Material Básico Olimpiadas de Matemáticas, Veracruz 2016.

ÍNDICE.

Advertencia

Esta Antología es una recopilación de textos de diversas fuentes y no tiene mayor mérito que el deseo de que sea de utilidad para aquel estudiante o profesor que quiere conocer los temas que se trabajan en las Olimpiadas de Matemáticas. Esta lista de temas no es exhaustiva, esperamos que sirva de referencia para los que están iniciando.

Hemos tratado de incluir textos introductorios sin embargo, como no han sido redactados en un mismo documento, estos carecen de continuidad. Por la razón anterior aparecerán cambios abruptos en la redacción y tratamiento de los temas. La mayor parte de los textos incluidos se pueden encontrar en la Internet, algunos de ellos se extrajeron de Wikipedia y conservan sus hipervínculos, mismos que pueden ser usados para navegar entre las referencias.

Esperamos que esta Antología les sea de utilidad y despierte su interés en las Olimpiadas de Matemáticas.

Porfirio Toledo Hernández
Comité Estatal de la OMM Veracruz
Xalapa-Enríquez, Ver., 2016.

Teoría de números

Números Primos

Se llaman números primos aquellos números naturales distintos del 1 que no tienen otros divisores que ellos mismos y la unidad.(Que tienen exactamente dos divisores)

La sucesión de los números primos comienza con

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Hay infinitos números primos, es decir, existen números primos tan grandes como se quiera. La distribución de los números primos es muy irregular. Hay algunos que son números impares consecutivos, como 3 y 5; estos se llaman *primos gemelos*.

A los números que son el producto de dos o más primos les llamaremos *compuestos*.

Teorema fundamental de la aritmética

Todo entero n > 1 puede descomponerse en productos de números primos en una expresión única de la forma:

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} .... p_n^{a_n}$, donde las $p_1, p_2, ..., p_n$ son primos, y $a_1, a_2, ..., a_n$ son enteros.

Por ejemplo:

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

$825 = 3 \times 5^2 \times 11$

$46137 = 3 \times 7 \times 13^3$

Múltiplo

Un **múltiplo** de un número es el que lo contiene un número entero de veces. En otras palabras, un múltiplo es un número tal que, dividido por a, da por resultado un número entero (el resto de la división euclídea es cero). Los primeros múltiplos del uno al diez suelen agruparse en las llamadas tablas de multiplicar.

- Ejemplo: 18 es múltiplo de 9.

  $a=18$

  $b=9$

  $a=2 \cdot b$

En efecto, 18 contiene 9 dos veces exactamente.

1 Propiedades de los múltiplos

- Si a es un múltiplo de b, entonces b es un divisor de a.
- Todo número entero es múltiplo de 1 y de sí mismo.
- Cero (0) es múltiplo de cualquier número.
- Si a y b son múltiplos de n, entonces $a+b$, a-b, ka y kb lo son para cualquier k natural.

2 Submúltiplo

Un número entero a es submúltiplo de otro número b solo si b es múltiplo de a.

2.1 Propiedades de los submúltiplos

- El número uno es submúltiplo de cualquier número.
- Todo número es submúltiplo de sí mismo
- Todo número es submúltiplo del número cero.

2.2 Ejemplos

- Los múltiplos de 2 terminan en 0, 2, 4, 6, 8.
- En los múltiplos de 3, la suma de los valores de sus cifras es también múltiplo de 3.
- Los múltiplos de 5 terminan en 0, o en 5.
- Los múltiplos de 6 terminan en 0, 2, 4, 6, 8 y la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 3.
- En los múltiplos de 9, la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 9.

3 Véase también

- Divisibilidad
- Tabla de multiplicar
- Anexo:Tabla de divisores

4 Referencias

- «Múltiplo», *Diccionario de la lengua española* (22.ª edición), Real Academia Española, 2001, http://lema.rae.es/drae/srv/search?key=M%C3%BAltiplo.
- Weisstein, Eric W. «Múltiple». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

5 Enlaces externos

- Criterios para averiguar si un número es múltiplo de otro
- Tablas de Múltiplos y Submúltiplos para Imprimir

Divisibilidad

Un número es divisible entre otro cuando lo contiene exactamente un número entero de veces. En otras palabras si dividimos **un número** entre **otro número**, el cociente debe ser:
 Exacto
 Número entero
 Residuo debe ser cero.

Definición : Sean a y b dos números enteros. Decimos que a divide a b (lo que simbolizamos con $a \mid b$) si existe un entero c tal Que $b = ac$. Esto equivale a decir que b es múltiplo de a. o que la división $b \div a$ no deja residuo.
Si a no divide a b, escribimos $a \nmid b$. Esto es lo mismo que decir que la división b÷ a deja residuo.

Ejemplos:
$3|12$ pues $12 = 4\times 3$
$4 \nmid 10$ ya que no existe un entero c tal que $10 = 4c$.
$4 \mid 20$ ya que si $c = 5$, $20 = 4c$.
$3|0$ dado que $0 = 3c$ cuando $c = 0$.
$1| 5$ puesto que $5 = 1\times 5$
$5 \nmid 1$ dado que $1 \neq 5c$ para cualquier entero c.
Para cualquier entero a, $a+1 \mid a^2 -1$. Ya que $a^2 -1 = (a+1)\times k$, con $k = a-1$.

Criterios de Divisibilidad

A continuación damos algunos criterios de divisibilidad que facilitan la búsqueda de los factores primos.

Divisibilidad por 2
Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par.

Divisibilidad por 3
Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3. Por ejemplo: 168351 es divisible por 3 pues 1 + 6 + 8+ 3 + 5 + 1 = 24, el cuál es múltiplo de 3.

Divisibilidad por 5
Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en cinco.

Divisibilidad por 7
Un número es divisible por 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.
Veamos un ejemplo: ¿2401 es divisible por 7?
240_1 x 2 = 2, 240 - 2 = 238, 23_8 x 2 = 16, 23 - 16 = 7.
Entonces, 2041 sí es divisible por 7. Verifiquemos:
2401 / 7 = 343.

Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan un lugar impar, y la suma de los dígitos de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11. Por ejemplo, veamos si 94378 es divisible por 11:

9<u>4</u>3<u>7</u>8, de derecha a izquierda:

Pares (subrayados): 4 y 7, 4 + 7 = 11

Impares: 9, 3 y 8, 9 + 3 + 8 = 20

Impares - Pares = 20 - 11 = 9, luego 94378 no es divisible por 11. (Verifíquelo)

Divisibilidad por 15, 17 y 19

El procedimiento para investigar la divisibilidad por 13, 17 y 19 es similar al de la divisibilidad por 7, sólo que al separar la primera cifra de la derecha, ésta se multiplica por 9, 5 y 17 respectivamente; siendo un número divisible por 13, 17 y 19 si al final del proceso sobra un cero o un múltiplo de 13, cero o un múltiplo de 17, cero o un múltiplo de 19.

Ejemplo: investigar la divisibilidad de 1501.

Con 13:

150_1 x 9 = 9, 150 - 9 = 141, 14_1 x 9 = 9, 14 - 9 = 5.

No es divisible por 13.

Con 17:

150_1 x 5 = 5, 150 - 5 = 145, 14_5 x 5 = 25, 14 - 25 = -11.

No es divisible por 17.

150_1 x 17 = 17, 150 - 17 = 133, 13_3 x 17 = 51, 13 - 51 = -38.

Si es divisible por 19. Verifiquemos:

1501 / 19 = 79.

MINIMO COMÚN MULTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

En ocasiones es conveniente conocer el menor de los múltiplos comunes (MCM), y el mayor de los divisores comunes (MCD) de varios números enteros. La regla de obtener dichos números es:

- Para encontrar el MCM de varios números enteros se multiplican los factores primos comunes y no comunes de los números tomados con sus mayores exponentes.
- Para encontrar el MCD de varios números enteros se multiplican los factores primos comunes de los números tomados con sus menores exponentes.

Si m es el MCD de a y b esto se denotará por m = (a, b); otra manera de calcular el MCD es usando el ***algoritmo de Euclides***, el cual se basa en la siguiente propiedad:

Si $m = (a, b)$ y $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$, entonces $m = (b, r)$.

Y consiste en lo siguiente:

Dividimos a / b obteniendo un residuo r_1, después dividimos b / r_1 y obtenemos un residuo r_2, a continuación dividimos r_1 / r_2 obteniendo un residuo r_3, y así sucesivamente hasta llegar a un residuo cero, el MCD de a y b será el último residuo diferente de cero.

El algoritmo de Euclides se incluye aquí debido a su utilidad en la demostración de algunos teoremas importantes de la divisibilidad entre enteros.

Ejemplos. Usando el algoritmo de Euclides, encontrar el MCD de:

a) 328 y 1804;
b) 105 y 385

a) 1804 / 328 = 5 y resto = 164
328 / 164 = 2 y resto = 0 Por lo tanto (1804, 328) = 164

b) 385 / 105 = 3 y resto = 70
105 / 70 = 1 y resto = 35
70 / 35 = 2 y resto = 0 Por lo tanto (385, 105) = 35

Este proceso puede esquematizarse de la siguiente manera, usando divisiones sucesivas:

$a = bq_1 + r_1 \qquad (0 \leq r_1 < b)$
$b = r_1q_2 + r_2 \qquad (0 \leq r_2 < r_1)$ ---------- (A)
$r_1 = r_2q_3 + r_3 \qquad (0 \leq r_3 < r_2)$
....
$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \qquad (0 \leq r_n < r_{n-1})$
$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$

Por lo tanto, $(a, b) = r_n$, donde $b > r_1 > r_2 > r_3 > ... > r_{n-1} > r_n > 0$

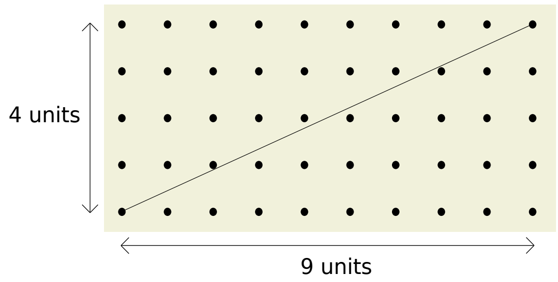
A partir de las ecuaciones (A) se puede obtener una importante propiedad del MCD: si d = (a, b), existen dos enteros, K y L tales que d = Ka + Lb.

Números primos entre sí

En matemáticas, dos números enteros a y b son **números primos entre sí** (o ***coprimos***, o ***primos relativos***), si no tienen ningún factor primo en común, o, dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1. Equivalentemente son primos entre sí, si y sólo si, su máximo común divisor es igual a 1.

Por ejemplo, 6 y 35 son primos entre sí, pero 6 y 27 no lo son porque ambos son divisibles por 3. El 1 es primo respecto de todos los enteros, mientras que 0 sólo lo es respecto de 1 y -1.

Un medio rápido para determinar si dos números enteros son primos entre sí es el algoritmo de Euclides.



Los números 4 y 9 son coprimos. Por tanto, la diagonal del retículo 4 x 9 no interseca con ninguno de los otros puntos del retículo.

1 Propiedades

1.1 Básicas

- El máximo común divisor de dos números primos entre sí a y b es 1. Por tanto, no existe ningún número primo que divida a ambos.

- Si dos números enteros a y b son primos entre sí, entonces existen dos enteros x e y tales que $a{\cdot}x + b{\cdot}y = 1$. (Identidad de Bézout)

- Si a y b son primos entre sí y a divide a un producto bc, entonces a divide a c. (Lema de Euclides)

- Los números enteros a y b son primos entre sí cuando b tiene un inverso para el producto módulo a; es decir, existe un número entero y tal que $b{\cdot}y \equiv 1 \pmod{a}$. Una consecuencia de esto es que si a y b son primos entre sí y $bm \equiv bn \pmod{a}$, entonces $m \equiv n \pmod{a}$. Dicho de otra manera, b es simplificable en el anillo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de los enteros módulo a.

1.2 Otras propiedades

Los dos números enteros a y b son primos entre sí, si y sólo si, el punto de coordenadas (a, b) en un sistema cartesiano de coordenadas es "visible" desde el origen (0,0) en el sentido en que no hay ningún punto de coordenadas enteras situado entre el origen y (a,b).

La probabilidad de que dos números enteros elegidos al azar sean primos entre sí es igual a $6/\pi^2$.

Dos números naturales a y b son primos entre sí, si y sólo si, los números 2^a-1 y 2^b-1 son primos entre sí.

El número de enteros que son primos entre sí a un entero positivo n, entre 1 y n, es dado mediante la función φ de Euler $\varphi(n)$.

Si dos números son consecutivos entonces son primos entre sí, (fácilmente se puede ver usando el Algoritmo de Euclides).

2 Generalización

Dos ideales I y J en un anillo conmutativo A son **primos entre sí** si $I + J = A$. Esto generaliza la identidad de Bézout. Si I y J son primos entre sí, entonces $IJ = I \cap J$; además, si K es un tercer ideal tal que I contiene a JK, entonces I contiene a K.

Con esta definición, dos ideales principales (a) y (b) en el anillo de los números enteros $\mathbf{Z}$ son primos entre sí, si y sólo si, a y b son primos entre sí.

3 Véase también

- Número primo
- Máximo común divisor

4 Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Relatively Prime». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Representación decimal

En matemática, la **representación decimal** es una manera de escribir números reales positivos, por medio de potencias del número 10 (negativas o positivas). En el caso de los números naturales, la representación decimal corresponde a la escritura en base 10 usual; para los números racionales, se obtiene una representación decimal *limitada*, o *ilimitada periódica* si son números periódicos; si son irracionales, la representación decimal es *ilimitada y no periódica*.

1 Definición matemática

La representación decimal de un número real no negativo *r*, es una expresión matemática escrita tradicionalmente como una serie del tipo

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

en donde a_0 es un entero no negativo, y $a_1, a_2, \ldots$ son enteros tales que $0 \le ai \le 9$ (son los llamados «dígitos» de la representación decimal). Si la secuencia de dígitos es finita, los *ai* restantes se asumen como 0. Si no se consideran secuencias infinitas de 9's, la representación es única.[1]

El número definido por una representación decimal también admite la siguiente escritura:

$$r = a_0.a_1a_2a_3\ldots.$$

En tal caso, a_0 es la parte entera de *r*, no necesariamente entre 0 y 9, y $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son los dígitos que forman la parte fraccionaria de *r*.

Ambas notaciones son, por definición, el límite de la sucesión:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}$$

2 Aproximación a números reales

Todo número real puede ser aproximado al grado de precisión deseado, por medio de números racionales que poseen representaciones decimales finitas. En efecto, sea $x \ge 0$; para cada número natural $n \ge 1$ hay un número decimal exacto $r_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ tal que

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

3 Caso de los números enteros

Todo número entero posee una escritura natural en el sistema de numeración decimal. Para obtener su representación decimal es suficiente con escribir 10^0 como denominador.

4 Caso de los números decimales

Un número decimal (finito) es un número que se puede escribir de la forma $\frac{N}{10^n}$ con *N* y *n* números enteros. Un número decimal posee entonces una representación decimal limitada compuesta por potencias negativas de 10. Recíprocamente: todo número que posee una representación decimal limitada, es un número decimal.

5 Caso de los números racionales

La expansión decimal de un número real no negativo *x* terminará en ceros (o en nueves) si y solo si, *x* es un número racional cuyo denominador es de la forma 2^n5^m, donde *m* y *n* son enteros no negativos.

6 Véase también

- Sistema de numeración decimal | Notación posicional
- Número decimal
- Número periódico
- 0,9 periódico
- IEEE 754
- Simon Stevin | Fracción decimal

COMBINATORIA

0. INTRODUCCIÓN

UNA COMIDA GRATIS

Diez jóvenes decidieron celebrar la terminación de sus estudios en la escuela secundaria con un almuerzo en un restaurante. Una vez reunidos, se entabló entre ellos una discusión sobre el orden en que habían de sentarse a la mesa. Unos propusieron que la colocación fuera por orden alfabético; otros, con arreglo a la edad; otros, por los resultados de los exámenes; otros, por la estatura, etc. La discusión se prolongaba, la sopa se enfrió y nadie se sentaba a la mesa. Los reconcilió el camarero, dirigiéndoles las siguientes palabras:

- Jóvenes amigos, dejen de discutir. Siéntense a la mesa en cualquier orden y escúchenme:

Todos se sentaron sin seguir un orden determinado. El camarero continuó:

- Que uno cualquiera anote el orden en que están sentados ahora. Mañana vienen a comer y se sientan en otro orden. Pasado mañana vienen de nuevo a comer y se sientan en orden distinto, y así sucesivamente hasta que hayan probado todas las combinaciones posibles. Cuando llegue el día en que ustedes tengan que sentarse de nuevo en la misma forma que ahora, les prometo solemnemente, que en lo sucesivo les convidaré a comer gratis diariamente, sirviéndoles los platos más exquisitos y escogidos.

La proposición agradó a todos y fue aceptada. Acordaron reunirse cada día en aquel restaurante y probar todos los modos distintos, posibles, de colocación alrededor de la mesa, con el objeto de disfrutar cuanto antes de las comidas gratuitas.

Sin embargo, no lograron llegar hasta ese día. Y no porque el camarero no cumpliera su palabra sino porque el número total de combinaciones diferentes alrededor de la mesa es extraordinariamente grande. Estas son exactamente 3´628.800. Es fácil calcular, que este número de días son casi 10.000 años.

1. PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO

A menudo nos encontramos con preguntas del tipo ¿qué proporción de...? ¿Cuál es la probabilidad de...? ¿De cuántas maneras se puede...?

Muchas veces, para responder, se necesita un pensamiento sistemático y un poco de información adicional; por ejemplo, ¿cuántas rutas diferentes puedo usar para ir de Mérida a México? o ¿De cuántas maneras pueden quedar los 3 primeros puestos en una carrera de 6 caballos?

Hay técnicas y principios matemáticos útiles en situaciones variadas, pero muchas preguntas se pueden responder directamente, contando en forma sistemática, es decir, listando todos los posibles resultados en un orden sistemático, para luego contar cuántos son, o desarrollando reglas de conteo. Algunas soluciones parecen ingeniosas cuando se ven por primera vez (y muchas veces lo son) pero, como decía George Polya, cuando podemos aplicar nuevamente estos métodos ingeniosos en problemas similares y en situaciones relacionadas entre sí, hemos desarrollado una técnica.

Enunciaremos algunos principios que nos ayudarán a resolver muchísimos problemas de conteo, daremos ejemplos de cómo usar estos principios y finalmente veremos algunos métodos menos rutinarios y más ingeniosos.

1.1 Principio de las cajas (del palomar o de Dirichlet)

"Si tenemos m objetos que se distribuyen en n cajas, m > n, entonces una de las cajas recibe al menos dos objetos"

Imaginemos 21 palomas introduciéndose en los 20 agujeros de un palomar. Es claro que al menos dos de las palomas se meterán en el mismo agujero. Este simple hecho recibe el nombre de Principio de Dirichlet o Principio del palomar o también principio de los casilleros. Si las palomas fueran 41 y 20 los agujeros del palomar, podemos asegurar que por lo menos tres de las palomas se han metido en el mismo agujero.

En general: si se quieren distribuir **n** objetos en **k** casilleros (n > k), habrá algún casillero con al menos [(n-1) / k] + 1 objetos. El símbolo [x] significa la parte entera de x; por ejemplo [3.21]=3.

El principio de Dirichlet dice básicamente, y sin perder precisión, que si hay muchas cosas y se meten en pocos casilleros, habrá bastantes en algún casillero.

Ejemplo 1. Demostrar que en cualquier conjunto de 8 números enteros existen al menos dos números a y b tales que (a - b) es múltiplo de 7.

El resto de dividir un número por 7 es uno de los siete números enteros entre 0 y 6. En consecuencia si tenemos un conjunto de 8 números, al menos dos de ellos, a y b, tienen el mismo resto r en la división por 7. Esto es: $a = 7q + r$ y $b = 7q' + r$ donde $r = 0$ ó $0 < r < 7$.

Por lo tanto $(a - b) = 7(q - q')$ es múltiplo de 7.

1.2 Principio de adición

Cinco empresas de transporte terrestre tienen servicio diario entre Mérida y México. Tres empresas de aviación tienen vuelo diario entre Mérida y México. En consecuencia, hay 5+3 maneras de ir de Mérida a México en avión o en autobús.

En los problemas de conteo, la palabra "o" se traduce en suma.

El principio general es: “**Si dos operaciones son mutuamente excluyentes (es decir, si solo una de ellas puede ocurrir) y si la primera se puede hacer de *n* maneras diferentes y la segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *n* + *m* maneras de realizar la primera o la segunda operación.”**

Ejemplo 2: Si tengo una moneda de 50 pesos, una moneda de 100 pesos, una moneda de 200 pesos y una moneda de 1000 pesos, ¿cuál es el número total de precios que puedo pagar usando alguna o todas mis monedas?

Este es un buen ejemplo de una situación en la que se necesita un listado sistemático. Como tenemos 4 monedas, debemos considerar 4 casos. Estos son los precios que podemos cubrir con 1 moneda, con 2 monedas, con 3 monedas y con 4 monedas. Debemos examinar cada uno de estos casos y luego aplicar el principio de adición.

- Con 1 moneda podemos tener 4 precios: 50 pesos, 100 pesos, 200 pesos y 1000 pesos
- Con 2 monedas, podemos listar sistemáticamente las combinaciones:

  Todas las que tienen 50 pesos:

  $ 50 + $100 = $ 150

  $ 50 + $ 200 = $ 250

  $ 50 + $ 1000 = $ 1050

  Todas las que tienen 100 pesos y no hemos listado aún

$100 + $200 = $300
$100 + $1000 = $1100
Todas las que tienen 200 pesos y no hemos listado:
$200 + $100 = $1200

- Con 3 monedas, listamos todas las combinaciones (una para cada moneda que falta):
  $50 + $100 + $200 = $350 (falta la de $1000)
  $100 + $200 + $1000 = $1300 (falta la de $50)
  $50 + $200 + $1000 = $1250 (falta la de $100)
  $50 + $100 + $1000 = $1150 (falta la de $200)
- Con las cuatro monedas
  $ 50 + $100 + $200 + $1000 = $1350

Todos los precios obtenidos son diferentes, luego la respuesta es 4 + 6 + 4 + 1 = 15 precios posibles.

1.3 Principio de las cajas generalizado

"Si se distribuyen *m* objetos en *n* cajas, entonces hay una caja que recibe al menos *[m/n]* objetos; y hay una caja que recibe, a lo más *[m/n]* objetos"

Ejemplo: Si se resuelven 29 ejercicios en una semana, algún día se habrán resuelto al menos 5 ejercicios y algún día a lo más 4 ejercicios.

