda regla asegura que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implica $P(n+1)$. Dados estos hechos, el principio de la inducción dice que $P(n)$ debe ser verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, todos en la clase reciben un chocolate. A continuación se presentará el principio de inducción aplicado a la demostración de la fórmula clásica de la sumatoria; pero antes se describen los cuatro componentes principales:

1. **Exprese que la demostración utiliza inducción.** Esto inmediatamente transmite la estructura general de la demostración, ayudándole al lector a entender su argumento.

2. **Defina un predicado $P(n)$ apropiado.** La conclusión eventual del argumento por inducción será que $P(n)$ es verdadero para todos los naturales n. Por lo tanto, debe definir el predicado $P(n)$ para que su teorema sea equivalente o sea una consecuencia de esta conclusión. Muchas veces el predicado puede salir directamente del teorema a demostrar, como en el ejemplo anterior. El predicado $P(n)$ es llamado la *hipótesis inductiva*. En algunas ocasiones la hipótesis inductiva se referirá a más de una variable, en cuyo caso es necesario indicar cuál variable es la correspondiente a n.

3. **Demuestre que $P(n_0)$ es verdadero.** Esta parte de la prueba es llamada el *caso base* o el paso base.

4. **Demuestre que P(n) implica P(n + 1) para todo número natural n.** Esto es llamado el *paso inductivo* o el paso por inducción. El plan básico es siempre el mismo: asumir que $P(n)$ es verdadera y luego utilizar dicha suposición para demostrar que $P(n+1)$ es verdadero. Estas dos proposiciones debieran ser muy similares, pero cerrar la brecha entre una y otra puede requerir de mucho ingenio. Cualquiera sea el argumento que se utilice, debe ser válido para todo número natural mayor o igual a n, ya que el objetivo es probar de una sola vez las implicaciones $P(1) \to P(2)$, $P(2) \to P(3)$, $P(3) \to P(4)$, etc.

Ejemplo 5.6

Demostrar que para cualquier entero positivo n, se cumple que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Solución.

Caso base: Haciendo $n=1$ la expresión es evidentemente cierta pues $1=\frac{1(1+1)}{2}$.

Hipótesis de inducción: Suponemos que la expresión

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

es verdadera para cierto entero positivo $k=n$.

Paso inductivo: Ahora probamos que la expresión es cierta para $k=n+1$ y utilizamos la hipótesis de inducción. Esto es:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

En conclusión, por el principio de inducción matemática, la expresión es cierta para todo entero positivo n. ■

1.6. Problemas

Ejercicio 1. Exprese en forma simbólica, las siguientes proposiciones compuestas:

- No irás a jugar bkb, o irás y nadie estará ahí.
- O Lucas y Daniel, están ambos diciendo la verdad o ninguno la está diciendo.
- Comeré arroz o puré, pero no comeré arroz y tortillas.
- 3 es divisor común de $6, 9, 15$.

Ejercicio 2. Si el valor de verdad de $(p \wedge q) \to r$ es falso, determine los valores para p, q, r.

Ejercicio 3. Demuestre las siguientes equivalencias lógicas:

- $(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$.
- $[(p \wedge q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \vee (q \to r)]$.
- $\neg (p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Ejercicio 4. Demuestre que $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. La suma de dos números primos mayores que 2 nunca es primo.

Ejercicio 6. Prueba que si $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$, entonces $9 \mid a^2$, $9 \mid b^2$ y $9 \mid c^2$

Ejercicio 7. Demostrar que para cualquier entero positivo n, el número $n^3 - n$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 8. Muestra que

$$b^2 + b + 1 = a^2$$

no tiene soluciones enteras.

Ejercicio 9. Demostrar que la suma de los ángulos internos de un polígono de $n \geq 3$ lados es igual a $180°(n-2)$.

Ejercicio 10. Sea n un entero positivo. Si a un tablero de $2^n \times 2^n$ se le quita una casilla de cualquiera de las cuatro esquinas, demostrar que siempre es posible cubrirlo con piezas de L-triminós.

Ejercicio 11. Si a, b, c son enteros impares, demuestre que $ax^2 + bx + c = 0$ no puede tener una solución racional.

Ejercicio 12. Prueba que si k es un entero positivo y $2^k + 1$ es primo, entonces k es una potencia de dos.

Ejercicio 13. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Ejercicio 14. Si $x \in \mathbb{R}$, satisface que $x + \frac{1}{x}$ es un entero, muestre que $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un entero para todo n natural.

2. Conjuntos

2.1. Definición de conjunto

Definición 1.1
Podemos pensar a un conjunto como una caja que en su interior puede tener elementos, los cuales pueden ser cualquier objeto concreto o abstracto.

En general usaremos letras mayúsculas A, B, C para representar conjuntos y minúsculas a, b, c para representar elementos.

Si a es un elemento de un conjunto A, diremos que a pertenece a A y lo representaremos por

$$a \in A.$$

Si a no es elemento de A entonces diremos que a no pertenece a A y lo representaremos por

$$a \notin A.$$

Diremos que el conjunto A está contenido en el conjunto B cuando todo elemento a de A sea tambien elemento de B y lo representaremos por

$$A \subset B.$$

Cuando A y B tienen exactamente los mismos elementos diremos que son iguales y lo representaremos por

$$A = B.$$

Es fácil ver que se cumple $A = B$ sí y sólo sí $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.2
Decimos que un conjunto A tiene cardinalidad n si tiene n elementos, y lo denotaremos por $|A| = n$. Si A tiene infinitos elementos lo denotamos por $|A| = \infty$.

Definición 1.3
Aceptaremos la existencia de un conjunto que no tiene elementos, lo llamaremos **conjunto vacío** y lo denotaremos por $\emptyset$.

