Teoría de números: MCD y MCM

OMMGTO 2022
Jesús Liceaga
jose.liceaga@cimat.mx

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Sean a, b dos enteros. El **mínimo común múltiplo** de a, b es el **menor** entero positivo que es múltiplo de a y de b.

- Para denotar al mínimo común múltiplo de a, b escribimos $mcm(a, b)$ o $[a, b]$.

- Para denotar al mínimo común múltiplo de a, b escribimos $mcm(a, b)$ o $[a, b]$.

EJEMPLO

Supongamos que queremos encontrar el mínimo común múltiplo de 8 y 12.

Para hacer esto, el primer paso es factorizar los números: $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \cdot 3$.

Ahora, tomamos todos los primos que aparecen en las factorizaciones de nuestros números, los elevamos al exponente más grande que aparezca y hacemos el producto. El resultado será el mínimo común múltiplo.

En nuestro caso, los primos que aparecen son el 2 y el 3, y los exponentes más grandes a los que están elevados son 3 y 1, respectivamente.

Luego, el mínimo común múltiplo de 8 y 12 es $2^3 \cdot 3 = 24$.

EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Sean a, b dos enteros. El **máximo común divisor** de a, b es el **mayor** entero positivo que divide a a y a b.

- Para denotar al máximo común divisor de a, b escribimos $mcd(a, b)$ o (a, b).

EJEMPLO

Supongamos que queremos encontrar el máximo común divisor de 8 y 12.

Para hacer esto, el primer paso es factorizar los números: $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \cdot 3$.

Ahora, tomamos los primos que aparecen en **ambas** factorizaciones de nuestros números, los elevamos al exponente más pequeño que aparezca y hacemos el producto. El resultado será el máximo común divisor.

En nuestro caso, el único primo que aparece en la factorización de ambos números es 2, y el exponente más pequeño al que está elevado es 2.

Luego, el máximo común divisor de 8 y 12 es $2^2 = 4$.

PROPIEDADES

Sean a, b, c enteros. Entonces

1. Existen enteros x, y tales que $(a, b) = ax + by$.
   - Notemos que $(8, 12) = 4$ y que $4 = 12(1) + 8(-1)$.

2. Si $a|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a|c$.
   - Se tiene que $4|(5 \cdot 8)$, $(4, 5) = 1$ y $4|8$.

3. Si d es un entero tal que $d|a$ y $d|b$, entonces $d|(a, b)$.

PROPIEDADES

4. Si m es un entero múltiplo de a y b, entonces $[a,b]|m$.

5. Se tiene que $ab = [a,b](a,b)$.

6. Para todo entero n, $(a,b) = (a,b - an) = (a - bn,b)$.

   - Notemos que $4 = (8,12) = (8,4) = (8,12 - 8(1))$.

PROBLEMA

¿Cuántas parejas no ordenadas de enteros positivos $\{a, b\}$ hay tales que $(a, 30) = b$ y $(b, 20) = a$?

Solución.

Como $(a, 30) = b$, entonces $b|a$ y $b|30$.

Así mismo, puesto que $(b, 20) = a$, entonces $a|b$ y $a|20$.

Luego, al ser a, b positivos y tenerse que $a|b$ y $b|a$, se sigue que $a = b$.

Es decir, $a|30$ y $a|20$, de donde $a|(30, 20)$, es decir, $a|10$.

Así, los posibles valores de a son $1, 2, 5, 10$, por lo que las parejas posibles son $\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{5, 5\}, \{10, 10\}$.

Sustituyendo estos valores en las expresiones originales podemos comprobar que en efecto las satisfacen. Por lo tanto, en total hay 4 parejas.