1.4 Principio del producto

"Si una operación se puede hacer de *n* maneras diferentes y si en cada caso, una segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *mn* (m por n) maneras de realizar las dos operaciones"

Ejemplo 1: El menú de un restaurante ofrece 3 platos calientes y 4 postres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un almuerzo de 1 plato caliente y 1 postre?

Podríamos hacer una lista de todas las posibilidades, pero será mucho más cómodo aplicar el principio de la multiplicación:

Hay 3 maneras de elegir el plato caliente y para cada una de ellas hay 4 maneras de elegir el postre. Por lo tanto, hay 3.4 = 12 comidas posibles.

Ejemplo 2: ¿Cuántos códigos de una letra y un número de un dígito se pueden formar con las 26 letras del alfabeto y los números 0, 1, 2,...,9?

Podríamos listar todas las posibilidades

A0 A1 .... A9
B0 B1 .... B9
....
Z0 Z1 .... Z9

hasta obtener 26 filas de 10 códigos en cada una. 26.10 = 260.

Es más simple utilizar el principio de la multiplicación: hay 26 maneras de elegir la letra y para cada una de ellas hay 10 maneras de elegir el número, de modo que son 26.10 = 260 maneras en total.

Observemos que en los 2 ejemplos hay total libertad de elegir el segundo elemento, no importa cómo se eligió el primero. Es decir, el segundo elemento es independiente del primero.

Elegido el plato caliente, podemos elegir cualquiera de los 4 postres.

Elegida la letra podemos agregarle cualquiera de los 10 números.

Este principio es útil cuando se puede descomponer el proceso de recuento en pasos independientes.

Ejemplo 3: Del problema inicial de los 10 comensales, posiblemente a ustedes les parecerá increíble que 10 personas puedan colocarse en un número tan elevado de posiciones diferentes. **Comprobemos el cálculo.**

Ante todo, hay que aprender a determinar el número de combinaciones distintas, posibles. Para mayor sencillez empecemos calculando un número pequeño de objetos, por ejemplo, tres. Llamémosles A, B y C.

Deseamos saber de cuántos modos diferentes pueden disponerse, cambiando mutuamente su posición. Hagamos el siguiente razonamiento. Si se separa de momento el objeto C, los dos restantes, A y B, pueden colocarse solamente en dos formas.

Ahora agreguemos el objeto C a cada una de las parejas obtenidas. Podemos realizar esta operación tres veces:

1. colocar C detrás de la pareja,
2. colocar C delante de la pareja,
3. colocar C entre los dos objetos de la pareja.

Es evidente que no son posibles otras posiciones distintas para el objeto C, a excepción de las tres mencionadas. Como tenemos dos parejas, AB y BA, el número total de formas posibles de colocación de los tres objetos será:

$$2 \times 3 = 6.$$

Hagamos el cálculo para cuatro objetos.

Tenemos cuatro objetos A, B, C y D, y separemos de momento uno de ellos, por ejemplo, el objeto D. Efectuemos con los otros tres todos los cambios posibles de posición. Ya sabemos que para tres, el número de cambios posibles es 6. ¿En cuántas formas diferentes podemos disponer el cuarto objeto en cada una de las 6 posiciones que resultan con tres objetos? Evidentemente, serán cuatro. Podemos:

1. colocar D detrás del trío,
2. colocar D delante del trío,
3. colocar D entre el 1º y de 2º objetos,
4. colocar D entre el 2º y 3º.

Obtenemos en total: 6 x 4 = 24 posiciones, pero teniendo en cuenta que 6 = 2 x 3 y que 2 = 1 x 2, entonces podemos calcular el número de cambios posibles de posición haciendo la siguiente multiplicación: 1 x 2 x 3 x 4 = 24.

Razonando de idéntica manera, **cuando haya 5 objetos**, hallaremos que el número de formas distintas de colocación será igual a: 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120.

Para 6 objetos será: 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720 y así sucesivamente.

Volvamos de nuevo al caso antes citado de los 10 comensales. Sabremos el número de posiciones que pueden adoptar las 10 personas alrededor de la mesa, si nos tomamos el trabajo de calcular el producto siguiente:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

Resultará el número indicado anteriormente: 3.628.800.

El cálculo sería más complicado, si de los 10 comensales, 5 fueran muchachas y desearan sentarse a la mesa alternando con los muchachos. A pesar de que el número posible de combinaciones se reduciría en este caso considerablemente, el cálculo sería más complejo.

Supongamos que se sienta a la mesa, indiferentemente del sitio que elija, uno de los jóvenes. Los otros cuatro pueden sentarse, dejando vacías para las muchachas las sillas intermedias, adoptando 1 x 2 x 3 x 4 = 24 formas diferentes. Como en total hay 10 sillas, el primer joven puede ocupar 10 sitios distintos. Esto significa que el número total de combinaciones posibles para los muchachos es de 10 x 24 = 240.

¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse en las sillas vacías, situadas entre los jóvenes las 5 muchachas?

Evidentemente serán:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Combinando cada una de las 240 posiciones de los muchachos, con cada una de las 120 que pueden adoptar las muchachas, obtendremos el número total de combinaciones posibles, o sea, 240 x 120 = 28.800

Este número, como vemos, es muchas veces inferior al que hemos citado antes y se necesitaría un total de 79 años. Los jóvenes clientes del restaurante, que vivieran hasta la edad de cien años, podrían asistir a una comida, servida gratis, sino por el propio camarero, al menos por uno de sus descendientes.

2. SELECCIONES

Con frecuencia cada uno de los pasos en que se divide un proceso de recuento puede interpretarse como una elección o **selección** de **k objetos diferentes** elegidos entre los elementos de un conjunto de **n objetos distintos.**

Dado un conjunto o una agrupación de “n” elementos puede ocurrir:

1. Que los elementos sean distintos; en este caso, a los grupos se les denomina **AGRUPACIONES SIMPLES.**

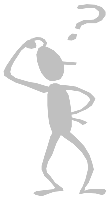
2. Que los elementos sean iguales; en este caso, a los grupos se les denomina **AGRUPACIONES CON REPETICIÓN.**

Considerando la naturaleza de los elementos (que sean iguales o distintos), las **agrupaciones recibirán el nombre de PERMUTACIONES, o COMBINACIONES simples o con repetición.**

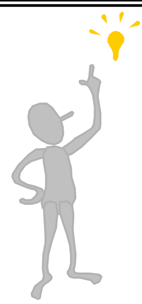
DEFINICIÓN DE FACTORIAL

Para un entero n ≥ 0, *n factorial*, expresado *n!*, se define por:

$n! = (n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, para $n \geq 1$



¿Y cual es el factorial de cero? ¿Y el de 1?



El factorial de cero se define así: $0! = 1$

El factorial de $1! = 1$

Gran parte de los problemas de combinatoria pueden plantearse como una serie de pasos, cada uno de los cuales consiste en elegir unos cuantos de entre ciertos elementos dados.

Es conveniente remarcar que, al hacer dicha selección, hay ocasiones en las que podremos repetir dos veces el mismo objeto (pensemos, por ejemplo, en que queremos escribir una palabra de 4 letras, deberemos elegir cuatro de entre las 28 letras posibles, pero obviamente podemos repetir dos veces la misma letra, como ocurre con la palabra "CASA") y otras ocasiones en las que esto no será posible (si quiero elegir tres amigos para ir a cenar, no puedo escoger tres veces al mismo. Así mismo y dependiendo de la situación, el orden en que escojo los elementos a veces es importante y a veces no. Por ejemplo, si quiero escribir una palabra de 4 letras, el orden de las mismas influye (no es lo mismo CASA que SACA), mientras que si quiero ir a cenar con tres amigos, da igual el orden en que se los diga.

En general, siempre es más fácil resolver problemas en los que el orden es importante.

Veamos a continuación cómo se puede calcular el número de elecciones en cada caso.

2.1 PERMUTACIONES

CASO 1.- IMPORTA EL ORDEN Y NO PODEMOS REPETIR (PERMUTACIÓN SIMPLE U ORDINARIA)

Si, elegimos un primer elemento, lo que podemos hacer de n formas. Quitamos el elemento elegido y elegimos otro de entre los n-1 que quedan. Esto podrá hacerse de n-1 formas. Quitamos también este elemento y nos quedamos con n-2, de entre los que elegimos el tercero. Esto lo podremos hacer de n-2 formas...

Según la regla del producto, las maneras de escoger k elementos de entre un total de n según un determinado orden, será igual al producto de:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Esta expresión se conoce como *Permutaciones de n tomadas de k en k*, y se representa por:

$$\mathbf{P_{n,k}}.$$

Para llegar a una versión simplificada se opera así:

$$\mathbf{n(n–1)(n–2)...\ (n–k+1)\cdot} \frac{(n-k)(n-k+1)\ldots(3)(2)(1)}{(n-k)(n-k+1)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-k)!} = P_{n,k}$$

Se llama permutación simple de n elementos tomados de k en k ($k < n$) a los distintos subconjuntos o grupos formados por k elementos de forma que:

- Los k elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).
- Aquí no se utilizan todos los elementos.

Ejemplo 1: ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

Solución:

$$P_{7,3} = \frac{7\,!}{4\,!} = 210$$

Ejemplo 2: $P_{10,4}$ son las permutaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$P_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{6*5*4*3*2*1} = 5{,}040$$

Es decir, podríamos formar 5,040 subgrupos diferentes de 4 elementos, a partir de los 10 elementos.

Ejemplo3: ¿Cuántos números de tres cifras <u>distintas</u> se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además nos dice "cifras distintas" luego no pueden repetirse.

Por tanto, se pueden formar 504 números:

$$P_{9,3} = 9*8*7 = 504$$

En el caso especial en que n = k, se llama *permutaciones de n*, y se representa:

$$\boxed{P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

Ejemplo 1: Una madre tiene 3 hijos ¿de cuántas maneras distintas, nombrándolos uno por uno, puede llamarlos a cenar?

Solución: $P_3 = 3! = 6$

Se llaman **permutaciones** de n elementos a las diferentes agrupaciones de esos n elementos de forma que:

- En cada grupo intervienen los n elementos sin repetirse ninguno (intervienen todos los elementos.
- Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos n elementos es distinto (influye el orden).

Ejemplo 1: Calcular las maneras posibles de colocar las letras a, b, c.

P = 3! = 6	*abc*	*acb*
	bac	*bca*
	cab	*cba*

Ejemplo 2: P_{10} son las permutaciones de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 3.628.800$$

Es decir, tendríamos 3.628.800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

Ejemplo 3: Con las letras de la palabra DISCO ¿cuantas palabras distintas se pueden formar?

Evidentemente, al tratarse de palabras el orden importa. Y además n = m, es decir tenemos que formar palabras de cinco letras con cinco elementos D, I, S, C, O que no están repetidos.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Por tanto, se pueden formar 120 palabras:

CASO 2.- IMPORTA EL ORDEN Y PODEMOS REPETIR

Este caso es análogo al Caso 1, sin más modificación que no quitar en cada paso los elementos ya escogidos. Razonando igual se llega a que el número de posibles elecciones es

$$n \cdot n \cdot n \cdot ..... \cdot n = n^k$$

Esta expresión se conoce como *Permutaciones con repetición* y podemos decir que una permutación con repetición de n elementos tomados de k en k, son los distintos grupos formados por los k elementos de manera que:

- Los elementos que forman los grupos pueden estar repetidos.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que éstos están colocados (influye el orden)

$$\boxed{PR_{n,k} = n^k}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse a partir de los dígitos 1 y 2?

Solución: $2^3 = 8$

Ejemplo 2: ¿Cuantos números de tres cifras se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además no dice nada sobre "cifras distintas" luego si pueden repetirse.

Por tanto, se pueden formar 729 números

$$PR_{9,3} = 9^3 = 729$$

Ejemplo 3: ¿Cuantas palabras distintas de 10 letras (con o sin sentido) se pueden escribir utilizando sólo las letras a, b?

Al tratarse de palabras el orden importa y además como son palabras de 10 letras y sólo tenemos dos para formarlas, deben repetirse.

$$PR_{10,2} = 2^{10} = 1024$$

Por tanto, se pueden formar 1024 palabras.

Vamos a analizar ahora que ocurriría con el cálculo de las combinaciones o de las permutaciones en el **supuesto** de que al formar los subgrupos **los elementos pudieran repetirse**.

2.2 PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN

CASO 3.- IMPORTA EL ORDEN, PODEMOS REPETIR Y EXISTEN ELEMENTOS REPETIDOS

Son permutaciones con repetición de **n** elementos, no todos distintos, todas las agrupaciones de **n** elementos, formadas por aquellos, dispuestos linealmente y sin que ninguno falte.

El número de permutaciones con repetición que pueden realizarse con **n** elementos, donde existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ elementos iguales entre sí (de una misma clase) y el resto distintos entre sí y distintos también a los anteriores **(** $\mathbf{P^n}\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ **)**, es:

$\mathbf{P^n}\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ =

Observación: Esto puede extenderse a permutaciones de **n** elementos, donde existen **r** elementos de una clase, **q** elementos de otra clase, etc.

$$\mathbf{P'_n} = \frac{\mathbf{n\,!}}{\boldsymbol{\alpha_1}\,\mathbf{!} \times \boldsymbol{\alpha_2}\,\mathbf{!} \times \ldots}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1 , 1 , 1 , 2 , 2 y 3?

Solución: $$\frac{6\,!}{3\,! \times 2\,!} = 60$$

Ejemplo 2: tenemos bolas de 6 colores diferentes y queremos formar subgrupos en los que pudiera darse el caso de que 2, 3, 4 o todas las bolas del subgrupo tuvieran el mismo color. En este caso no podríamos utilizar las fórmulas que vimos en la lección anterior. Así que debemos utilizar la siguiente fórmula:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 9\cdot 4\cdot 7\cdot 5 = 1260$$

Ejemplo 3: ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

El orden importa por ser de distinto color, pero hay bolas del mismo color (están repetidas) y además n = m, es decir colocamos 9 bolas en línea y tenemos 9 bolas para colocar.

Por tanto, tenemos 1260 modos de colocarlas.

Ejemplo 4: Calcular las permutaciones de 10 elementos, en los que uno de ellos se repite en 2 ocasiones y otro se repite en 3 ocasiones:

Es decir, tendríamos 302,400 formas diferentes de agrupar estos 10 elementos.

$$P'^{2,3}_{10} = \frac{10!}{2! * 3!} = 302.400$$

2.3 COMBINACIONES

CASO 4.- EL ORDEN NO IMPORTA PERO NO SE PUEDEN REPETIR ELEMENTOS.

Vamos a deducir la fórmula basándonos en el Caso 1.

Tomamos las n·(n-1)·..... ·(n-k+1) posibilidades y las partimos en clases, de forma que en cada clase estén aquellas elecciones que sean la misma salvo el orden.

Como he escogido k elementos, la forma de ordenarlos será k! y, así, en cada clase tendré exactamente k! casos.

Por tanto, el número de clases, es decir, el número de posibilidades de escoger k elementos sin importar el orden y sin repetir será

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este número suele conocerse como las combinaciones de n elementos tomadas de k en k y se denota por

$$\mathbf{C_{n,k}} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se llama combinaciones de n elementos tomados de k en k ($n \leq k$) a todas las clases posibles que pueden hacerse con los n elementos de forma que:

- Cada agrupación está formada por n elementos distintos entre sí
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplo 1: Un alumno decide rendir tres de los cinco exámenes finales ¿De cuántas maneras distintas puede elegir esas tres pruebas?

Solución:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

Ejemplo 2: ¿Cuantas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva?

$$C^6_{49} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13.983816$$

Es decir, que tendríamos que echar 13.983.816 apuestas de 6 números para tener la seguridad al 100% de que íbamos a acertar.

Ejemplo: Cuantos grupos de 5 alumnos pueden formarse con los treinta alumnos de una clase. (Un grupo es distinto de otro si se diferencia de otro por lo menos en un alumno)

$$C_{30}^{5} = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5!\cdot(30-5)!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25!}{5!\cdot 25!} = 142506$$

No importa el orden (son grupos de alumnos). No puede haber dos alumnos iguales en un grupo evidentemente, luego sin repetición.

Por tanto, se pueden formar 142506 grupos distintos.

En general, calcular $\binom{n}{k}$ por la fórmula anterior implica calcular varios factoriales, lo que hace que no sea muy útil en la práctica. Un método alternativo viene dado por las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN:

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

CASO 5.- EL ORDEN NO IMPORTA Y SI SE PUEDE REPETIR

2.4 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Una combinación con repetición de tamaño **k** es una selección **no ordenada** de **k** objetos elegidos entre **n** tipos diferentes de objetos, habiendo una cantidad ilimitada de cada tipo.

Una combinación con repetición puede describirse diciendo que elegimos x_1 objetos de tipo 1, x_2 objetos de tipo 2,..., x_n objetos de tipo n para alguna n-pla $(x_1,x_2,...,x_n)$. Cada uno de los enteros $x_1,x_2,...,x_n$ es no negativo y $x_1 + x_2 +...+ x_n = k$. Así pues las combinaciones con repetición de tamaño **k** se corresponden con las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 +...+ x_n = k$

El nº de combinaciones de tamaño k con repetición ilimitada elegidas entre **n** tipos

$$C_{n,k}^{R} = \binom{n-1+k}{k}$$

diferentes de objetos es:

Cada combinación con repetición se representa por una palabra en el alfabeto {0,1} del siguiente modo: Los 0's son las marcas que separan los objetos de cada tipo y los 1's indican los objetos que hay de cada uno de los tipos entre dos marcas consecutivas. Si hay **n** tipos de objetos se necesitan n - 1 marcas para separar los tipos y, por tanto, las palabras de 0's y 1's tienen longitud **n - 1 + k.** Así se convierte cada combinación con repetición de tamaño **k** en una combinación de k objetos (las posiciones de los 1's) elegidos entre un conjunto de n - 1 + k elementos (las posiciones).

SELECCIONES (de **k** elementos entre **n**)

	ORDENADAS	**NO ORDENADAS**
SIN REPETICIÓN	n(n- 1) (n- 2).... (n- k+1)	$\binom{n}{k}$
CON REPETICIÓN	n^k	$\binom{n-1+k}{k}$

Se llama combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, a los distintos grupos formados por k elementos de manera que:

- Los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos.
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplo 1: las combinaciones con repetición de los elementos (a, b, c, d) tomados de dos en dos son:

aa ab ac ad
bb bc bd
cc cd
dd

Ejemplo 2: en una bodega hay 12 botellas de ron, 12 de ginebra y 12 de anís. Un cliente compró 8 botellas en total. ¿Cuántas posibilidades hay?

$$CR_{8,3} = 120$$

Ejemplo 3: C'10,4 son las combinaciones de 10 elementos con repetición, agrupándolos en subgrupos de 4, en los que 2, 3 o los 4 elementos podrían estar repetidos:

$$C'_{10,4} = \frac{13\,!}{4\,!\,*\,9\,!} = \frac{13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{(4*3*2*1)\ *(9*8*7*6*5*4*3*2*1)} = 715$$

Es decir, podríamos formar 715 subgrupos diferentes de 4 elementos.

Ejemplo 4: En una confitería hay cinco tipos diferentes de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles)

No importa el orden (son pasteles). Puede haber dos o más pasteles en un grupo, luego con repetición.

$$CR_5^4 = \binom{5+4-1}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(5-1)!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot4!} = 70$$

Por tanto, se pueden formar 142506 grupos distintos

PAUTAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- Si en cada agrupación figuran todos o algunos de los elementos disponibles, *importando su orden* de colocación, entonces se trata de un problema de **permutaciones**.
- Si en cada agrupación figuran todos o algunos de los elementos disponibles, *sin importar el orden* de colocación de éstos, entonces estamos ante un problema de **combinaciones**.

Diagrama de árbol

Un **diagrama de árbol** es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de objetos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción de un diagrama de árbol.

El diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados del experimento, el cual consta una serie de pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en los problemas de conteo y probabilidad.

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. Cada una de estas ramas se conoce como rama de primera generación.

En el final de cada rama de primera generación se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas conocidas como ramas de segunda generación, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta que la construcción de un árbol no depende de tener el mismo número de ramas de segunda generación que salen de cada rama de primera generación y que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

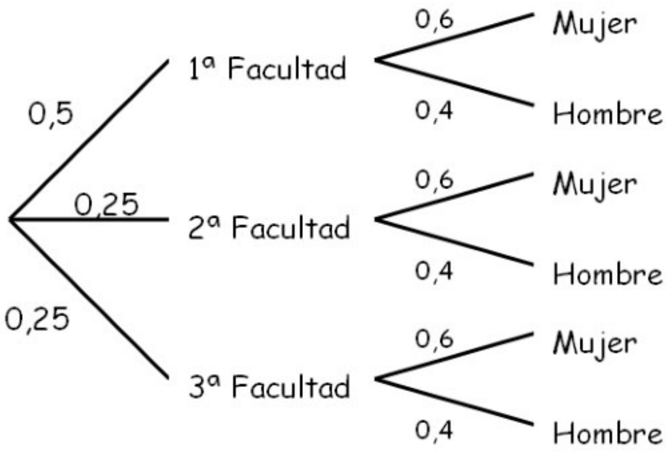
Existe un principio sencillo de los diagramas de árbol que hace que éstos sean mucho más útiles para los cálculos rápidos de probabilidad: multiplicamos las probabilidades si se trata de ramas adyacentes (contiguas), el ejemplo de alumna de la primera facultad, o bien las sumamos si se trata de ramas separadas que emergen de un mismo punto, el ejemplo de encontrar un alumno.

Ejemplos

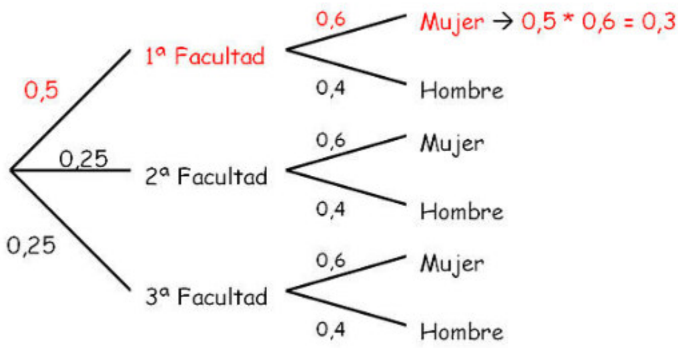
Una universidad está formada por tres facultades:

- La 1ª con el 50% de estudiantes.
- La 2ª con el 25% de estudiantes.
- La 3ª con el 25% de estudiantes.

Las mujeres están repartidas uniformemente, siendo un 60% del total en cada facultad.