Definición 1.4
Cuando trabajamos con conjuntos definimos un conjunto universo el cual cumple que contiene a todos los conjuntos, lo denotamos por U.

Con estas definiciones obtenemos las relaciones

$$\emptyset \subset X$$

$$X \subseteq U$$

para todo conjunto X.

2.2. Operaciones con conjuntos

- INTERSECCIÓN:

Definición 2.1

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \ \wedge \ x\in B\}.$$

Es decir, el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B.

Por la definición es fácil verificar que se cumplen las relaciones

$$A\cap B\subset A$$

$$A\cap B\subset B$$

$$A\cap\emptyset=\emptyset$$

- UNIÓN:

Definición 2.2

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \ \vee \ x\in B\}.$$

Es decir, el conjunto de todos los elementos que están en A o en B o en ambos.

Por la definición es fácil verificar que se cumplen las relaciones

$$A\subset A\cup B$$

$$B\subset A\cup B$$

$$A\cup U=U$$

- COMPLEMENTO:

Definición 2.3

EL complemento de un conjunto A es el conjunto

$$A^c=\{x \mid x\notin A\}.$$

Es decir, el conjunto de todos los elementos que no están en A.

Nótese que para que esta definición tenga sentido debe estar bien definido nuestro conjunto universo U.
Por la definición es fácil verificar que se cumplen las relaciones

$$A\cup A^c=U$$

$$A\cap A^c=\emptyset$$

$$(A^c)^c=A$$

- DIFERENCIA:

> **Definición 2.4**
> La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto
> $$A - B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}.$$
> Es decir, el conjunto de todos los elementos que están en A pero no están en B.

Por la definición es fácil verificar que se cumplen las relaciones

$$A - B \subset A$$
$$B - A \subset B$$
$$A - A = \emptyset$$

- POTENCIA:

> **Definición 2.5**
> La potencia de un conjunto A es el conjunto
> $$\mathrm{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$
> Es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$, entonces $\mathrm{P}(A) = \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, A\ \}$.
Por definición se cumple

$$\emptyset \in \mathrm{P}(A)$$

y

$$A \in \mathrm{P}(A).$$

- PRODUCTO CARTESIANO:

> **Definición 2.6**
> El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto
> $$AXB = \{(a, b) \mid x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}.$$
> Es decir, el conjunto de todos los pares ordenados con elementos de A en su primera coordenada y elementos de B en su segunda coordenada.

2.3. Identidades

Es posible demostrar haciendo dobles contenciones las siguientes igualdades.

Leyes conmutativas:

$$(A \cup B) = (B \cup A)$$
$$(A \cap B) = (B \cap A).$$

Leyes asociativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Leyes distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Leyes de identidad

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

Leyes de absorción

$$(A \cup B) \cap A = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Para probar igualdades de conjuntos también se puede hacer uso de biyecciones por medio de una función que debe probarse que es biyectiva.

2.4. Problemas

Ejercicio 1. Demuestra que:

- $A - B = A \cap B^c$.
- $A - B = B - A$ si y sólo si $A = B$.
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Ejercicio 2. Demuestra que:

- Si $B \subset A$ $B = A - (A - B)$.
- $A \cap B$ y $A - B$ son ajenos y $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- $A \cap B = A - (A - B)$.

Ejercicio 3. Demuestra que:

- $A \subset B$ si y sólo si $P(A) \subset P(B)$.
- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.
- $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$.

Ejercicio 4. Sea X un conjunto y $A, B.C \subset X$. Supongamos que $A \cap B = A \cap C$ y $(X - A) \cap B = (X - A) \cap C$. Muestre que $B = C$.

Ejercicio 5. Demuestre que

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Ejercicio 6. Sean A, B, C conjuntos finitos, encuentre una expresión para la cardinalidad de la unión. ($|A \cup B \cup C|$).

Ejercicio 7. Si $|A| = n$, dí cual es la cardinalidad de $\mathrm{P}(A)$.

Ejercicio 8. Denotamos Δ como la diferencia simétrica y esta dada por $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Muestra que

$$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

Ejercicio 9. [IMO 2002] Sea n un entero positivo. Cada punto (x, y) en el plano, donde $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$ y $x + y < n$, se colorea de rojo o azul bajo la siguiente condición: si un punto (x, y) es rojo, entonces todos los puntos (x', y') con $x' \leq x$ y $y' \leq y$ son rojos también. Sea A la cantidad de formas de escoger n puntos azules con coordenadas x distintas y B la cantidad de formas de escoger n puntos azules con coordenadas y distintas. Demuestre que $A = B$.

Ejercicio 10. [USAMO 1996] A una secuencia de n términos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde cada x_i es 0 o 1 la llamaremos *cadena binaria de longitud n*. Sea a_n la cantidad de cadenas binarias de longitud n que no contengan tres elementos consecutivos iguales a $1, 0, 1$, en ese orden. Sea b_n la cantidad de cadenas binarias de n elementos tales que no contengan cuatro elementos consecutivos iguales a $1, 1, 0, 0$ o $0, 0, 1, 1$, en ese orden. Demuestre que $b_{n+1} = 2a_n$ para todo entero positivo n.

Ejercicio 11. A lo largo de una calle de una sóla vía, hay n parqueos y n autos numerados del 1 al n. En orden, el conductor del auto i va directamente a su parqueo favorito $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y si está desocupado se estaciona allí. De lo contrario continúa hasta el siguiente parqueo libre y se estaciona en él. Sin embargo, si llega hasta el final sin encontrar parqueo desocupado, se va y no regresa. ¿Cuántas secuencias $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ hay de tal forma que todos los conductores puedan estacionarse?