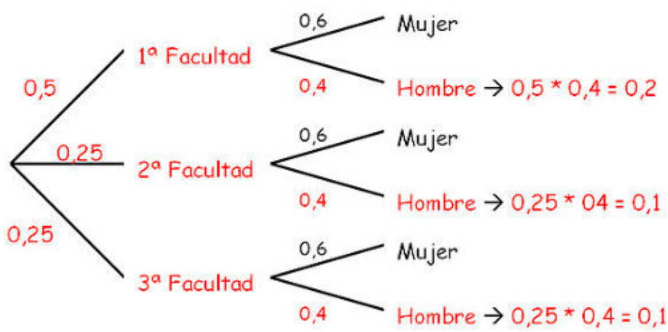


¿Probabilidad de encontrar una alumna de la primera facultad?



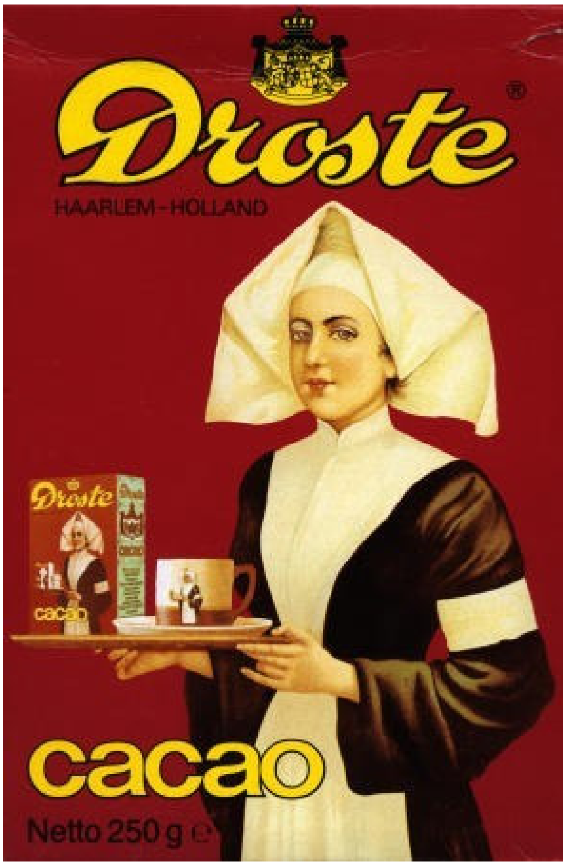
$P(alumna\ de\ la\ 1^a\ facultad) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$

¿Probabilidad de encontrar un alumno varón?



$P(alumno\ varón) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,4$ pero también podría ser lo contrario.

Recursión



Anuncio de cacao con una imagen recursiva. La mujer muestra un paquete idéntico al del propio anuncio, conteniendo así a otra mujer que muestra otro paquete más pequeño, de forma recursiva.

Recurrencia, **recursión** o **recursividad** es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición. Siendo un poco más precisos, y para evitar el aparente círculo sin fin en esta definición:

Un problema que pueda ser definido en función de su tamaño, sea este N, pueda ser dividido en instancias más pequeñas (< N) del mismo problema y se conozca la solución explícita a las instancias más simples, lo que se conoce como casos base, se puede aplicar inducción sobre las llamadas más pequeñas y suponer que estas quedan resueltas.

Para que se entienda mejor a continuación se exponen algunos ejemplos:

- Factorial: Se desea calcular $n!$ (el factorial de n , que se define como el producto de todos los enteros positivos de 1 a n). Se puede definir el problema de forma recurrente como $n(n-1)!$; como $(n-1)!$ es menor que $n!$ podemos aplicar inducción por lo que disponemos del resultado. El caso base es $0!$ que es 1 .
- Algoritmo de ordenación por fusión: Sea v un vector de *n* elementos, podemos separar el vector en dos mitades. Estas dos mitades tienen tamaño *n*/2 por lo que por inducción podemos aplicar la ordenación en estos dos subproblemas. Una vez tenemos ambas mitades ordenadas simplemente debemos fusionarlas. El caso base es ordenar un vector de cero o un elemento, que está trivialmente ordenado y no hay que hacer nada.

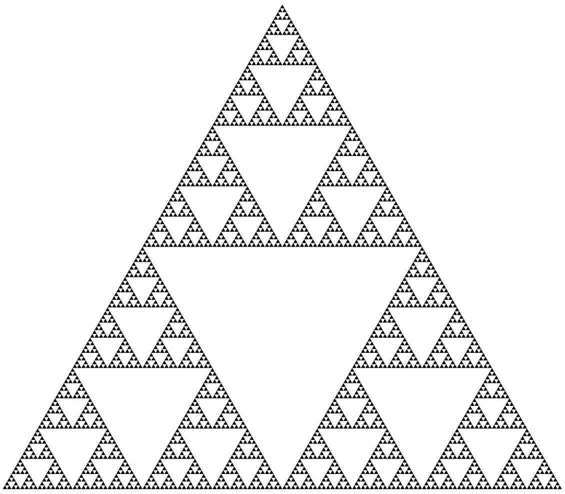


Imagen recursiva formada por un triángulo. Cada triángulo está compuesto de otros más pequeños, compuestos a su vez de la misma estructura recursiva.

En estos ejemplos podemos observar como un problema se divide en varias (una o más) instancias del mismo problema, pero de tamaño menor gracias a lo cual se puede aplicar inducción, llegando a un punto donde se conoce el resultado (el caso base).

Nota: aunque los términos “recursión” y “recursividad” son ampliamente empleados en el campo de la informática, el término correcto en castellano es **recurrencia** [*cita requerida*]. Sin embargo este último término es algo más específico. Véase relación de recurrencia.

1 Recursión en matemáticas

1.1 Conjuntos definidos de forma recurrente

Un ejemplo de conjunto definido de forma recurrente es el de los números naturales, es decir, el conjunto de los números enteros no negativos:[1]

1. 0 pertenece a $\mathbb{N}$.
2. Si n pertenece a $\mathbb{N}$, entonces $n+1$ pertenece a $\mathbb{N}$.
3. Si x verifica las anteriores condiciones, entonces x está incluido en $\mathbb{N}$ [*cita requerida*].

1.2 Funciones definidas de forma recurrente

Aquellas funciones cuyo dominio es un conjunto a lo más enumerable [2] pueden ser definidas de forma recurrente.

Un ejemplo conocido es la definición recurrente de la función factorial $n!$:

$$n! = \begin{cases} \text{si } n = 0 & \Rightarrow 1 \\ \text{si } n \geq 1 & \Rightarrow n\ (n-1)! \end{cases}$$

Veamos cómo se usa esta definición para hallar el valor del factorial de 3:

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \cdot (3-1)! \\ &= 3 \cdot 2! \\ &= 3 \cdot 2 \cdot (2-1)! \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1-1)! \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Otros ejemplos de funciones y sucesiones matemáticas definidas de forma recursiva son:

- Sucesión de Fibonacci — f(0)= 1, f(1) = 1; $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para n ≥ 2.
- Números de Catalan — $C(2n, n)/(n+1)$
- Función de Ackermann

1.3 Constantes

La razón áurea se puede definir como sigue: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$, como una fracción continua en que todos los números son unos.

De forma similar, la identidad $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$ da lugar a una definición como fracción continua de cualquier raíz cuadrada:[3] $\sqrt{x} = 1 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2 + \ddots}}}$

1.4 Resolución de problemas

Resolución de ecuaciones homogéneas de primer grado, segundo orden:

a) Se pasan al primer miembro los términos a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , los cuales también podrían figurar como a_{n+2} , a_{n+1} , a_n

b) Se reemplaza a_n por r^2 , a_{n-1} por r y a_{n-2} por 1 , quedando una ecuación de segundo grado con raíces reales y distintas r_1 y r_2 .

c) Se plantea $a = u\ r_1 n + v\ r_2 n$

d) Debemos tener como dato los valores de los dos primeros términos de la sucesión: $A_0 = k$ y $A_1 = k'$. Utilizando estos datos ordenamos el sistema de 2x2:

$$\begin{cases} u + v = k \\ u\ r_1 + u\ r_2 = k' \end{cases}$$

La resolución de este sistema nos da como resultado los valores u_0 y v_0 , que son números reales conocidos.

e) La solución general es:

$$a_n = u_0\ r_1 n + v_0\ r_2 n$$

2 Recursión en informática

En programación, un método usual de simplificación de un problema complejo es la división de este en subproblemas del mismo tipo. Esta técnica de programación se conoce como divide y vencerás y es el núcleo en el diseño de numerosos algoritmos de gran importancia, así como también es parte fundamental de la programación dinámica.

El ejemplo del cálculo recursivo del factorial de un número llevado al campo de la programación, en este ejemplo C++:

int factorial(int x) { if (x > −1 && x < 2) return 1; // Cuando −1 < x < 2 devolvemos 1 puesto que 0! = 1 y 1! = 1 else if (x < 0) return 0; // Error no existe factorial de números negativos return x * factorial(x - 1); // Si x >= 2 devolvemos el producto de x por el factorial de x - 1 }

Este ejemplo está basado en el lenguaje de programación Pauscal:

2.2. El Triángulo de Pascal y el Teorema del Binomio.

Acomodemos en una tabla los valores de $\binom{n}{k}$ con los valores de n por filas y los de k por columnas:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	

La Identidad de Pascal nos dice que todo elemento del triángulo es igual a los dos que se encuentran directamente[1] sobre ella. Esto quiere decir que si construimos un arreglo triangular de números (comenzando con 1 en la primera fila) de modo que toda entrada sea la suma de las dos que están encima de ella, los números que aparecen son precisamente los coeficientes binomiales. El arreglo que se forma se conoce como *Triángulo de Pascal*

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

El Triángulo de Pascal encierra muchas relaciones numéricas, por ejemplo, la suma de todos los números en la n-ésima fila es 2^n equivalente al Teorema (2.3). Fijémonos ahora en la suman de las “diagonales”. En la siguiente figura, consideramos las diagonales cuarta (en verde), quinta (en rojo) y sexta (en azul) contando desde cero. Sus sumas son respectivamente $1+3+1=5$, $1+4+3=8$ y $1+5+6+1=13$.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

[1] Si el arreglo se hiciera en forma simétrica, las entradas que estarían directamente sobre una dada son las que al poner el arreglo en forma de tabla son las que quedan arriba y arriba a la izquierda.

Entonces tenemos que la suma de los elementos de la diagonal verde y la roja es igual a la suma de los elementos de la diagonal azul. Esto sucede en general, si d_r denota la suma de los elementos en la r-ésima diagonal, entonces

$$d_{r+1} = d_r + d_{r-1}.$$

Además, dado que $d_0 = 1$ y $d_1 = 1$. Los números que se forman de esta manera se conocen como *Números de Fibonacci*. Decimos entonces que la suma de los números en la r-ésima diagonal del Triángulo de Pascal es igual al r-ésimo número de Fibonacci. Posteriormente estudiaremos estos números con mayor profundidad.

Otra relación interesante es la propiedad "hexagonal".

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Escojamos un número en el interior, por ejemplo el $10 = C(5,3)$. Fijémonos en el hexágono de números que se forma a su alrededor con $6 = C(4,2)$, $4 = C(4,3)$, $10 = C(5,2)$, $5 = C(5,4)$, $20 = C(6,3)$, $15 = C(6,4)$. Si se multiplican vértices alternados de este hexágono (vértices azules y vértices rojos) se obtiene en ambos casos la misma cantidad:

$$4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 6 \cdot 5 \cdot 20.$$

Esta propiedad también es válida formando hexágonos de este tipo en cualquier parte del triángulo.

Sin embargo, quizás la relación más interesante en el Triángulo de Pascal se relaciona con el Teorema del Binomio.

Consideremos el producto $(a+b)^5$. Al desarrollarlo, ¿con qué coeficiente aparece a^3b^2? Aquellos que conozcan el Teroema del Binomio dirán enseguida: El coeficiente es $C(5,3)$. ¿Pero porqué sucede así? Uno podría decir: "porque si desarrollamos $(a+b)^5 = a^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5$ vemos que el coeficiente es 10". Pero esa respuesta en realidad no está diciendo la razón e porqué el coeficiente se calcula precisamente como $C(5,3)$.

Para analizar la situación vamos a "diferenciar" los factores:

$$(a+b)^5 = (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)(a_4+b_4)(a_5+b_5).$$

Donde las a_i y las b_j son iguales entre sí, pero que estamos considerando como diferentes por ahora. Si efectuamos el producto de la derecha vemos que los términos que cuentan como a^3b^2 son:

$$a_1a_2a_3b_4b_5,\quad a_1a_2b_3a_4b_5,\quad a_1a_2b_3b_4a_5,\quad a_1b_2a_3a_4b_5,\quad a_1b_2a_3b_4a_5,$$
$$a_1b_2a_3a_4b_5,\quad b_1a_2a_3a_4b_5,\quad b_1a_2a_3b_4a_5,\quad b_1a_2b_3a_4a_5,\quad b_1b_2a_3a_4a_5.$$

En otras palabras, si efectuamos la multiplicación "larga" de los cinco factores, los 10 términos listados arriba son los que quedan en la columna de a^3b^2. Una manera de "contar" la lista consiste en fijarnos que siempre hay precisamente cinco posiciones de las cuales dos son ocupadas por b's y tres por a's. Entonces, dependiendo si nos fijamos en las a's o en las b's obtenemos que hay $C(5,3)$ o $C(5,2)$ que en ambos casos es 10.

Analizando el proceso

Ejercicios y problemas.

2.1 Interprete combinatoriamente la siguiente afirmación:

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1).$$

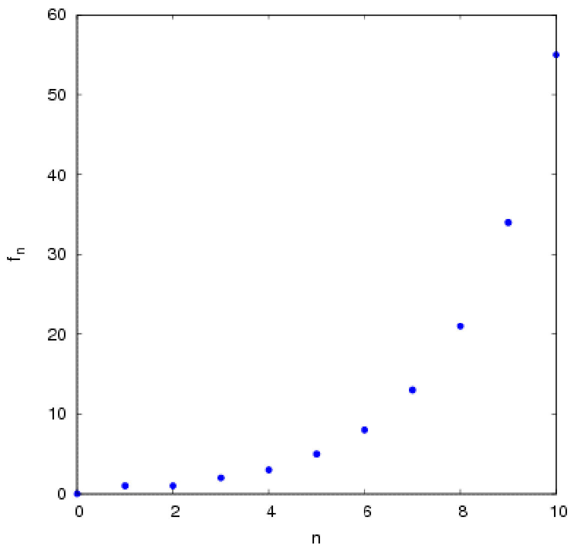
2.2 Demuestra la propiedad hexagonal del Triángulo de Pascal (ver sección 2.2).

2.3 Demuestra que la suma de los elementos en la r-ésima diagonal del Triángulo de Pascal es precisamente el r-ésimo número de Fibonacci.

2.4 Demuestra que

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Sucesión de Fibonacci



Gráfica de la sucesión de Fibonacci hasta f_{10}

En matemáticas, la **sucesión de Fibonacci** (a veces mal llamada **serie de Fibonacci**) es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \ldots$$

La sucesión comienza con los números 1 y 1,[1] y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define.

A los elementos de esta sucesión se les llama **números de Fibonacci**. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa, las inflorescencias del brécol romanescu y en el arreglo de un cono.

1 Historia

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos: «Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir».[2]

Nota: al contar la cantidad de letras distintas en cada mes, se puede saber la cantidad de parejas totales que hay hasta ese mes.

De esta manera Fibonacci presentó la sucesión en su libro *Liber Abaci*, publicado en 1202. Muchas propiedades de la sucesión de Fibonacci fueron descubiertas por Édouard Lucas, responsable de haberla denominado como se la conoce en la actualidad.[3]

También Kepler describió los números de Fibonacci, y el matemático escocés Robert Simson descubrió en 1753 que la relación entre dos números de Fibonacci sucesivos f_{n+1}/f_n se acerca a la relación áurea *fi* (ϕ) cuanto n tiende a infinito; es más: el cociente de dos términos sucesivos de toda sucesión recurrente de orden dos tiende al mismo límite. Esta sucesión tuvo popularidad en el siglo XX especialmente en el ámbito musical, en el que compositores con tanto renombre como Béla Bartók, Olivier Messiaen, la banda Tool y Delia Derbyshire la utilizaron para la creación de acordes y de nuevas estructuras de frases musicales.

2 Definición recursiva

Los números de Fibonacci quedan definidos por la ecuación:

$$(3)\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

partiendo de dos primeros valores predeterminados:

$f_0 = 1$

$f_1 = 1$

se obtienen los siguientes números:

- $f_2 = 2$
- $f_3 = 3$
- $f_4 = 5$
- $f_5 = 8$
- $f_6 = 13$

Triángulos

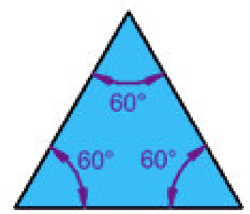
Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos

Los tres ángulos siempre suman 180°

Equilátero, isósceles y escaleno

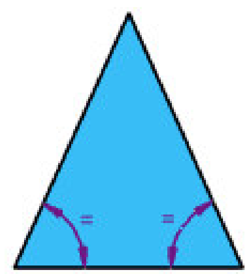
Hay tres nombres especiales de triángulos que indican cuántos lados (o ángulos) son iguales.

Puede haber **3**, **2** o **ningún** lados/ángulos iguales:



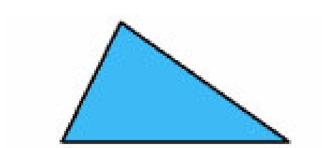
Triángulo equilátero

Tres lados iguales
Tres ángulos iguales, todos 60°



Triángulo isósceles

Dos lados iguales
Dos ángulos iguales

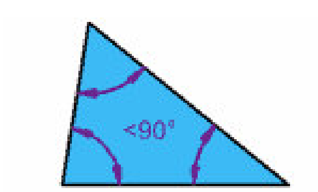


Triángulo escaleno

No hay lados iguales
No hay ángulos iguales

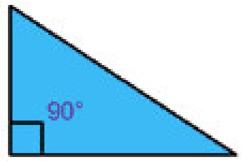
¿Qué tipos de ángulos?

Los triángulos también tienen nombres que te dicen los **tipos de ángulos**



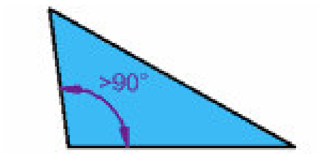
Triángulo acutángulo

Todos los ángulos miden menos de 90°



Triángulo rectángulo

Tiene un ángulo recto (90°)

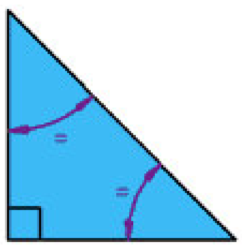


Triángulo obtusángulo

Tiene un ángulo mayor que 90°

Combinar los nombres

A veces los triángulos tienen dos nombres, por ejemplo:

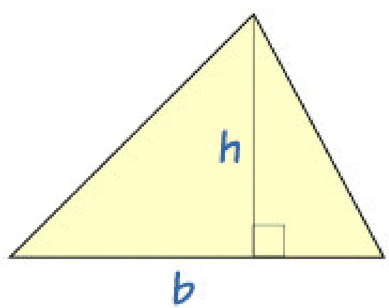


Triángulo isósceles rectángulo

Tiene un ángulo recto (90°), y los otros dos ángulos iguales

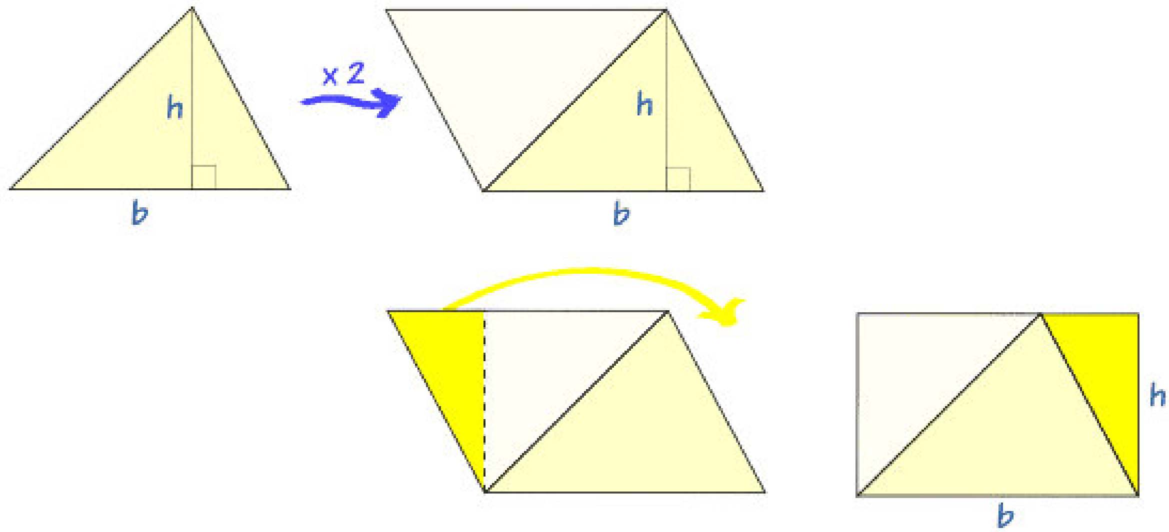
¿Adivinas cuánto miden?

Área



Área = ½bh

La fórmula (1/2)bh vale para todos los triángulos. Asegúrate de que la "h" la mides perpendicularmente a la "b".

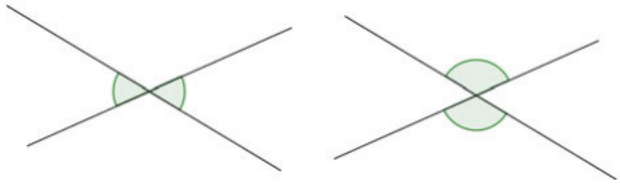


Imagina que "doblas" el triángulo (volteándolo a lo largo de uno de los lados de arriba) para tener una figura de cuatro lados (que será en realidad un "paralelogramo"), entonces el área sería bh. Pero eso son dos triángulos, así que uno solo es (1/2)bh.

Resultados aplicables a la resolución de los problemas

1- Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

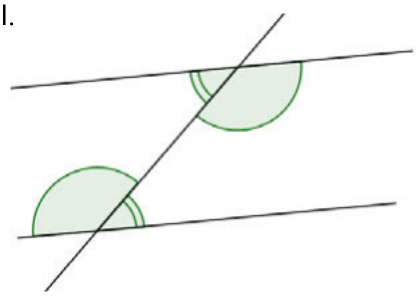
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales



2- Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una recta transversal.

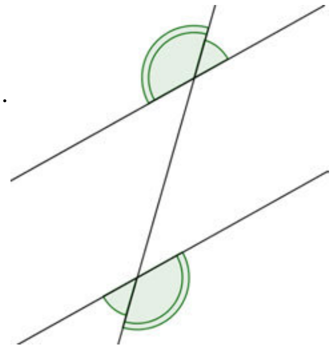
i) Ángulos alternos internos

Los ángulos alternos internos son iguales.



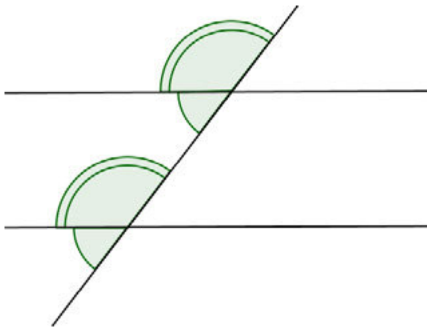
ii) Ángulos alternos externos

Los ángulos alternos externos son iguales.



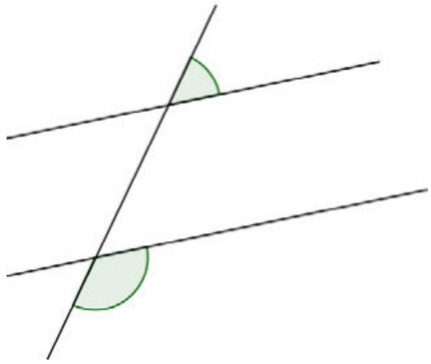
iii) Ángulos correspondientes

Los ángulos correspondientes son iguales.
Dibuje los ángulos correspondientes a la derecha de la transversal y deduzca que son iguales.

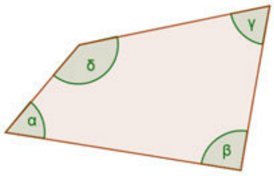


iv) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos marcados?

Los ángulos marcados se llaman conjugados externos. Dibuje los conjugados internos y deduzca que la suma pedida es la misma (180°).



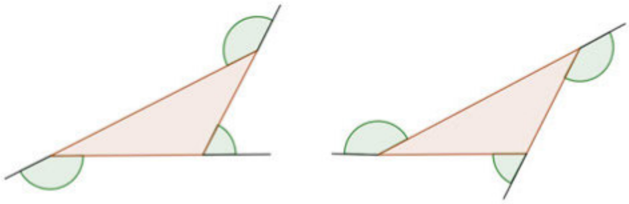
3- Suma de los ángulos interiores de un triángulo.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

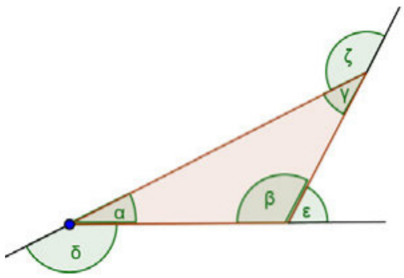
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
Dado el cuadrilátero *ABCD*, calcular la suma de los ángulos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

4- Ángulos exteriores de un triángulo.



a) b)

¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores correspondientes a cada uno de los vértices, considerados en uno de los sentidos expuestos? Figuras a) ó b)



Observemos en primer lugar cuánto vale un ángulo exterior con relación a los ángulos interiores del triángulo.

$$\zeta + \gamma = 180° = \alpha + \beta + \gamma$$

Luego $\zeta = \alpha + \beta$ y análogamente $\varepsilon = \alpha + \gamma$ y $\delta = \beta + \gamma$. En consecuencia, un ángulo exterior es la suma de los ángulos interiores no adyacentes. Ahora podemos calcular la suma pedida

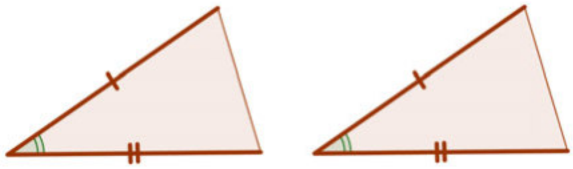
$$\delta + \varepsilon + \zeta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2.180 = 360°$$

5- Conocemos un triángulo si conocemos los 3 lados y los 3 ángulos, es decir con 6 datos. Sin embargo, estos 6 datos pueden obtenerse a partir de una menor cantidad de datos. Surgen así los **Principios de igualdad de triángulos.**

i) Principio LLL

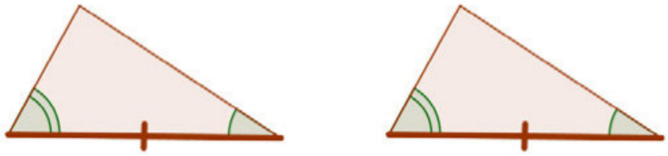
Dos triángulos que tienen los tres lados iguales son iguales.

ii) Principio LAL



Dos triángulos que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual, son iguales.

iii) Principio ALA



Dos triángulos que tienen un lado igual y los dos ángulos adyacentes iguales, son iguales.

iv) ¿Es cierto que son iguales dos triángulos que tengan 2 lados iguales e igual el ángulo opuesto a uno de ellos?
¿Puede enunciar un principio?

¿Es cierto que son iguales dos triángulos que tienen 2 lados iguales e igual un ángulo no comprendido entre ellos?

6- Teorema de Thales

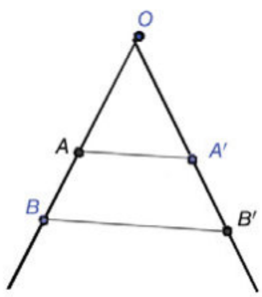
Dadas las rectas AB y $A'B'$ que se cortan en un punto O, si las rectas AA' y BB' son paralelas, entonces

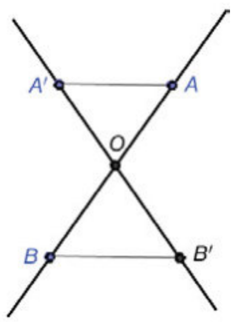
$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$$

Recíprocamente, si las rectas AB y $A'B'$ que se cortan en O satisfacen

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$$

entonces AA' y BB' son paralelas.





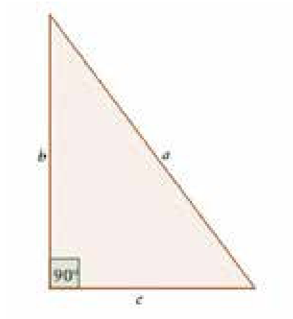
Como consecuencia del teorema de Thales se tiene, con las mismas hipótesis:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA'}{A'B'}$$

Resultados aplicables a la resolución de los problemas

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

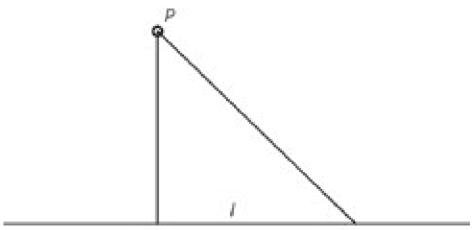


$a^2 = b^2 + c^2$

También se cumple la afirmación recíproca:

Si en un triángulo, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, el triángulo es rectángulo.

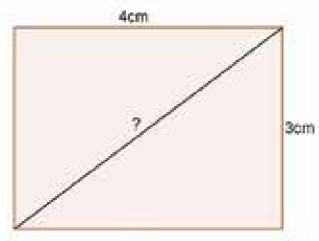
Como consecuencia del teorema de Pitágoras, tenemos las propiedades siguientes:



Entre los segmentos con uno de sus extremos sobre un punto fijo P y el otro sobre una recta l, a la cual P no pertenece, el más corto es aquel que resulta perpendicular a l. La longitud de este segmento se conoce como la distancia entre el punto P y la recta l.

La longitud de la altura sobre un lado de un triángulo (o su prolongación), es menor o igual que las longitudes de los otros lados.

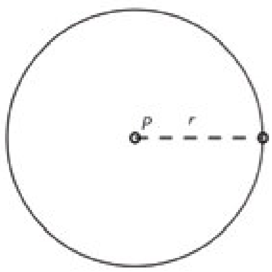
El teorema de Pitágoras permite calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo a partir de las longitudes de sus lados.



Lugares geométricos

En geometría es habitual usar la expresión **lugar geométrico**, para hacer referencia al conjunto de todos los puntos del plano o del espacio que satisfacen ciertas propiedades enunciadas.

A continuación damos algunos ejemplos de lugares geométricos.

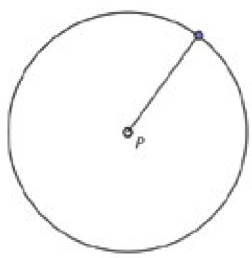


Circunferencia: *Es el conjunto de puntos del plano que guardan una misma distancia r con un punto dado P. El punto P se llama el centro de la circunferencia y la distancia r, se llama el radio de la circunferencia.*

Además del centro y el radio, destacamos a continuación otros elementos asociados con una circunferencia.

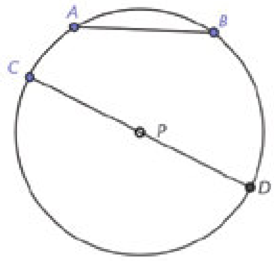
Es usual usar también el término radio en el sentido siguiente:

Un radio en una circunferencia es un segmento que une su centro con un punto de la circunferencia.



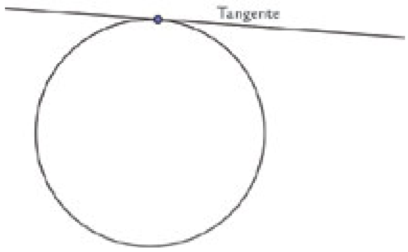
NOTAS DE GEOMETRÍA 2

Cuerda y diámetro: *Una cuerda de una circunferencia es un segmento cuyos extremos se encuentran sobre la circunferencia. Un diámetro en una circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.*

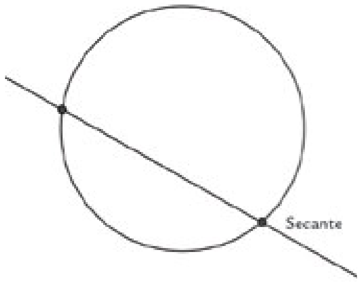


La intersección entre una recta y una circunferencia, tiene a lo sumo dos puntos. Si hay dos puntos en la intersección, la recta se llama *secante a la circunferencia*, en cambio, si hay sólo un punto, la recta se llama *tangente a la circunferencia*.

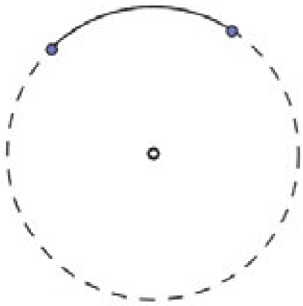
Recta tangente



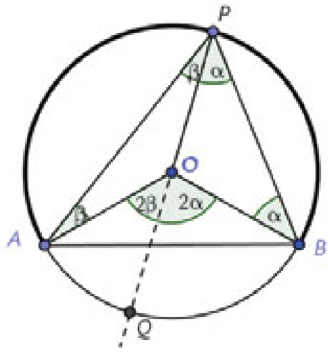
Recta secante



Arco de Circunferencia: *Es un trozo de circunferencia limitado por dos puntos sobre una circunferencia dada.*



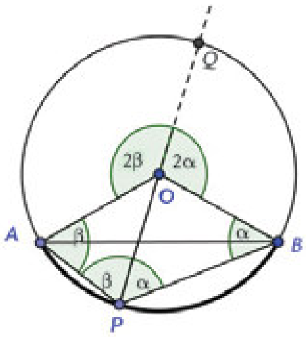
Nota: Si un punto P se encuentra en el arco AB como muestra la figura, entonces el ángulo APB es la mitad del ángulo central AOB:

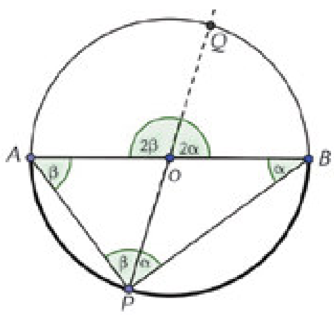


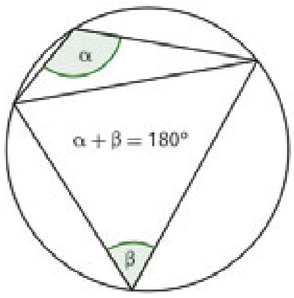
El centro O de la circunferencia, permite descomponer el triángulo APB en tres triángulos isósceles. Teniendo en cuenta que en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los interiores no adyacentes, los datos consignados en la figura quedan justificados y en consecuencia la validez del enunciado.

Corresponde aclarar que otras situaciones pueden darse según la posición del punto P respecto de la cuerda AB y el centro O.

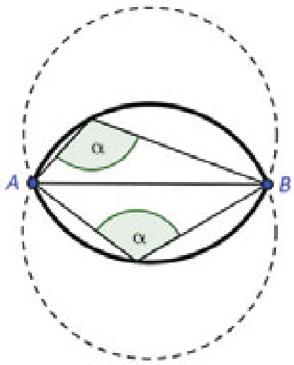
En la segunda figura se observa que si la cuerda es un diámetro, el ángulo en el vértice P es de 90°, ya que $2\alpha + 2\beta$ es llano.







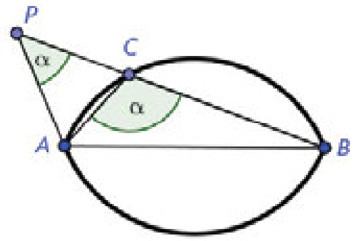
En conclusión, dada una cuerda, cada punto P de uno de los arcos, determina el mismo ángulo al unirse con A y B, cuyo valor es la mitad del ángulo central que cubre el arco complementario. Como los ángulos centrales suman 360°, dos ángulos en arcos complementarios sumarán 180°.



Arco capaz: *Dado un segmento AB y un ángulo α, se llama arco capaz asociado al segmento AB y al ángulo α, al conjunto de puntos P del plano tales que el ángulo APB sea igual a α.*

La siguiente figura ilustra un arco capaz para un ángulo α mayor que cero, como la unión de dos arcos de circunferencias de igual radio, excluidos los extremos *A* y *B*.

La construcción con regla y compás de un arco capaz se dará más adelante. Para justificar que no hay un punto *P* en el lugar geométrico que no esté en la unión de estos arcos, consideremos primero que *P* es exterior a la región limitada por los arcos. Uno de los segmentos *PB* o *PA* cortan a uno de los arcos en un punto *C*. Suponiendo que sea *PB*, se tendría la situación dada por la figura:



De modo que el ángulo *ACB* es exterior al triángulo *APC* y es la suma de los interiores no adyacentes, entonces debe ser el ángulo $CAP = 0$ y consecuentemente, $P = C$.

Si *P* se encontrara en el interior de la región, dejamos a cargo del lector dar una demostración.

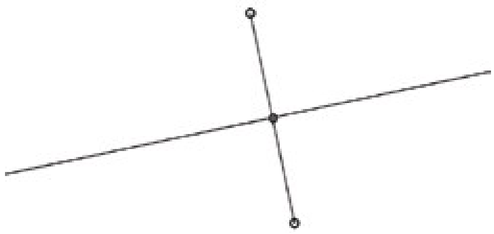
Un caso especial ocurre cuando el ángulo α es cero, el lugar geométrico se reduce a la recta que contiene al segmento *AB*.

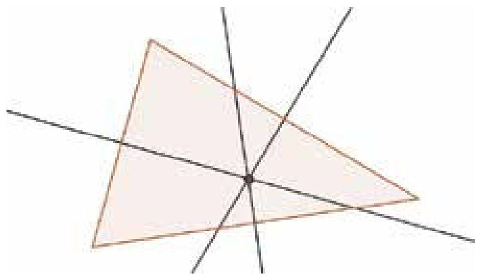
Mediatriz: *Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos dados*

La mediatriz entre los puntos *A* y *B*, es precisamente la recta perpendicular al segmento *AB* que pasa por el punto medio de este segmento.

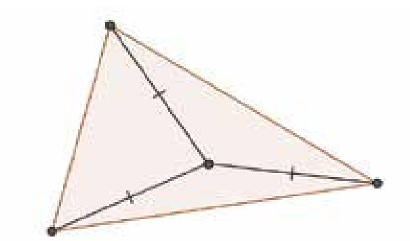
También se hace referencia a la mediatriz de un segmento como a la mediatriz de los extremos del segmento.

Un hecho destacado, en relación con este lugar geométrico, es el siguiente: *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.*

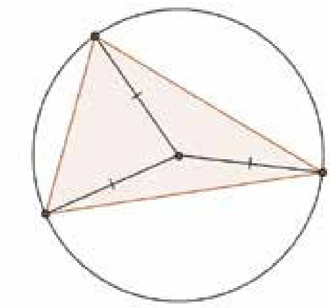




Esto es así, porque el punto de intersección de dos de estas mediatrices, resulta equidistante de los tres vértices del triángulo.



De esto surge que:

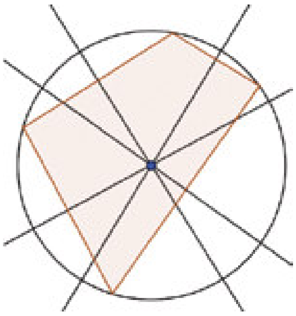


Todo triángulo puede ser inscripto en una circunferencia, llamada circunferencia circunscripta al triángulo.

Es oportuno observar que esta circunferencia es única, ya que su centro será necesariamente el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo y el radio, la distancia desde este punto a cualquiera de los vértices.

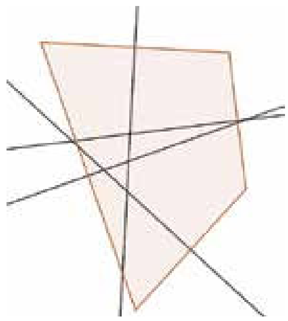
En general, para poder inscribir un polígono en una circunferencia es necesario que las mediatrices de sus lados sean concurrentes, pero esto no siempre ocurre. Veamos un par de ejemplos con cuadriláteros:

Las mediatrices son concurrentes



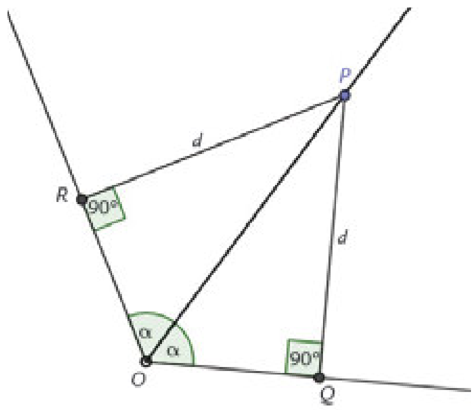
El punto común en las mediatrices, es el centro de la circunferencia circunscripta al cuadrilátero.

Las mediatrices no son concurrentes



En este caso, las intersecciones de las mediatrices determinan seis puntos.

Bisectriz: *Es el conjunto de puntos que equidistan de los lados de un ángulo dado. Este consiste en los puntos de la semirecta que secciona al ángulo en dos ángulos iguales.*

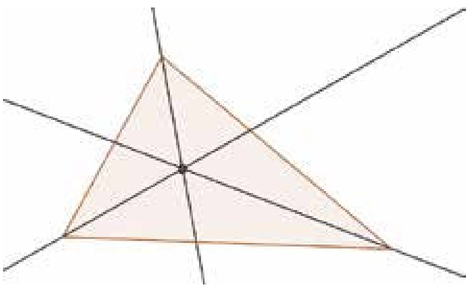


En la figura, *P* es un punto en la bisectriz de un ángulo *QOR*, es decir *P* está a una misma distancia *d* de los lados del ángulo. De esto se concluye que los triángulos *OQP* y *OPR* son iguales, debido al principio:

Dos triángulos con un par de lados iguales y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son iguales.

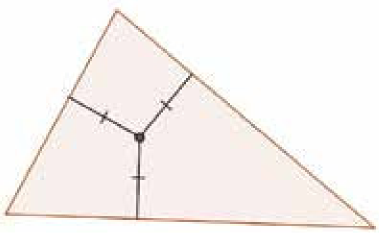
Es decir, también resultan iguales los ángulos *QOP* y *PQR*.

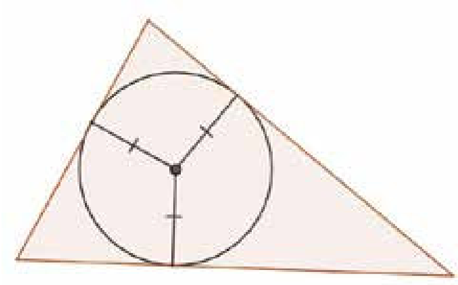
Comentario: El principio enunciado, se propuso en la nota 1 para análisis a cargo del lector.



Tal como ocurre con las mediatrices, las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes. Es decir, el punto de intersección de dos de ellas se encuentra necesariamente en la bisectriz restante.

Este punto equidista de los tres lados del triángulo



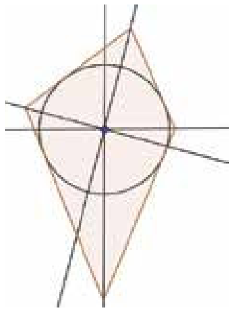


Es oportuno destacar en este caso, que los lados del triángulo son tangentes a la circunferencia con centro en el punto común a las bisectrices que tiene por radio a la distancia de este punto a los lados del triángulo.

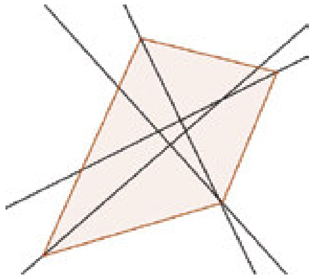
Esta circunferencia se llama *circunferencia inscripta al triángulo*.

No siempre es posible inscribir una circunferencia en un polígono, es decir construir una circunferencia que sea tangente a los lados de un polígono dado. Para poder hacerlo, es necesario que las bisectrices de los ángulos interiores del polígono sean concurrentes. Los ejemplos siguientes ilustran las situaciones con cuadriláteros.

Bisectrices concurrentes

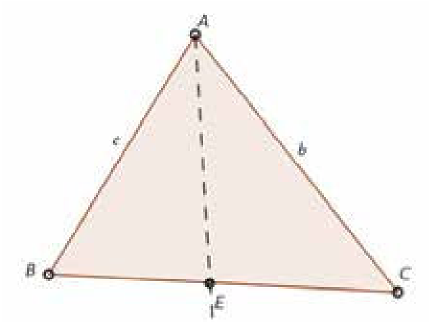


Bisectrices no concurrentes



Una propiedad de la bisectriz de un ángulo de un triángulo.

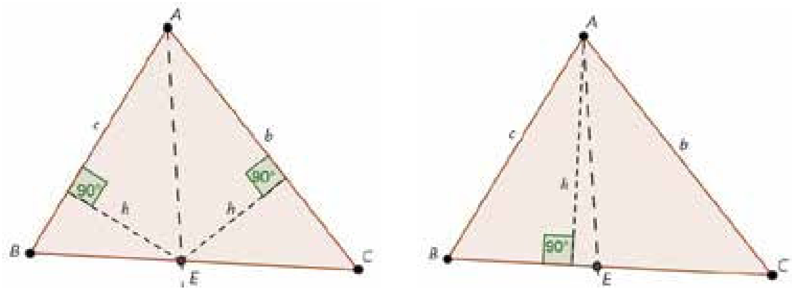
La bisectriz del ángulo con vértice A, en el triángulo ABC, divide al lado BC en segmentos proporcionales a los lados b y c. De modo más preciso con los datos de la figura:



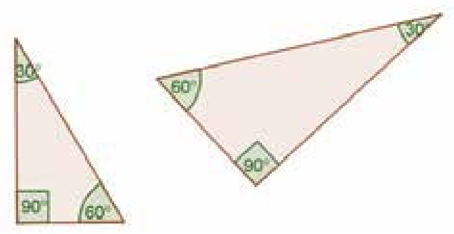
se verifica:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}$$

Esta igualdad se obtiene de establecer la relación entre las áreas de los triángulos *AEC* y *ABE*, de dos maneras distintas. Dejamos esta comprobación como tarea para el lector y un par de figuras que pueden servir de orientación.



Semejanza

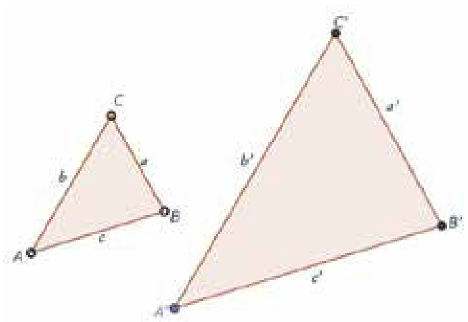


Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos.

Por ejemplo, mostramos dos triángulos cuyos ángulos son de 30°, 60° y 90°

Se observa que el segundo de los triángulos se obtiene del primero mediante una ampliación de esta figura, o también, que el primer triángulo es una reducción de la figura del segundo.

Propiedades de los lados de triángulos semejantes

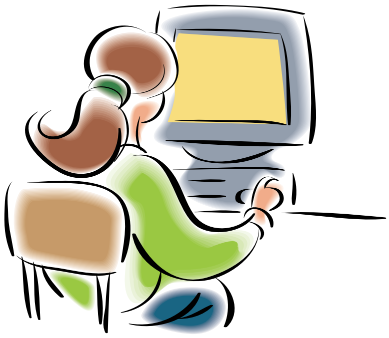


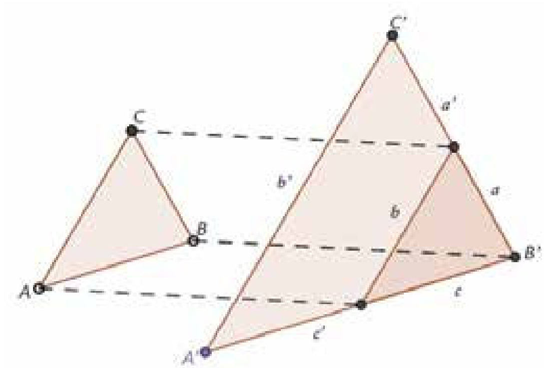
Consideremos A,B,C y A',B',C' dos triángulos semejantes tales que los ángulos en los vértices A,B,C son respectivamente iguales a los ángulos en los vértices A',B',C'.

Si a,b,c y a',b',c' son los respectivos lados de dos triángulos semejantes, entonces se verifica:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

En efecto, inscribiendo ambos triángulos sobre el ángulo en el vértice B', como indica la figura:

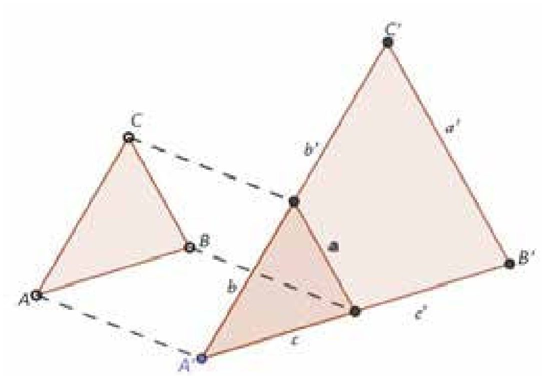




los lados b y b' son paralelos. Usando el Teorema de Thales resulta:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Análogamente, inscribiendo los triángulos sobre el ángulo en el vértice A':



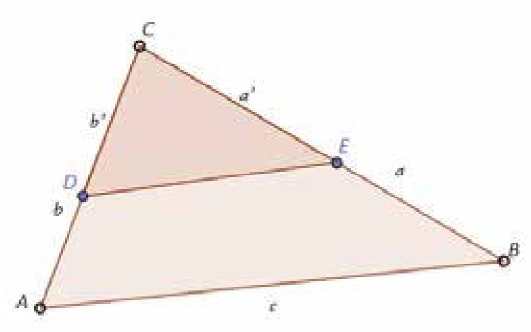
resulta:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La afirmación en la dirección contraria, también es válida, es decir; si a, b, c y a', b', c' son los respectivos lados de dos triángulos que verifican:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

entonces, los triángulos son semejantes. En efecto, sobre el triángulo de lados a,b,c dibujamos un triángulos de lados $CE = a'$ y $CD = b'$ como se muestra en la figura:



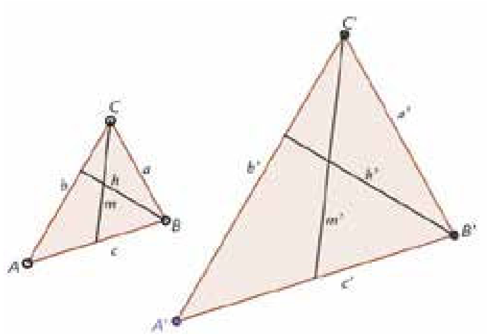
Nuevamente, por el teorema de Thales, los segmentos DE y AB deben ser paralelos, puesto que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

En consecuencia los triángulos en la figura son semejantes y se cumple:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{DE}$$

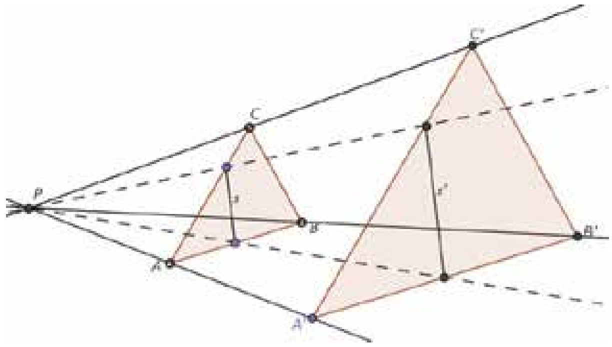
Es decir, resulta $c' = DE$.



Observación: Los pares de lados a,a', b,b' y c,c' en la situación anterior de dos triángulos semejantes, se llaman *lados homólogos*. La relación entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes, también se conserva entre otros segmentos homólogos tales como las alturas, las medianas, etc.

En la figura precedente, m y m' son medianas homólogas y h y h' son alturas homólogas en triángulos semejantes, entonces:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{m}{m'}=\frac{h}{h'}$$



Se puede poner en correspondencia cada segmento en un triángulo con un segmento homólogo en otro triángulo semejante como se indica a continuación. Dibujamos ambos triángulos de modo que los lados homólogos queden paralelos y unimos con rectas los pares de vértices homólogos, las que concurren en un punto P.

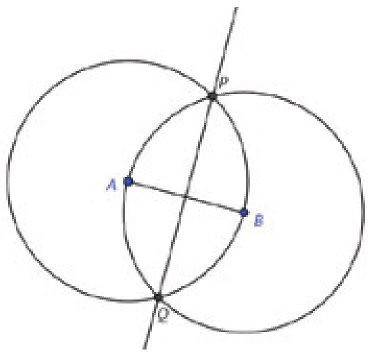
A cualquier segmento s con vértices en los lados de ABC, le corresponde un segmento homólogo s' en $A'B'C'$. Este segmento se obtienen como los puntos de intersección de las rectas que partiendo desde P pasan por los extremos de s, con los lados en $A'B'C'$ que son homólogos a lados de ABC que contienen los extremos de s. Usando el Teorema de Thales, se podrá establecer que:

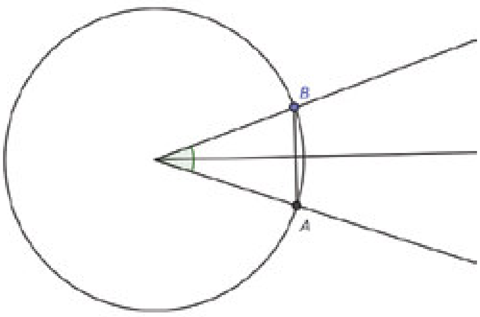
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{s}{s'}$$

Construcciones con regla y compás

Dejamos a cargo del lector, verificar que las construcciones propuestas en cada caso son correctas.

Mediatriz: Es suficiente marcar dos puntos en la mediatriz. En la figura, la mediatriz entre los puntos A y B, queda determinada por los puntos P y Q ubicados en la intersección de las circunferencias: una concentro A que pasa por B y la otra con centro B que pasa por A.

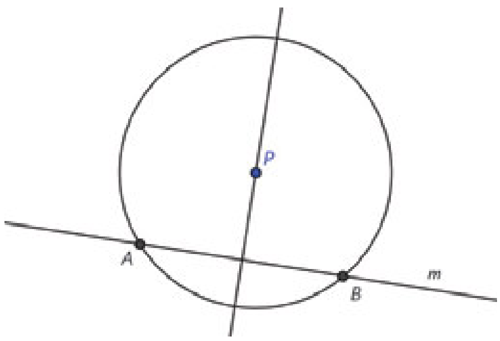




Bisectriz: Dibujando una circunferencia con centro en el vértice del ángulo, se determinan los puntos A y B sobre las semirrectas que limitan el ángulo. La bisectriz es la mediatriz de los puntos A y B.

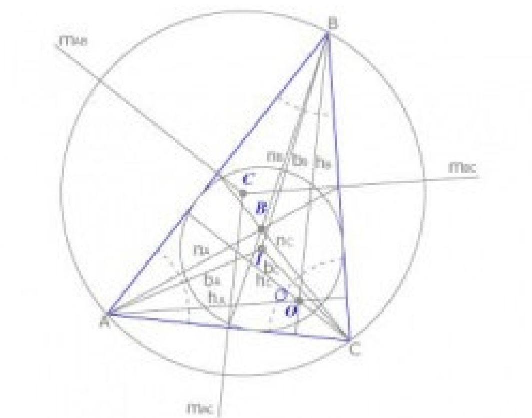
Recta Perpendicular: Dados la recta m y el punto P, vemos cómo trazar la recta l tal que sea perpendicular a m y que pase por el punto P.

Se traza una circunferencia con centro en P que corte a m en los puntos A y B. La mediatriz entre A y B es la recta buscada.



Rectas y puntos notables de un triángulo. Un triángulo, en geometría, es un polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos (que no se encuentran alineados). Los puntos de intersección de las rectas son los vértices y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. En los triángulos se puede denotar un grupo de rectas y puntos muy importantes. Entre las rectas notables más conocidas de un triángulo se pueden nombrar las mediatrices, las medianas, las alturas y las bisectrices; cada una de estas rectas notables determina cierto punto notable: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, respectivamente.

Rectas y puntos notables de un triángulo



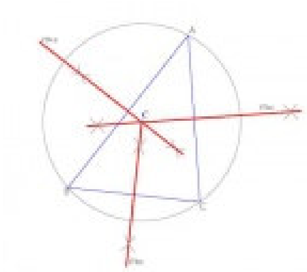
Campo al que pertenece	Matemática

Mediatriz

Contenido

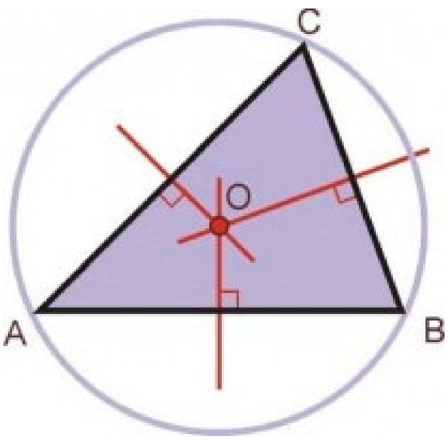
[mostrar]

Mediatriz: Conjunto de puntos del plano que equidistan de los puntos extremos de un segmento. Como consecuencia la mediatriz biseca perpendicularmente al segmento. En un triángulo, las tres mediatrices de sus lados concurren en un punto que equidista de los vértices del triángulo. El punto en el que se cortan las mediatrices de un triángulo, se conoce como circuncentro, o sea, el centro de lacircunferencia circunscrita al triángulo de referencia. Al radio de la circunferencia circunscrita se le suele llamar circunradio y es la distancia desde el circuncentro a los vértices del triángulo. Obviando el rigor de la definición de círculo, a la circunferencia circunscrita se le llama también circuncírculo (para abreviar).



mediatríz

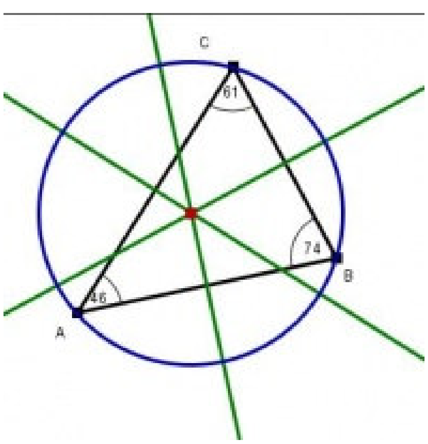
- En el triángulo ABC las mediatrices MAC, MBC y MAB se intersecan en el punto C que costituye el circucentro del triángulo o centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.



Mediatrices de un triángulo rectángulo

Mediatrices de un triángulo obtusángulo

- En el caso de los triángulos obtusángulos, el circuncentro es un punto ubicado fuera del triángulo.



Mediatrices de un triángulo obtusángulo

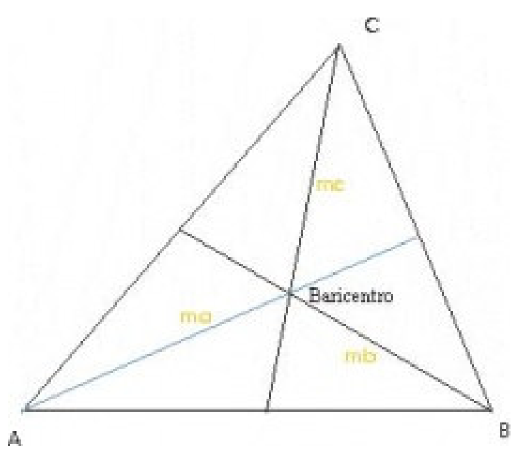
Meditrices de un triángulo rectángulo

- En el caso de los triángulos rectángulos, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa

Mediana

Mediana:

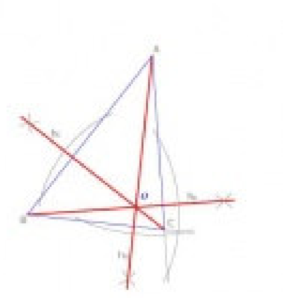
- La mediana es el segmento de recta que se traza desde un vértice de un triángulo al punto medio de su lado opuesto.
- Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto.
- El punto donde se cortan la medianas de un triángulo se conoce como baricentro, centroide o centro de gravedad y tiene una propiedad física muy importante: Si colocamos un eje a través de él y dejamos libre el triángulo, este no se mueve por acción de la aceleración de la gravedad, es por ello que el baricentro se llama centro de gravedad del triángulo.
- Las medianas se cortan siempre en un punto interior al triángulo.
- El baricentro divide a cada mediana en la razón 2:1. Esto es, la longitud del segmento de mediana medida desde el vértice al baricentro es el doble que desde el baricentro al punto medio del lado en cuestión.
- Cada mediana de un triángulo, lo divide en dos triángulos de igual área.



Mediana

Las Alturas

- Se llama altura de un triángulo al segmento de perpendicular trazada por un vértice del triángulo y comprendido entre ese vértice y su lado opuesto.
- Las alturas de un triángulo concurren en un punto denominado ortocentro del triángulo.
- El ortocentro de un triángulo acutángulo es un punto interior deltriángulo.

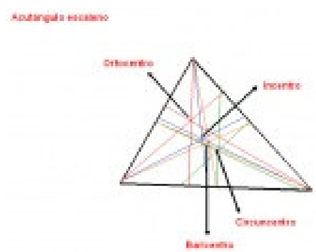


El ortocentro en un triangulo obtusángulo

- En el caso de un triángulo obtusángulo, el ortocentro es un punto exterior al triángulo.

Archivo:Ortocentro obtusangulo.JPG

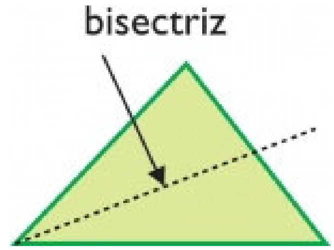
- En el caso del triángulo rectángulo vemos que el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.



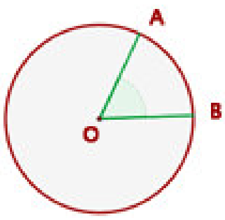
- Los pies de las alturas de un triángulo determinan un triángulo llamado: triángulo pedal u órtico del triángulo dado.

Las bisectrices

- Bisectriz de un ángulo: Es el conjunto de puntos del plano donde está contenido el ángulo que equidista de los lados del ángulo. Como consecuencia la bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos de igual amplitud.
- Todo ángulo tiene dos bisectrices, una interna y otra externa. Las bisectrices interna y externa de un ángulo son perpendiculares entre sí.
- Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto que equdista de los lados del triángulo, llamado incentro del triángulo o centro de la circunferencia inscrita en el triánguloysiempre es interior al triángulo. La equidistancia se llama inradio o radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.
- Cada bisectriz interna y las bisectrices de los otros dos ángulos externos del triángulo concurren en otros tres puntos que también equidistan de los lados (o sus prolongaciones) del triángulo. Estos puntos se llaman exincentros del triángulo y las circunferencias que determinan: circunferencias exinscritas del triángulo. Algunos autores las llaman circunferencias excritas o excírculos y a sus centros excentros.


bisectriz

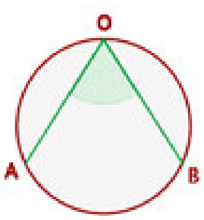
1 Ángulo central



El ángulo central tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.
La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

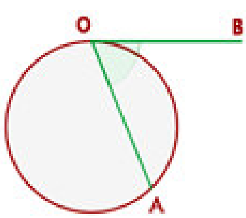
2 Ángulo inscrito



El ángulo inscrito tiene su vértice está en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

3 Ángulo semi-inscrito

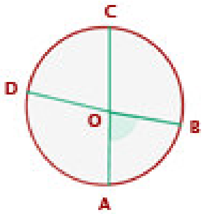


El vértice de ángulo semiinscrito está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella.
Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

4 Ángulo interior

Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella.

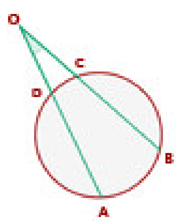


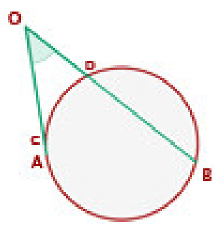
Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

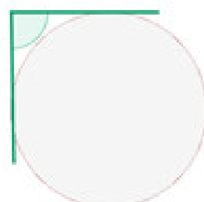
$$\overset{\frown}{A0B} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}\right)$$

5 Ángulo exterior

Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:







Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:

$$\overset{\frown}{A0B} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}\right)$$

1. Introducción

2. Poliedros

Los poliedros son cuerpos geométricos formados únicamente por figuras geométricas planas.

2.1. Regulares

Los poliedros regulares son aquellos cuyas caras son todas polígonos regulares de igual medida y con ángulos poliedros iguales. Asímismo, cumplen que haya esfera interior tangente a todas las caras, una esfera media o intersfera tangente a todas las aristas, y una circunsfera tangente a todos los vértices. Así es como los descubrió Platón, pero estos no son más que la familia de los poliedros convexos.

En 1972, el mateático Euler demostró que, la suma del número de caras y de vértices de un poliedro convexo, menos el número de aristas es siempre 2.

$$Caras + Vertices = Aristas + 2$$

De esto que se deduce que sólo hay cinco poliedros regulares convexos que cumplan esta regla [3]:

- Tetraedro
- Hexaedro
- Octaedro
- Dodecaedro

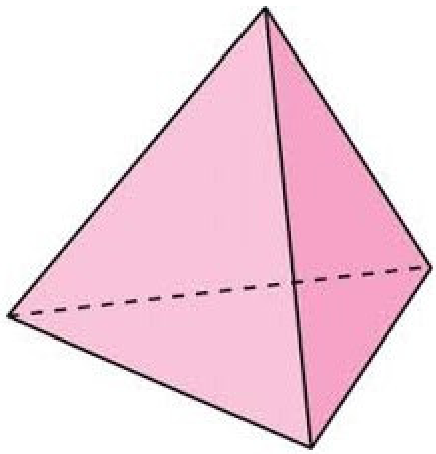
2.1.1. Tetraedro

El tetraedro es un poliedro regular de 4 caras, siendo cada una de ellas un triángulo equilátero [20]. Aparte de ser un poliedro regular, es uno de los 8 poliedros convexos denominados deltaedros, que son poliedros cuyas caras son triángulos equiláteros iguales[23]. Reciben este nombre por la letra griega delta ($\triangle$), cuya forma es la de un triángulo equilátero.

Características Características matemáticas de los tetraedros regulares [21] [22]:

- Vértices: 4
- Aristas: 6
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}$.
- Ángulos diédricos: 1.23 rad / 70º
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{3}$ rad / 60º
- Área de la superficie exterior: $\sqrt{3} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{3}}{12} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$

Curiosidades Para la escuela pitagórica el tetraedro representaba el elemento fuego, puesto qı pensaban que las partículas (átomos) del fuego tenían esta forma [22].



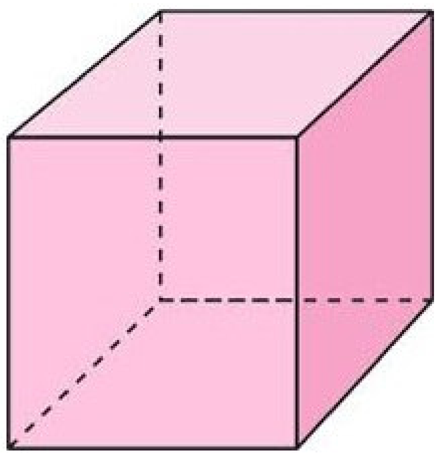
2.1.2. Hexaedro

El hexaedro es un polígono convexo de 6 caras [24]. Al ser convexo, sus caras deben tener forzosamente 5 lados como máximo. En esta sección nos centraremos en el hexaedro regular (más conocido como cubo), en el que sus lados tienen 4 caras y son cuadrados perfectos.

Características A continuación, se exponen las características de los hexaedros regulares [21]

- Vértices: 8
- Aristas: 12
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: 1
- Ángulos diédricos : $\frac{\pi}{2}$ / 90º
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{2}$ / 90º
- Área de la superficie exterior: $6 \cdot a^3$
- Volúmen: a^3
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{1}{2} \cdot a$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el hexaedro representa al elemento tierra [25].



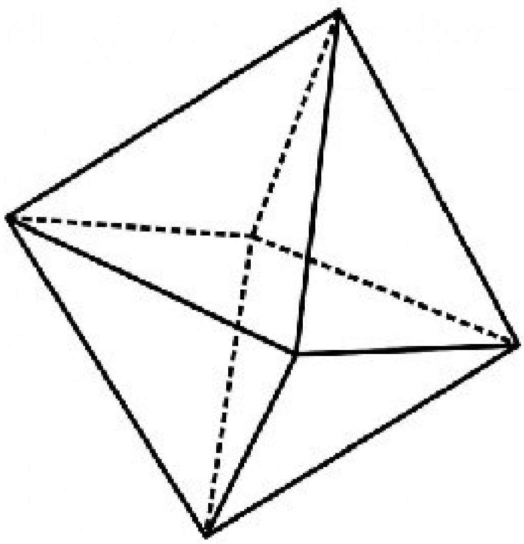
2.1.3. Octaedro

El octaedro es un poliedro de 8 caras que puede ser cóncavo o convexo y cuyas caras han de tener como máximo 7 lados. En el octaedro regular, que es el que vamos a estudiar, las caras están formadas por triángulos equiláteros [26]. Este poliedro también forma parte del grupo de poliedros deltaedros [23].

Características A continuación se exponen las características de los octaedros regulares [21].

- Vértices: 6
- Aristas: 12
- Aristas por vértice: 4
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}$
- Ángulos diédricos: 1.23 rad / 70.5°
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{3}$ / 60°
- Área de la superficie exterior: $2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot a$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el octaedro representaba al elemento aire [25].



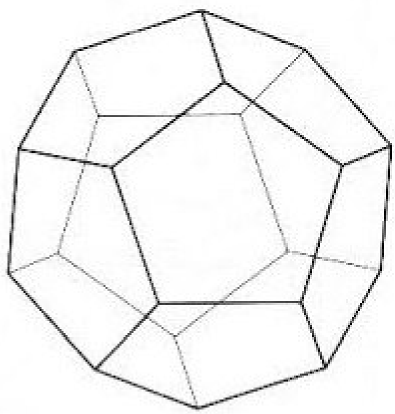
2.1.4. Dodecaedro

El dodecaedro es un poliedro de 12 caras, teniendo dichas caras que tener obligatoriamente 11 lados como máximo. En los dodecaedros regulares, el polígono que conforma las caras es un pentágono regular [27].

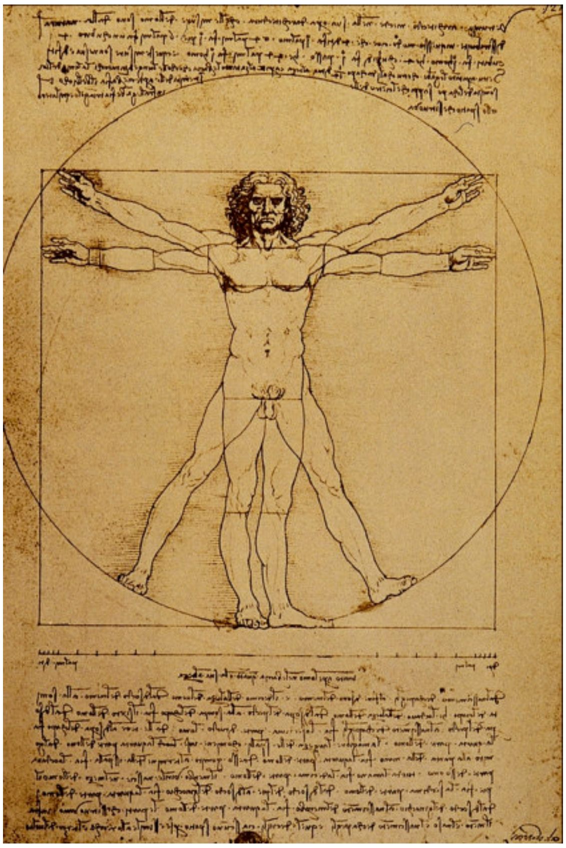
Características Características que posee el dodecaedro regular [21].

- Vértices: 20
- Aristas: 30
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}$
- Ángulos diédricos: 1.107 rad / 63,43° aprox.
- Ángulos planos: 108°
- Área de la superficie exterior: $3 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{15+7\cdot\sqrt{5}}}{4} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}}{20} \cdot a^3$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el dodecaedro representaba al Universo [25].



Simetría



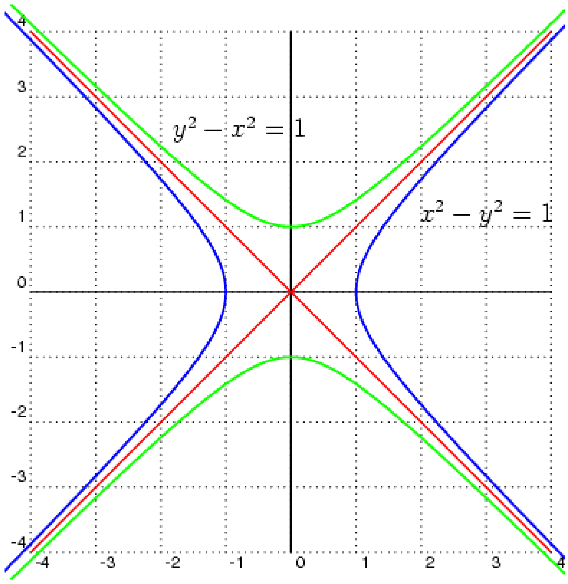
El Hombre de Vitruvio*, de* Leonardo da Vinci *(ca. 1487), es una representación muy citada de la simetría del cuerpo humano, y por extensión del mundo.*

La **simetría** (del griego σύν "con" y μέτρον "medida") es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones y otros objetos materiales, o entidades abstractas, relacionada con su invariancia bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios.

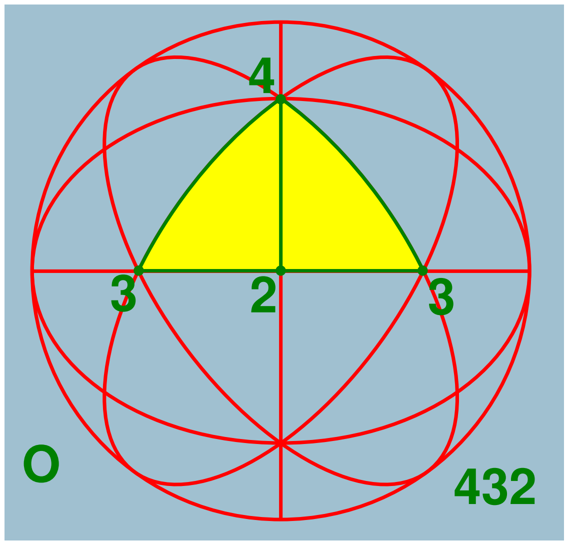
En condiciones formales, un objeto es *simétrico* en lo que concierne a una operación matemática dada si el resultado de aplicar esa operación o transformación al objeto, el resultado es un objeto indistinguible en su aspecto del objeto original. Dos objetos son simétricos uno al otro en lo que concierne a un grupo dado de operaciones si uno es obtenido de otro por algunas operaciones (y viceversa). En la geometría 2D las clases principales de simetría de interés son las que conciernen a las isometrías de un espacio euclídeo: traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones que se deslizan. Además de simetrías geométricas existen simetrías abstractas relacionadas con operaciones abstractas como la permutación de partes de un objeto.

La simetría también se encuentra en organismos vivos.

1 Simetría en geometría



Gráfica de dos hipérbolas y sus asíntotas en el plano cartesiano.



Grupo de simetría de la esfera.

Cuando hablamos de objetos físicos o elementos geométricos el concepto de simetría está asociado a transformaciones geométricas tales como las rotaciones, las reflexiones o las traslaciones. Dos simetrías sencillas son la simetría axial y la simetría central. Así se dice que un objeto presenta:

- **Simetría esférica** si existe simetría bajo algún grupo de rotaciones, matemáticamente equivale a que el grupo de simetría de un objeto físico o entidad matemática sea SO(3).
- **Simetría cilíndrica** o simetría axial si existe un eje tal que los giros alrededor de él no conducen a cambios de posición en el espacio, matemáticamente está asociado a un grupo de isometría SO(2).
- **Simetría reflectiva** o simetría especular que se caracteriza por la existencia de un único plano, matemáticamente está asociado al grupo SO(1) o su representación equivalente $\mathbb{Z}_2$. En dos dimensiones tiene un eje de simetría y en tres dimensiones tiene un plano. El eje de simetría de una figura bidimensional es una línea, si se construye una perpendicular, cualquier punto que reposee en esta perpendicular a la misma distancia del eje de simetría son idénticos. Otra manera de verlo es que si la forma se doblara por la mitad sobre el eje, las dos mitades serían iguales. Por ejemplo, un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, ya que hay cuatro formas diferentes de doblarlo haciendo que sus bordes coincidan. Un círculo tendría infinitos ejes de simetría por la misma razón.
- **Simetría traslacional** se da cuando la transformación $T_a(p) = p + a$ deja invariable a un objeto bajo un grupo de traslaciones discretas o continuas. El grupo es discreto si la invariancia sólo se da para un número numerable de valores de *a* y continuo si la invariancia se presenta para un conjunto infinito no numerable de valores de *a* en caso contrario.

Algunos tipos de simetría que combinan dos o más de los anteriores tipos son:

- **Simetría antitraslacional** que implica una reflexión en una línea o plano combinado con una traslación a lo largo de ese mismo eje. El grupo de simetría es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^n$.
- **Simetría de rotorreflexión** o simetría de rotación impropia, implica rotación al rededor de un eje combinado con reflexión en un eje perpendicular al de rotación.
- **Simetría helicoidal** implica un movimiento de rotación en torno a un eje dado con un movimiento de traslación a lo largo de ese mismo eje. Puede ser de tres clases:
    1. Simetría helicoidal infinita
    2. Simetría helicoidal de *n*-ejes
    3. Simetría helicoidal que no se repite

2 Simetría en dibujo

En dibujo existen cinco simetrías importantes que son simetría de traslación, rotación, ampliación, bilateral, abatimiento.

- **Simetría de traslación** o **invariancia traslacional**, es la repetición de una forma a lo largo de una línea en cualquier posición, vertical, horizontal, diagonal o curva, que se desplaza a cualquier distancia constante sobre el eje.
- **Simetría de rotación** giro de un motivo que se repite cierto número de veces hasta ser idéntico al inicio, tiene determinado orden en la rotación (15º, 30º, 45º, 60º, 90º, hasta 360º). La forma gira en torno a un centro que puede estar dentro de la misma.
- **Simetría de ampliación**, las partes de el son semejantes, pues tienen la misma forma pero no el mismo tamaño, ya que se extiende del centro hacia afuera para ser cada vez mayor.
- **Simetría de abatimiento** El eje de giro nos muestra dos partes idénticas con un giro de 180º una en relación a la otra.
- **Simetría bilateral** Un retrato bilateral, esta compuesto por formas iguales a igual distancia a ambos lados de un eje. Todo eso dentro de un eje de simetría.

3 Simetría en física

En física el concepto de simetría puede formularse en una forma no geométrica. Si *K* es un conjunto de objetos matemáticos del mismo tipo (funciones, formas geométricas, ecuaciones, ...) que representan algunas propiedades de un sistema físico y *G* es un grupo de transformaciones que actúa sobre *K* de tal manera que:

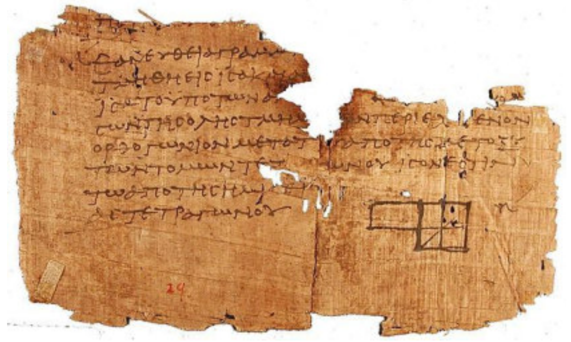
$$g(\in G) : K \to K$$

Se dice que un elemento de k_0 presenta simetría si:[1]

$$\forall g \in G : g(k_0) = k_0$$

Así por ejemplo varias leyes de conservación de la **física** son consecuencia de la existencia de **simetrías abstractas** del lagrangiano, tal como muestra el teorema de Noether. En ese caso *K* representaría el conjunto de lagrangianos admisibles, k_0 el lagrangiano del sistema bajo estudio y G puede representar traslaciones espaciales (conservación del momento lineal), traslaciones temporales (conservación de la energía), rotaciones (conservación del momento angular) u otro tipo de simetrías abstractas (conservación de la carga eléctrica, el número leptónico, la paridad, etc.)

Demostración matemática



Uno de los fragmentos sobrevivientes más antiguos de Elementos *de Euclides, un libro de texto utilizado durante miles de años para enseñar técnicas de demostración de escritura. El diagrama acompaña el Libro II, Proposición 5.1.*[1]

En matemáticas, una **demostración matemática** o **prueba** es un argumento deductivo para una afirmación matemática. En la argumentación se pueden usar otras afirmaciones previamente establecidas, tales como teoremas. En principio una demostración se puede rastrear hasta afirmaciones generalmente aceptadas, conocidas como axiomas. [2][3] Las demostraciones son ejemplos de razonamiento deductivo y se distinguen de argumentos inductivos o empíricos; una demostración debe demostrar que una afirmación es siempre verdadera (ocasionalmente al listar todos los casos posibles y mostrar que es válida en cada uno), más que enumerar muchos casos confirmatorios. Una afirmación no probada que se cree verdadera se conoce como conjetura.

Las demostraciones emplean lógica pero normalmente incluyen una buena parte de lenguaje natural, el cual usualmente admite alguna ambigüedad. De hecho, la gran mayoría de las demostraciones en las matemáticas escritas puede ser considerada como aplicaciones de lógica informal rigurosa. Las demostraciones puramente formales, escritas en lenguaje simbólico en lugar de lenguaje natural, se consideran en teoría de la demostración. La distinción entre demostraciones formales e informales ha llevado a examinar la lógica matemática histórica y actual, el cuasi-empirismo matemático y el formalismo matemático. La filosofía de las matemáticas concierne al rol del lenguaje y la lógica en las demostraciones, y en las matemáticas como lenguaje.

El hecho de no conocer ninguna demostración de un teorema no implica su no veracidad; sólo la demostración de la negación de este resultado implica que es falso.

1 Etimología e historia

La palabra «prueba» viene del latín *probare*, que significa 'probar'. Palabras modernas relacionadas son las palabras españolas «probar» ('degustar', 'oler' o 'ensayar'), «probidad», «probo» (o «proba») y «probabilidad»,[4] la palabra alemana *probieren* ('intentar'), la italiana *probare* ('intentar') y las palabras inglesas *probe* y *probation*. El uso temprano del término inglés *probity* ('probidad') significaba 'presentación de evidencia legal'. Una persona de autoridad —que en general era cualquier persona con mucho dinero— se decía que era una persona «proba», y su evidencia pesaba más que cualquier otro testimonio o demostración empírica.[5]

Los argumentos de plausibilidad que usaban recursos heurísticos tales como imágenes y analogías precedieron a la demostración matemática estricta.[6] Es probable que la idea de demostrar una conclusión se mostrara primero en conexión con la geometría, la cual originalmente significaba 'medida de la tierra' o agrimensura.[7] El desarrollo de la demostración matemática es el producto primario de la matemática Griega antigua, y uno de sus más grandes logros. Tales de Mileto (624-546 a. C.) demostró algunos teoremas en geometría. Eudoxo (408-355 a. C.) y Teeteto (417-369 a. C.) formularon teoremas pero no los demostraron. Aristóteles (384-322 a. C.) dijo que las definiciones debían describir el concepto a definir en términos de otros conceptos ya conocidos. Las demostraciones en matemáticas fueron revolucionadas por Euclides (300 a. C.), quien introdujo el método axiomático que aun se usa en la actualidad, empezando con términos indefinidos y axiomas (proposiciones concernientes a los términos indefinidos asumidas como evidentemente ciertas, vienen del griego *axios*, que significa 'valioso'), y usaba estos para probar teoremas usando lógica deductiva. Su libro, los elementos, fue leído por cualquiera que se considerara educado en el occidente hasta mediados del siglo XX.[8] En adición a los teoremas familiares en geometría, tales como el teorema de Pitágoras, los elementos incluyen una demostración de que la raíz cuadrada de dos es irracional y de que hay infinitos números primos.

Avances posteriores tomaron lugar en las matemáticas medievales Islámicas. Mientras que las demostraciones Griegas tempranas eran sobre todo demostraciones geométricas, el desarrollo del aritmética y el álgebra por los matemáticos Islámicos permitió demostraciones más generales que no dependían de la geometría. En el siglo X d. C., el matemático iraquí Al-Hashim dio a proveer demostraciones generales para números (más que demostraciones geométricas) al considerar multiplicación y división entre otros «por líneas». Usaba este método para proveer una demostración de la existencia de números irracionales. [9]

Una demostración inductiva para secuencias aritméticas fue introducida en el Al-Fakhri (1000 d. C.) por Al-Karaji, quien la usó para probar el teorema del binomio y propiedades del triángulo de Pascal. Alhazen también desarrolló el método de demostración por contradicción, como el primer intento de probar el postulado euclidiano de las paralelas.[10]

La teoría moderna de demostraciones trata a las demostraciones como estructuras de datos definidas inductivamente. Ya no se tiene se asume que los axiomas son «ciertos» en ningún sentido; esto permite que se creen teorías matemáticas paralelas en conjuntos alternos de axiomas (véase Teoría axiomática de conjuntos y geometría no euclidiana como ejemplos).

2 Naturaleza y Propósito

Como se había dicho, una demostración se escribe en lenguaje natural, siendo esta un argumento riguroso con propósito de convencer a la audiencia de la veracidad de una afirmación o definición. El rigor estándar no es absoluto y ha variado a través de la historia. Una demostración puede ser presentada en formas diferentes dependiendo de la audiencia esperada. En orden de ganar aceptación, una demostración tiene que cumplir parámetros comunes de rigor; un argumento considerado vago o incompleto ha de ser rechazado.

El concepto de una demostración se formaliza en el campo de la lógica matemática.[11] Una demostración formal se escribe en lenguaje formal en vez de lenguaje natural. Una demostración formal se define como una secuencia de formulas en un lenguaje formal en la cual cada fórmula es una consecuencia lógica de las precedentes. Tener una definición de demostración formal hace el concepto de demostración ameno de estudiar. De hecho, el campo de teoría de demostraciones estudia las demostraciones formales y sus propiedades, por ejemplo, la propiedad de una afirmación de tener una demostración formal. Una aplicación de la teoría de demostraciones es la de mostrar que ciertas afirmaciones indecidibles no pueden tener demostración.

Se supone que la definición de demostración formal está para capturar el concepto de la demostración tal como se escribe en la práctica de la matemática. La sonoridad de esta definición descansa en la creencia de que una demostración publicada puede, en principio, ser convertida en una demostración formal. De todos modos, fuera del campo de los asistentes automáticos para demostraciones, esto se hace raramente en la práctica. Una pregunta clásica de la filosofía pregunta si las demostraciones matemáticas son analíticas o sintéticas. Kant, quien introdujo la distinción entre analíticos y sintéticos, creía que las demostraciones en matemáticas son sintéticas.

Las demostraciones pueden ser vistas como objetos estéticos, admiradas por su belleza matemática. El matemático Paul Erdős describió las demostraciones que consideraba particularmente elegantes como venidas de *El Libro*, un texto hipotético que supuestamente contiene los métodos más hermosos de probar cada teorema. El ensayo *Las demostraciones de «El libro»*, publicado en 2009, presenta 32 demostraciones que sus editores encuentran particularmente satisfactorias.

3 Métodos de demostración

Aunque en general no existe un procedimiento único de demostración de tesis, si existen diferentes tipos de demostraciones que son utilizados comúnmente en matemáticas:

- Demostración por contraposición (formalizado y utilizado en los silogismos por Aristóteles).
- Demostración por reducción al absurdo (formalizado y utilizado por Aristóteles) y, como caso particular, descenso infinito
- Inducción matemática
- Inducción fuerte

Por otra parte, a pesar del alto grado de intervención humana necesario para hacer una demostración, también existen técnicas computacionales que permiten hacer demostraciones automáticas, notablemente en el campo de la geometría euclidiana.

3.1 Demostración directa

En la demostración directa, la conclusión se establece al combinar lógicamente los axiomas, definiciones, y teoremas previos. [12] Por ejemplo, la demostración directa puede ser usada para establecer que la suma de dos enteros pares es siempre par:

> Considere dos enteros pares x e y. Como son pares, pueden ser escritos como $x = 2a$ e $y = 2b$, respectivamente, para enteros a y b. Luego la suma $x + y = 2a + 2b = 2(a+b)$. Por lo tanto $x+y$ tiene un factor de 2 y, por definición, es par. Por lo tanto la suma de dos enteros pares es par.

Esta demostración usa la definición de enteros pares, las propiedades de los enteros para la clausura bajo la adición y la multiplicación, y la distributividad.

3.2 Demostración por inducción matemática

La inducción matemática no es una forma de razonamiento inductivo. En una demostración por inducción matemática se demuestra un único «caso base» y también una «regla de inducción», la cual establece que un cierto caso implica el siguiente. Aplicando la regla de inducción repetidamente, empezando del caso base independientemente probado, demostración muchos, a veces infinitos en número, otros casos.[13] Como el caso base es verdadero, el infinito de los otros casos debe también serlo, incluso si todos ellos no pueden ser probados directamente dada su infinitud. Un subconjunto de inducción es infinitamente descendiente. El descenso infinito puede ser usado para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos.

Una aplicación común de la inducción matemática es la de probar que una propiedad conocida por mantenerse para un número se mantiene se mantiene para todos los naturales:[14]

> Sea N = {1,2,3,4,...} el conjunto de los números naturales,y P(n) la afirmación matemática que involucra al número natural n que pertenece a N tal que:
>
> - ***(i)*** P(1) es verdadero, p.e., P(n) es verdadero para n = 1.
> - ***(ii)*** P(n+1) es verdadero donde sea que P(n) sea verdadero, p.e., P(n) es verdadero implica que P(n+1) es verdadero.
> - Por lo tanto P(n) es verdadero para todos los números naturales n.
>
> Por ejemplo, podemos probar por inducción que todos los enteros de la forma 2n + 1 son impares:
>
> - ***(i)*** Para n = 1, 2n + 1 = 2(1) + 1 = 3, y 3 es impar. Luego P(1) es verdadero.
> - ***(ii)*** Para 2n + 1 para algún n, 2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2. Si 2n + 1 es impar, luego (2n+1) + 2 debe ser impar, porque añadir 2 a un número impar da un número impar. Así que P(n+1) es verdadero si P(n) es verdadero.
>
> Por lo tanto 2n + 1 es impar, para todos los números naturales n.

Es común decir «demostración por inducción» en vez de «demostración por inducción matemática».[15]

3.3 Demostración por contraposición

La demostración por contraposición infiere la conclusión «si el evento *p* implica el evento *q*, entonces no evento *q* implica no evento *p* », o, matemáticamente: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (no\ q \Rightarrow no\ p)$ La afirmación "si no *q* entonces no *p*" se llama el contrapuesto de la afirmación de "si *p* entonces *q*".

Un ejemplo lógico no matemático puede ser el siguiente: Imaginemos que un restaurante ofrece en su menú paella todos los jueves. Es decir, el evento "jueves" implica el evento "paella". Puede ser que vayamos un lunes y haya paella. O puede ser que vayamos un martes y no la haya. Pero lo que sabemos seguro es que todos los jueves hay paella. De todas las posibles conclusiones lógicas que se derivan de la anterior afirmación, sólo una de ellas es cierta: que si vamos un día y no hay paella, entonces seguro que no es jueves. O dicho de otro modo, "no paella" implica "no jueves".

Un ejemplo matemático: la contraposición se puede usar para establecer que si a^2 es impar, entonces a es impar. Es evidente que a par implica a^2 par (si multiplicamos un número par por él mismo, obtenemos otro número par). Por lo tanto, podemos afirmar que si a^2 no es par, entonces a tampoco lo es. O dicho de otro modo, si a^2 es impar, entonces a es impar.

3.4 Demostración por contradicción

En la demostración por contradicción (también conocida como *reductio ad absurdum*, que significa 'por reducción al absurdo' en latín), se muestra que si cierta afirmación es verdadera, ocurre una contradicción lógica, por tanto esa afirmación es falsa. Un ejemplo famoso de demostración por contradicción muestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional:

> Supongase que $\sqrt{2}$ es un número racional, así por definición $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son dos enteros diferentes de cero sin factores comunes. Por tanto, $\sqrt{2}b = a$. Elevando al cuadrado ambos lados se tiene que $2b^2 = a^2$. Como 2 divide el lado izquierdo, 2 debe dividir al lado derecho (pues son iguales ambos enteros). así a^2 es par, lo cual implica que a debe ser también par. Así que podemos escribir $a = 2c$, donde c también es entero. Substituyendo en la ecuación original tenemos $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$. Dividiendo a ambos lados por 2 tenemos $b^2 = 2c^2$. Pero entonces, por el mismo argumento de antes, 2 divide a b^2 , entonces b debe ser par. De todas maneras, si a y b son ambos enteros, comparten un factor, que es 2. Esto contradice nuestra asunción, así que nos vemos forzados a concluir que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

3.5 Demostración constructiva o por construcción

La Demostración por construcción, o demostración por ejemplo, es la construcción de un ejemplo concreto con una propiedad específica para mostrar que algo que posea esa propiedad existe. Joseph Liouville, por ejemplo, probó la existencia de los números trascendentes construyendo un ejemplo explicito. También puede ser usado para construir un contraejemplo para probar negativamente una proposición de que todos los elementos tienen una cierta propiedad.

3.6 Demostración por exhaustividad

En la demostración por exhaustividad, la conclusión se establece al dividirla en un número finito de casos y probarlos cada uno por separado. El número de casos a veces puede ser muy grande. Por ejemplo, la primera demostración del teorema de los cuatro colores fue una demostración por exhaustividad con 1936 casos. Esta demostración fue controvertida pues la mayoría de los casos fueron verificados con un programa de computador y no a mano. La demostración conocida más corta del teorema de los cuatro colores fue de 2011 y todavía tiene más de 600 casos.

3.7 Demostración probabilística

Una demostración probabilística es una en la cual se muestra que un ejemplo existe, con certeza, usando métodos de la teoría de probabilidad. Esto no se debe confundir con un argumento de que un teorema es 'probablemente' cierto. Este tipo de razonamiento puede ser llamado un «argumento de plausibilidad» y no conlleva una demostración. En el caso de la conjetura de Collatz está claro que tan lejos está eso de ser una demostración genuina.[16] La demostración probabilística, como la demostración por construcción, es una de las muchas formas de demostrar teoremas de existencia.

3.8 Demostración por combinatoria

Una demostración por combinatoria establece la equivalencia de expresiones diferentes al mostrar que cuentan para el mismo objeto en formas diferentes. A menudo se usa una biyección entre dos conjuntos para mostrar que las expresiones para sus dos tamaños son iguales. Alternativamente, un argumento de doble conteo provee dos expresiones diferentes para el tamaño de un solo conjunto, mostrando nuevamente que las dos expresiones son iguales.

3.9 Demostración no constructiva

Una demostración no constructiva establece que un objeto matemático con una cierta propiedad existe sin explicar como tal objeto se puede encontrar. A menudo, estas toman la forma de una demostración por contradicción en la cual la no existencia de el objeto se demostración imposible. En contraste, una demostración constructiva establece que un objeto particular existe al proveer un método para encontrarlo.

Un ejemplo famoso de demostración no-constructiva muestra que existen dos números irracionales a y b tal que a^b es un número racional:

> O bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es un número racional y acabamos (tomese $a = b = \sqrt{2}$), o $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional por lo que podemos escribir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$. Esto produce $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, lo cual es un por tanto racional de la forma a^b .

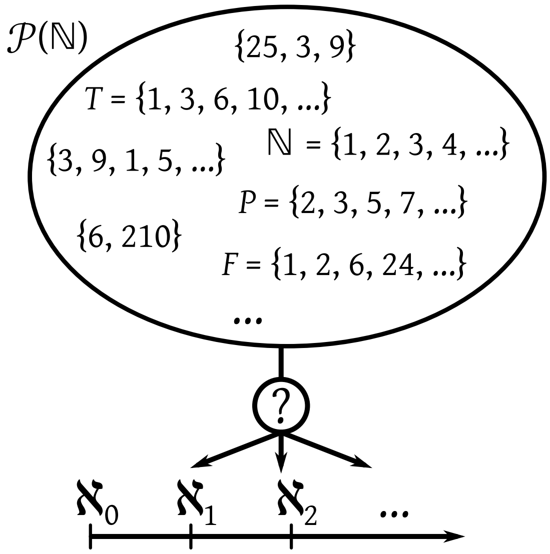
3.10 Pruebas estadísticas en matemáticas puras

La expresión «demostración estadística» puede ser usada técnica o coloquialmente en áreas de matemáticas puras, tales como las que involucran criptografía, series caóticas y teoría de números probabilística o analítica.[17][18][19] No es tan comúnmente usada para referirse a una demostración matemática en el área de las matemáticas conocida como estadística matemática. Véase también la sección inferior de «demostración estadística con el uso de datos».

3.11 Pruebas asistidas por computador

Hasta el siglo XX se asumía que cualquier demostración debía, en principio, ser revisada por un matemático competente para confirmar su validez.[6] De todas formas, los ordenadores se usan ahora para probar teoremas y para hacer cálculos que para un humano o grupo de ellos serían muy largos de revisar; La primera demostración del teorema de los cuatro colores es un ejemplo de una demostración asistida por ordenador. Algunos matemáticos están preocupados de que la posibilidad de un error en un programa de computador o un error de ejecución en sus cálculos pueda afectar la validez de tales demostraciones asistidas por computador. En la práctica las posibilidades de un error que invalide una demostración asistida por computador pueden reducirse al incorporar redundancia y auto-revisiones en los cálculos, y al desarrollar enfoques y programas múltiples e independientes. Los errores tampoco podrán ser totalmente superados en caso de la verificación humana de una demostración, especialmente si

Teoría de conjuntos



Hipótesis del continuo. *La colección de todos los conjuntos de números naturales* P(***N***) *tiene la llamada* potencia del continuo*: tantos elementos como (por ejemplo) puntos en una recta. Su estudio es uno de los principales problemas en la teoría de conjuntos.*

La **teoría de conjuntos** es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática.[1]

Sin embargo, la teoría de los conjuntos es lo suficientemente rica como para construir el resto de objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas, ...; y junto con la lógica permite estudiar los fundamentos de esta. En la actualidad se acepta que el conjunto de axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel es suficiente para desarrollar toda la matemática.

Además, la propia teoría de conjuntos es objeto de estudio *per se*, no sólo como herramienta auxiliar, en particular las propiedades y relaciones de los conjuntos infinitos. En esta disciplina es habitual que se presenten casos de propiedades indemostrables o contradictorias, como la hipótesis del continuo o la existencia de un cardinal inaccesible. Por esta razón, sus razonamientos y técnicas se apoyan en gran medida en la lógica matemática.

El desarrollo histórico de la teoría de conjuntos se atribuye a Georg Cantor, que comenzó a investigar cuestiones conjuntistas «puras» del infinito en la segunda mitad del siglo XIX, precedido por algunas ideas de Bernhard Bolzano e influenciado por Richard Dedekind. El descubrimiento de las paradojas de la teoría cantoriana, de conjuntos, formalizada por Gottlob Frege, propició los trabajos de Bertrand Russell, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel y otros a principios del siglo XX.

1 Teoría básica de conjuntos

La teoría de conjuntos más elemental es una de las herramientas básicas del lenguaje matemático. Dados unos *elementos*, unos objetos matemáticos como números o polígonos por ejemplo, puede imaginarse una colección determinada de estos objetos, un conjunto. Cada uno de estos elementos pertenecen al conjunto, y esta noción de pertenencia es la relación relativa a conjuntos más básica. Los propios conjuntos pueden imaginarse a su vez como elementos de otros conjuntos. La pertenencia de un elemento a a un conjunto A se indica como $a \in A$.

Una relación entre conjuntos derivada de la relación de pertenencia es la relación de inclusión. Una subcolección de elementos B de un conjunto dado A es un subconjunto de A, y se indica como $B \subseteq A$.

Ejemplos.

- Los conjuntos numéricos usuales en matemáticas son: el conjunto de los números naturales **N**, el de los números enteros **Z**, el de los números racionales **Q**, el de los números reales **R** y el de los números complejos **C**. Cada uno es subconjunto del siguiente:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- El espacio tridimensional E_3 es un conjunto de objetos elementales denominados *puntos* p, $p \in E_3$. Las rectas r y planos α son conjuntos de puntos a su vez, y en particular son subconjuntos de E_3, $r \subseteq E_3$ y $\alpha \subseteq E_3$.

1.1 Álgebra de conjuntos

Existen unas operaciones básicas que permiten manipular los conjuntos y sus elementos, similares a las operaciones aritméticas, constituyendo el álgebra de conjuntos:

- **Unión.** La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ que contiene cada elemento que está por lo menos en uno de ellos.
- **Intersección.** La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ que contiene todos los elementos comunes de A y B.
- **Diferencia.** La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A \setminus B$ que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.
- **Complemento.** El complemento de un conjunto A es el conjunto $A^{\complement}$ que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A.
- **Diferencia simétrica** La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \Delta B$ con todos los elementos que pertenecen, o bien a A, o bien a B, pero no a ambos a la vez.
- **Producto cartesiano.** El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ que contiene todos los pares ordenados (a, b) cuyo primer elemento a pertenece a A y su segundo elemento b pertenece a B.

2 Teoría axiomática de conjuntos

La teoría informal de conjuntos apela a la intuición para determinar cómo se comportan los conjuntos. Sin embargo, es sencillo plantear cuestiones acerca de las propiedades de estos que llevan a contradicción si se razona de esta manera, como la famosa paradoja de Russell. Históricamente ésta fue una de las razones para el desarrollo de las *teorías axiomáticas de conjuntos*, siendo otra el interés en determinar exactamente qué enunciados acerca de los conjuntos necesitan que se asuma el polémico axioma de elección para ser demostrados.

Las teorías axiomáticas de conjuntos son colecciones precisas de axiomas escogidos para poder derivar todas las propiedades de los conjuntos con el suficiente rigor matemático. Algunos ejemplos conocidos son:

- La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel
- La teoría de conjuntos de Neumann-Bernays-Gödel
- La teoría de conjuntos de Morse-Kelley

3 Véase también

- Álgebra de conjuntos
- Conjunto
- Teoría de grupos

4 Referencias

[1] Véase Devlin, Keith (2005). «3.1. Sets». *Sets, functions and logic* (en inglés). ISBN 1-58488-449-5. o Lipschutz, Seymour (1991). «Prólogo». *Teoría de conjuntos y temas afines*. McGraw-Hill. ISBN 968-422-926-7.

5 Bibliografía

- Ivorra, Carlos, *Lógica y teoría de conjuntos*, http://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf, consultado el 18-10-2010.
- Jech, Thomas. «Set Theory». *Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 edition)* (en inglés). Consultado el 16-12-2011.

6 Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Teoría de conjuntos**Commons.

PRINCIPIO DE LAS CASILLAS

El principio de conteo más útil es desde luego el más sencillo. Aquí lo presentamos y se basa en la siguiente idea, si hay tres canicas que se reparten entre dos niños, a un niño le tocan dos (quizás las tres, pues se admite que un niño puede quedar con cero canicas). Una primera versión de éste principio se puede enunciar de la siguiente manera:

"Si *(n + 1)* objetos se deben de acomodar en n casillas, en alguna de las casillas hay más de un objeto".

Este resultado se conoce como el Principio de las casillas, también es llamado el Principio de Dirichlet, o Principio de las palomas. Peter Dirichlet fue el primero en utilizarlo en teoría de números en el siglo XIX.

Su validez es evidente, pero si desea uno convencerse, piense qué pasaría si en cada casilla haya lo más un objeto, entonces tendríamos que en las casillas hay acomodados a lo más n objetos, lo que es una contradicción si consideramos que se han repartido los $n + 1$ objetos.

Veremos aquí varias formas de aplicar el principio de las casillas tanto en problemas de teoría de números, como de combinatoria y geometría. También presentaremos algunas generalizaciones.

La mayoría de las veces, este resultado ayuda a resolver problemas de existencia; de garantizar si dentro de una serie de hechos (finitos o infinitos) hay la certeza de que sucede alguna situación especial. Así el principio es una afirmación puramente existencial; sin embargo, no da indicaciones de cómo llegar a la situación especial que se pide.

Reconocer cómo y cuándo deberá usarse el principio requiere de cierta práctica que intentaremos dirigir en esta serie de ejercicios y problemas. Detectar quiénes serán los objetos y quiénes serán las casillas, es la parte central para utilizar el principio. Desde luego hay situaciones claras de quiénes son los objetos y quiénes las casillas, veamos algunos ejemplos.

En un grupo de tres personas hay dos del mismo sexo.
En un grupo de 13 *personas hay dos que nacieron el mismo mes.*
En un grupo de 366 *personas hay dos que tienen el mismo día de cumpleaños.*

En los tres casos los objetos son las personas y las casillas, evidentemente son, los dos sexos, los doce meses del año, y los 365 días del año respectivamente.

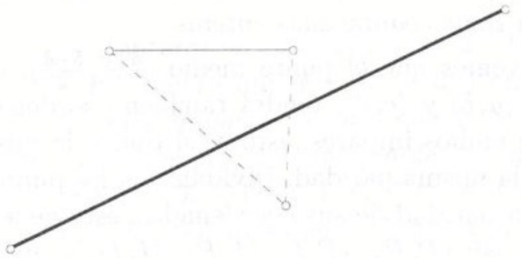
Otros ejemplos son:

EJEMPLO 1

Una línea no puede cortar internamente a los tres lados de un triángulo.

Solución:

Este ejemplo es el primero donde hay una primera dificultad: debemos decir quiénes son los objetos y quiénes son las casillas. Las casillas son los dos semi- planos que determina la línea, los objetos serán los vértices del triángulo. Observemos que si dos vértices del triángulo se encuentran en uno de los semiplanos, el segmento (lado del triángulo) que ellos determinan no será cortado por la línea.



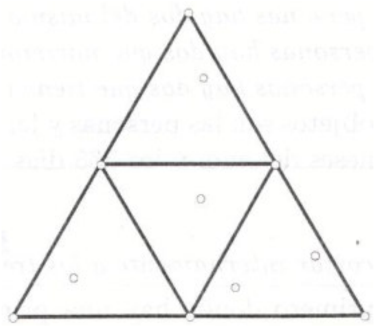
Pidamos primero que la línea no pase por alguno de los vértices del triángulo. Por el *Principio de las casillas* hay dos puntos en alguno de los semiplanos (quizás los tres), luego alguno de los lados no será cortado por la línea. Si la línea pasa por alguno de los vértices, esta podrá cortar a lo más a uno de los lados.

EJEMPLO2

De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triangulo equilátero de lado 2 hay dos cuya distancia entre ellos es menor o igual a 1.

Solución:

Aquí la situación es un poco más delicada. Aquí hay que crear las casillas; los objetos son los cinco puntos y buscamos dos de ellos a una distancia menor o igual que uno. Si dividimos en casillas de manera que: dos en una casilla garanticen que su distancia es menor o igual que uno, terminamos. Se sugiere entonces crear cuatro casillas, al dividir los lados del triángulo con sus puntos medios y al unir estos con segmentos de línea se forman cuatro triángulos congruentes de lado 1.



Por el *Principio de las casillas*, de los cinco puntos dados, hay dos puntos en alguno de los triángulos pequeños, estos dos puntos son los buscados.

EJEMPLO 3

De entre cinco puntos del plano con coordenadas enteros hay dos cuyo punto medio también tiene coordenadas enteros.

Primero observemos que el punto medio $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$, de dos puntos de coordenadas enteras *(a,b)* y *(c,d)*, tendrá también coordenadas enteras, si *a* y c *son* ambos pares o ambos impares, esto es si tienen la misma paridad, también b y *d* deben tener la misma paridad. Dividamos a los puntos de coordenadas enteras de acuerdo a la paridad de sus coordenadas, esto generará cuatro clases que re- Presentaremos así: *(P, P), (P, I), (1, P),* (1,1), Y que son las clases de puntos de coordenadas enteras donde sus coordenadas son las dos pares, la primera par y la segunda impar, la primera impar y la segunda par, y las dos coordenadas impares, respectivamente. Estas clases serán las casillas. Desde luego todo punto de coordenadas enteras pertenece a una de las casillas. Por el *Principio de las casillas* hay dos puntos de los cinco en la misma casilla, por lo que dos de los puntos tienen la primera coordenada de la misma paridad y tiene la segunda coordenada de la misma paridad, por tanto su punto medio será de coordenadas enteras.

Hemos señalado que el usar y explotar el *Principio de las casillas,* requiere cierta habilidad que la práctica va dando. Los problemas que presentamos aquí buscan eso, practicar.

EJEMPLO 4

5 palomas vuelan hacia un palomar de 4 agujeros, entonces en uno de los agujeros hay dos o mas palomas.
En general, si (n+1) palomas están en n agujeros, por lo menos uno de los agujeros contiene dos o mas palomas.

EJEMPLO 5

Selecciono medias de un cajón donde las hay de 3 colores distintos. Si imagino un "agujero" para cada color, entonces tengo 3 agujeros. Si las medias seleccionadas son 4, al menos uno de mis agujeros tiene dos o mas medias. Por lo tanto, si tomo 4 medias tendré un par del mismo color.

EJEMPLO 6
Si hay 13 palomas en 4 agujeros, por lo menor un agujero contiene 4 o mas palomas.

Ecuación

El primer uso del signo igualdad, la ecuación equivale a la notación moderna 14x+15=71, tomado de The Whetstone of Witte *de* Robert Recorde *(1557).*

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas *miembros*, en las que aparecen valores conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas.[nota 1] Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un *sistema*, o bien mediante otros procesos.[nota 2][*cita requerida*] Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación:

$$\overbrace{3x-1}^{\text{miembro primer}} = \overbrace{9+x}^{\text{miembro segundo}}$$

la variable x representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 1 y 9 son constantes conocidas. La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas; se puede afirmar entonces que una ecuación es una *igualdad condicional*, en la que sólo ciertos valores de las variables (incógnitas) la hacen cierta.

Se llama *solución* de una ecuación a cualquier valor individual de dichas variables que la satisfaga. Para el caso dado, la solución es:

$$x = 5$$

Resolver una ecuación es encontrar su *dominio solución*, que es el conjunto de valores de las incógnitas para los cuales la igualdad se cumple. Por lo general, los problemas matemáticos pueden expresarse en forma de una o más ecuaciones;[*cita requerida*] sin embargo no todas las ecuaciones tienen solución, ya que es posible que no exista ningún valor de la incógnita que haga cierta una igualdad dada. En ese caso, el conjunto de soluciones de la ecuación será vacío y se dice que la ecuación no es resoluble. De igual modo, puede tener un único valor, o varios, o incluso infinitos valores, siendo cada uno de ellos una solución *particular* de la ecuación. Si cualquier valor de la incógnita hace cumplir la igualdad (esto es, no existe ningún valor para el cual no se cumpla) la ecuación es en realidad una identidad.[nota 3]

1 Introducción

1.1 Uso de ecuaciones

La ciencia utiliza ecuaciones para enunciar de forma precisa leyes; estas ecuaciones expresan relaciones entre variables. Así, en física, la ecuación de la dinámica de Newton relaciona las variables fuerza F, aceleración a y masa m: F = ma. Los valores que son solución de la ecuación anterior cumplen la primera ley de la mecánica de Newton. Por ejemplo, si se considera una masa m = 1 kg y una aceleración a = 1 m/s, la única solución de la ecuación es F = 1 kg·m/s = 1 Newton, que es el único valor para la fuerza permitida por la ley.

Ejemplos:

- Ecuación de estado
- Ecuaciones de movimiento
- Ecuación constitutiva

El campo de aplicación de las ecuaciones es inmenso, y por ello hay una gran cantidad de investigadores dedicados a su estudio.

1.2 Tipos de ecuaciones

Las ecuaciones pueden clasificarse según el tipo de operaciones necesarias para definirlas y según el conjunto de números sobre el que se busca la solución. Entre los tipos más frecuentes están:

- Ecuaciones algebraicas
  - De primer grado o *lineales*
  - De segundo grado o *cuadráticas*
  - Diofánticas o diofantinas
  - Racionales, aquellas en las que uno o ambos miembros se expresan como un cociente de polinomios
- Ecuaciones trascendentes, cuando involucran funciones no polinómicas, como las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.
- Ecuaciones diferenciales
  - Ordinarias

  - En derivadas parciales
- Ecuaciones integrales
- Ecuaciones funcionales

2 Definición general

Dada una aplicación $f : A \to B$ y un elemento b del conjunto B , resolver una **ecuación** consiste en encontrar todos los elementos $x \in A$ que verifican la expresión: $f(x) = b$. Al elemento x se le llama incógnita. Una solución de la **ecuación** es cualquier elemento $a \in A$ que verifique $f(a) = b$.[*cita requerida*]

El estudio de las ecuaciones depende de las características de los conjuntos y la aplicación; por ejemplo, en el caso de las ecuaciones diferenciales, los elementos del conjunto A son funciones y la aplicación f debe incluir alguna de las derivadas del argumento. En las ecuaciones matriciales, la incógnita es una matriz.

La definición que se ha dado incluye las ecuaciones de la forma $g(x) = h(x)$. Si $+$ denota la suma de funciones, entonces $(B, +)$ es un grupo. Basta definir la aplicación $f(x) = g(x) - h(x)$, con $-h$ el inverso de h con respecto a la suma, para transformar la ecuación en $f(x) = 0$.

2.1 Conjunto de soluciones

Dada la ecuación $f(x) = b$, el conjunto de soluciones de la ecuación viene dado por $S = f^{-1}(b)$, donde f^{-1} es la imagen inversa de f . Si S es el conjunto vacío, la ecuación no es soluble; si tiene sólo un elemento, la ecuación tendrá solución única; y si S posee más de un elemento, todos ellos serán soluciones de la ecuación.

En la teoría de ecuaciones diferenciales, no se trata sólo de averiguar la expresión explícita de las soluciones, sino determinar si una ecuación determinada tiene solución y esta es única. Otro caso en los que se investiga la existencia y unicidad de soluciones es en los sistemas de ecuaciones lineales.

2.2 Casos particulares

Una ecuación diofántica es aquella cuya solución sólo puede ser un número entero, es decir, en este caso $A \subseteq \mathbb{Z}$. Una ecuación funcional es aquella en la que algunas de las constantes y variables que intervienen no son realmente números sino funciones; y si en la ecuación aparece algún operador diferencial se llama ecuación diferencial. Cuando A es un cuerpo y f un polinomio, se tiene ecuación algebraica polinómica.

En un sistema de ecuaciones lineales, el conjunto A es un conjunto de vectores reales y la función es un operador lineal.

2.3 Existencia de soluciones

En muchos casos, por ejemplo en las ecuaciones diferenciales, una de las cuestiones más importantes es determinar si existe alguna solución, es decir demostrar que el conjunto de soluciones no es el conjunto vacío. Uno de los métodos más corrientes para lograrlo consiste en aprovechar que el conjunto A tiene alguna topología. No es el único: en los sistemas de ecuaciones reales, se recurre a técnicas algebraicas para averiguar si el sistema tiene solución. No obstante, el álgebra parece que carece de recursos siquiera para asegurar la existencia de soluciones en las ecuaciones algebraicas: para asegurar que toda ecuación algebraica con coeficientes complejos tiene una solución hay que recurrir al análisis complejo y, por lo tanto, a la topología.

3 Ecuación algebraica

Una ecuación algebraica, polinómica o polinomial es una igualdad entre dos polinomios. Por ejemplo:

$$x^3y + 4x - y = 5 - 2xy$$

3.1 Definición

Se llama **ecuación algebraica** con una incógnita la ecuación que se reduce a lo que sigue

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0.$$

donde n es un número entero positivo; α_0, α_1, α_2, ...,α_{n-1}, αn se denominan *coeficientes* o *parámetros* de la ecuación y se toman dados; *x* se nombra **incógnita** y es buscada. El número n positivo se llama *grado* de la ecuación[1] Para definir un número algebraico se consideran como coeficientes, números racionales.

3.2 Forma canónica

Realizando una misma serie de transformaciones en ambos miembros de una ecuación, puede conseguirse que uno de ellos se reduzca a cero. Si además se ordenan los términos según los exponentes a los que se encuentran elevadas las incógnitas, de mayor a menor, se obtiene una expresión denominada *forma canónica* de la ecuación. Frecuentemente suele estudiarse las ecuaciones polinómicas a partir de su forma canónica, es decir aquella cuyo primer miembro es un polinomio y cuyo segundo miembro es cero.

En el ejemplo dado, sumando 2xy y restando 5 en ambos miembros, y luego ordenando, obtenemos:

$$x^3y + 2xy + 4x - y - 5 = 0$$

3.3 Grado

Se denomina *grado* de una ecuación polinomial al mayor exponente al que se encuentran elevadas las incógnitas. Por ejemplo

$$2x^3 - 5x^2 + 4x + 9 = 0$$

Es una ecuación de tercer grado porque la variable **x** se encuentra elevada *al cubo* en el mayor de los casos.

Las ecuaciones polinómicas de grado *n* de una sola variable sobre los números reales o complejos, pueden resolverse por el método de los radicales cuando $n < 5$ (ya que en esos casos el grupo de Galois asociado a las raíces de la ecuación es soluble). La solución de la ecuación de segundo grado es conocida desde la antigüedad; las ecuaciones de tercer y cuarto grado se conocen desde los siglos XV y XVI, y usan el método de radicales. La solución de la ecuación de quinto grado no puede hacerse mediante el método de radicales, aunque puede escribirse en términos de la función theta de Jacobi.

3.4 Ecuación de primer grado

Se dice que una ecuación algebraica es de primer grado cuando la incógnita (aquí representada por la letra x) está elevada a la potencia 1 (grado = 1), es decir que su exponente es 1.

Las ecuaciones de primer grado tienen la forma canónica:

$$ax + b = 0$$

donde a y b están en un conjunto numérico ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) con *a* diferente de cero.

Su solución es sencilla: $x = -b/a$. Exige la resolución, la existencia de inversos multiplicativos.

3.4.1 Resolución de ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones polinómicas de primer grado se resuelven en tres pasos: transposición, simplificación y despeje, desarrollados a continuación mediante un ejemplo.

Dada la ecuación:

$$9x - 9 + 108x - 6x - 92 = 16x + 28 + 396$$

Transposición Primero se agrupan todos los monomios que incluyen la incógnita **x** en uno de los miembros de la ecuación, normalmente en el izquierdo; y todos los términos independientes (los que no tienen *x* o la incógnita del problema) en el otro miembro. Esto puede hacerse teniendo en cuenta que:

En términos coloquiales, se dice que: *si un término está sumando* (como 16x en el miembro de la derecha) *pasa al otro lado restando* (−16x a la izquierda); y *si está restando* (como el −9 de la izquierda), *pasa al otro lado sumando* (+9 a la derecha)

La ecuación quedará entonces así:

$$9x + 108x - 6x - 16x = 28 + 396 + 9 + 92$$

Como puede verse, todos los términos que poseen la variable **x** han quedado en el primer miembro (a la izquierda del signo igual), y los que no la poseen, por ser sólo constantes numéricas, han quedado a la derecha.

Simplificación El siguiente paso es convertir la ecuación en otra equivalente más simple y corta. Si se efectúa la simplificación del primer miembro:

$$9x + 108x - 6x - 16x = (9 + 108 - 6 - 16)x = 95x$$

Y se simplifica el segundo miembro:

$$28 + 396 + 9 + 92 = 525$$

La ecuación simplificada será:

$$95x = 525$$

Despeje Ahora es cuando se llega al objetivo final: que la incógnita quede aislada en un miembro de la igualdad. Para lo cual se recuerda que:

En términos coloquiales: *Para despejar la x, si un número la está multiplicando* (Ej: 5x) *y no hay ningún otro término sumando o restando en ese mismo miembro, se pasa dicho número al otro lado dividiendo* (n/5) *sin cambiar su signo*. Y *si un número la está dividiendo* (Ej: x/2), entonces *se lo pasa al otro lado multiplicando* (n×2) *sin cambiar su signo*.

Al pasar el 5 dividiendo al otro lado, lo que estamos haciendo en realidad es dividir ambos miembros entre 5. Entonces, en el miembro donde estaba el 5 obtenemos 5/5, que se anula quedando sólo la x (decimos que el 5 que multiplicaba *desaparece* del primer miembro). En el otro lado, en cambio, el 5 que agregamos dividiendo no puede anularse (decimos que *aparece* dividiendo como si hubiera *pasado* de un lado a otro con la operación *convertida* en su inversa).[nota 4]

Volviendo al ejemplo, debemos entonces *pasar* el número 95 al otro miembro y, como estaba multiplicando, lo hará dividiendo, sin cambiar de signo:

$$x = 525/95$$

El ejercicio está teóricamente resuelto, ya que tenemos una igualdad en la que **x** equivale al número 525/95. Sin embargo, debemos simplificar.

Se puede resolver la fracción (numerador dividido entre denominador) si el resultado fuera exacto; pero como en este caso es decimal (525:95 = 5,52631578947) se simplifica y ésa es la solución:

$$x = 105/19$$

3.4.2 Ejemplo de problema

Pongamos el siguiente problema: el número de canicas que tengo, más tres, es igual al doble de las canicas que tengo, menos dos. ¿Cuántas canicas tengo? El primer paso para resolver este problema es expresar el enunciado como una **ecuación**:

$$x + 3 = 2x - 2$$

Donde x es la incógnita: ¿cuántas canicas tengo?

La ecuación se podría leer así: El número de canicas que tengo, más tres que me dan, es igual al doble de mis canicas, quitándome dos.

El enunciado está expresado, pero no podemos ver claramente cuál es el valor de x; para ello se sigue este procedimiento: Primero se pasan todos los términos que dependen de x al primer miembro y los términos independientes al segundo. Para ello tenemos en cuenta que cualquier término que se cambia de miembro cambia también de signo. Así obtenemos:

$$x - 2x = -2 - 3$$

Que, simplificado, resulta:

$$-x = -5$$

Esta expresión nos lleva a una regla muy importante del álgebra, que dice que si modificamos igualmente ambos miembros de una ecuación, el resultado es el mismo. Esto significa que podemos sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar y radicar los dos miembros de la ecuación por el mismo número, sin que ésta sufra cambios. En este caso, si multiplicamos ambos miembros por -1 obtendremos:

$$x = 5$$

El problema está resuelto.

3.5 Ecuación de segundo grado

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado tienen la forma canónica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a** es el coeficiente del *término cuadrático* (aquel en que la incógnita está elevada a la potencia 2), **b** es el coeficiente del *término lineal* (el que tiene la incógnita sin exponentes, o sea que está elevada a la potencia 1), y **c** es el *término independiente* (el que no depende de la variable, o sea que está compuesto sólo por constantes o números) Cuando esta ecuación se plantea sobre $\mathbb{C}$ siempre se tienen dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Obviamente la condición para que la ecuación tenga solución sobre los números reales $\mathbb{R}$ se requiere que $b^2 \geq 4ac$ y para que tenga soluciones sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ se requiere $b^2-4ac \in \mathbb{Q}^+$.

4 Operaciones admisibles en una ecuación

Frecuentemente en el tratamiento de ecuaciones con números reales o complejos es necesario simplificar, reagrupar o cambiar de forma la ecuación para poder resolverla más fácilmente. Se conoce que bajo ciertas operaciones se mantiene la igualdad y el conjunto de soluciones no cambia aunque la forma de la ecuación sea diferente. Entre las operaciones de álgebra elemental que no alteran el conjunto de soluciones están:

1. Sumar cualquier número a ambos lados de la ecuación.
2. Restar cualquier número a ambos lados de la ecuación.
3. Dividir entre un número real diferente de cero ambos lados de la ecuación.
4. Multiplicar por cualquier número ambos lados de la ecuación.
5. Si f inyectiva se puede aplicar a cada uno de los dos miembros de la ecuación.

Otras dos operaciones respetan la igualdad pero pueden alterar el conjunto de soluciones:

1. Simplificar dividiendo factores comunes presentes en ambos lados de una ecuación. Si estos factores contienen no sólo números sino también variables esta operación debe aplicarse con cuidado porque el conjunto de soluciones puede verse reducido. Por ejemplo, la ecuación $y{\cdot}x = x$ tiene dos soluciones: $y = 1$ y $x = 0$. Si se dividen ambos lados entre "x" para simplifcarla se obtiene la ecuación $y = 1$, pero la segunda solución se ha perdido.

2. Si se aplica una función no inyectiva a ambos lados de una ecuación, la ecuación resultante puede no tener un conjunto de soluciones más grande que la original.

5 Tipos de ecuación algebraica

Una **ecuación algebraica** en x contiene solo expresiones algebraicas, como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras. Una ecuación de este tipo se llama **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no sean soluciones; por ejemplo, x^2= 9 es condicional porque el número x=4 (y otros) no es una solución. Si todo número de los dominios de las expresiones de una ecuación algebraica es una solución, la ecuación se llama **identidad**.

6 Historia

6.1 Antigüedad

Ya en el siglo XVI a. C. los egipcios resolvían problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales que eran equivalentes a resolver **ecuaciones algebraicas** simples de primer grado; como la notación algebraica no existía usaban un método iterativo aproximado llamado el «método de la falsa posición».

Los matemáticos chinos de principios de nuestra era escribieron el libro *El arte del cálculo* en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado, así como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su Aritmética en el siglo III tratando las ecuaciones de primer y segundo grado; fue uno de los primeros en utilizar símbolos para representar las ecuaciones. También planteó las ecuaciones con soluciones enteras, llamadas en su honor ecuaciones diofánticas.[2]

6.2 Siglos XV - XVI

Pasada la "edad oscura" medieval, el estudio de las ecuaciones algebraicas experimenta un gran impulso. En el siglo XV estaban a la orden del día los desafíos matemáticos públicos, con premios al vencedor; así, un desafío famoso enfrentó a dos matemáticos a resolver ecuaciones de tercer grado, el vencedor fue Niccolò Fontana Tartaglia, experto algebrista.

Sobre mediados del siglo XVI los matemáticos italianos Girolamo Cardano y Rafael Bombelli descubrieron que para poder resolver todas las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado el uso de los números imaginarios era indispensable. Cardano, enemigo acérrimo de Tartaglia, también halló métodos de resolución de ecuaciones de cuarto grado.

En el mismo siglo el matemático francés René Descartes popularizó la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, … y las variables o incógnitas por las últimas, x, y, z. En esta época se enuncian problemas de ecuaciones que sólo han sido resueltos actualmente, algunos que sólo recientemente se han resuelto; entre ellos tenemos el último teorema de Fermat, uno de los teoremas más famosos de la matemática, que no fue demostrado hasta 1995 por Andrew Wiles y Richard Taylor.

6.3 Siglos XVII-XVIII

En el siglo XVII Newton y Leibniz publican los primeros métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales que aparecen en los problemas de la dinámica. Probablemente el primer libro sobre estas ecuaciones fue "Sobre las construcciones de ecuaciones diferenciales de primer grado" de Gabriele Manfredi (1707). Durante el siglo XVIII matemáticos ilustres como Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange y Pierre Simon Laplace publican resultados sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales.

6.4 Época moderna

A pesar de todos los esfuerzos de las épocas anteriores, las ecuaciones algebraicas de quinto grado y superiores se resistieron a ser resueltas; sólo se consiguió en casos particulares, pero no se encontraba una solución general. A principios del siglo XIX Niels Henrik Abel demostró que hay ecuaciones no resolubles; en particular mostró que no existe una fórmula general para resolver la ecuación de quinto grado; acto seguido Évariste Galois demostró, utilizando su teoría de grupos, que lo mismo puede afirmarse de toda ecuación de grado igual o superior a cinco.

Durante el siglo XIX las ciencias físicas utilizan en su formulación ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y/o ecuaciones integrales, como es el caso de la

Sabemos que se llama **producto** al resultado de una multiplicación. También sabemos que los valores que se multiplican se llaman**factores**.

Se llama **productos notables** a ciertas **expresiones algebraicas** que se encuentran frecuentemente y que es preciso saber**factorizarlas** a simple vista; es decir, sin necesidad de hacerlo paso por paso.

Se les llama **productos notables** (también **productos especiales**) precisamente porque son muy utilizados en los ejercicios.

A continuación veremos algunas **expresiones algebraicas** y del lado derecho de la igualdad se muestra la forma de factorizarlas (mostrada como un **producto notable**).

Cuadrado de la suma de dos cantidades o binomio cuadrado

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad multiplicada por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Demostración:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como $\mathbf{(a + b)^2}$

Nota:

Se recomienda volver al tema factorización para reforzar su comprensión.

Ver: PSU; Matemática

Pregunta 12_2005

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad multiplicada por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Demostración:

$$(a-b)^2 = (a-b)\ (a-b) = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 + b^2 - 2\,ab = a^2 - 2\,ab + b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma **a^2 – 2ab + b^2** debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **$(a – b)^2$**

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades (o producto de dos binomios conjugados)

$$\boxed{(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2}$$

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el cuadrado de la segunda

Demostración:

$$(a + b)\ (a - b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} - \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$$

$$= a^2 - b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma **(a + b) (a – b)** debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **$a^2 – b^2$**

Ver: PSU: Matematica,

Pregunta 15_2010

Pregunta 19_2010

Pregunta 09_2006

Otros casos de productos notable (o especiales):

Producto de dos binomios con un término común, de la forma

$$\boxed{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)\ (x + b)}$$

Demostración:

$$(x+a)\ (x+b) = x^2 + ab + bx + ax = x^2 + ab + (a+b)\ x = x^2 + (a+b)\ x + ab$$

Veamos un ejemplo explicativo:

Tenemos la expresión algebraica

$x^2 + 9x + 14$

obtenida del producto entre $(x + 2)(x + 7)$

¿Cómo llegamos a la expresión?

a) El cuadrado del término común es $(x)(x) = \mathbf{x^2}$

b) La suma de términos no comunes multiplicada por el término común es $(2 + 7)x = \mathbf{9x}$

c) El producto de los términos no comunes es $(2)(7) = \mathbf{14}$

Así, tenemos:

$$\mathbf{x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)}$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{x^2 + (a + b)x + ab}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como $\mathbf{(x + a)(x + b)}$

Producto de dos binomios con un término común, de la forma

$$\boxed{x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)}$$

Demostración:

$$(x + a)(x - b) = x^2 - ab - bx + ax = x^2 - ab + (a - b)x = x^2 + (a - b)x - ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{x^2 + (a - b)x - ab}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como $\mathbf{(x + a)(x - b)}$.

Producto de dos binomios con un término común, de la forma

$$\boxed{x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)}$$

Demostración:

$$(x - a)(x - b) = x^2 - ab - bx - ax = x^2 - ab - (a + b)x = x^2 - (a + b)x - ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{x^2 - (a + b)x + ab}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como $\mathbf{(x - a)(x - b)}$.

Producto de dos binomios con un término común, de la forma

$$mnx^2 + ab + (mb + na)x = (mx + a)$$

$(nx + b)$

En este caso, vemos que el **término común (x)** tiene distinto coeficiente en cada binomio **(mx y nx).**

Demostración:

$$(mx + a)\ (nx + b) = mnx^2 + ab + mbx + nax = mnx^2 + ab + (mb + na)\ x = mnx^2 + (mb + na)\ x + ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma **$mnx^2 + ab + (mb + na)x$**debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **$(mx + a)\ (nx + b)$**.

Cubo de una suma

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma **$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$**debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **$(a + b)^3$**.

Cubo de una diferencia

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma **$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$**debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **$(a - b)^3$**.

A modo de resumen, se entrega el siguiente cuadro con Productos notables y la expresión algebraica que lo representa:

Producto notable		Expresión algebraica	Nombre
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$	**Binomio al cuadrado**
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	**Binomio al cubo**
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)\ (a - b)$	**Diferencia de cuadrados**
$a^3 - b^3$	=	$(a - b)\ (a^2 + b^2 + ab)$	**Diferencia de cubos**
$a^3 + b^3$	=	$(a + b)\ (a^2 + b^2 - ab)$	**Suma de cubos**
$a^4 - b^4$	=	$(a + b)\ (a - b)\ (a^2 + b^2)$	**Diferencia cuarta**
$(a + b + c)^2$	=	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	**Trinomio al cuadrado**

Factorización y productos notables

Así como los números naturales pueden ser expresados como producto de dos o más números, los polinomios pueden ser expresadas como el producto de dos o más factores algebraicos.

Cuando un polinomio no se puede factorizar se denomina **irreducible**. En los casos en que la expresión es irreducible, solo puede expresarse como el producto del número 1 por la expresión original.

Al proceso de expresar un polinomio como un producto de factores se le denomina **factorización**.

El proceso de factorización puede considerarse como **inverso al proceso de multiplicar**.

Factorizar, entonces, quiere decir **identificar los factores comunes a todos los términos y agruparlos**.

Los factores comunes son aquellos números que aparecen multiplicando a todos los términos de una expresión algebraica.

Estos números pueden estar dados explícitamente o representados por letras.

Así, factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que al multiplicarlos entre sí se obtenga el polinomio original.

En otras palabras, dada una expresión algebraica complicada, resulta útil, por lo general, el descomponerla en un producto de varios términos más sencillos.

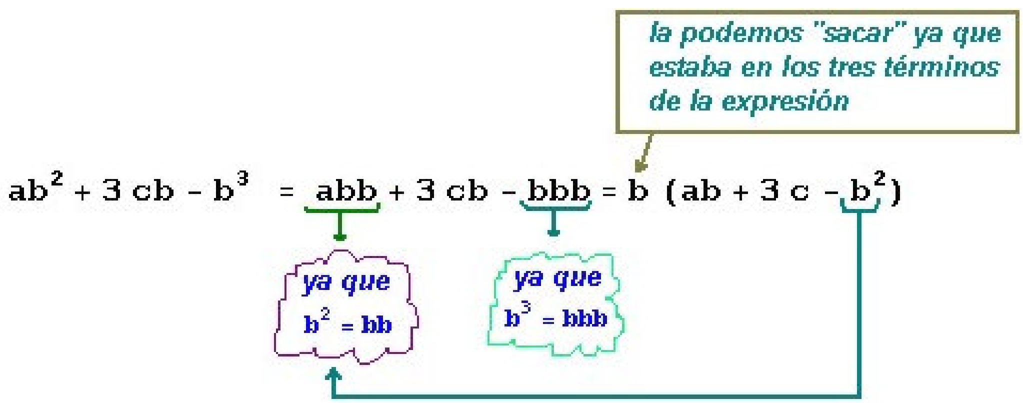
Por ejemplo, $\mathbf{2x^3 + 8x^2y}$ se puede factorizar, o reescribir, como $\mathbf{2x^2(x + 4y)}$.

Algunos ejemplos:

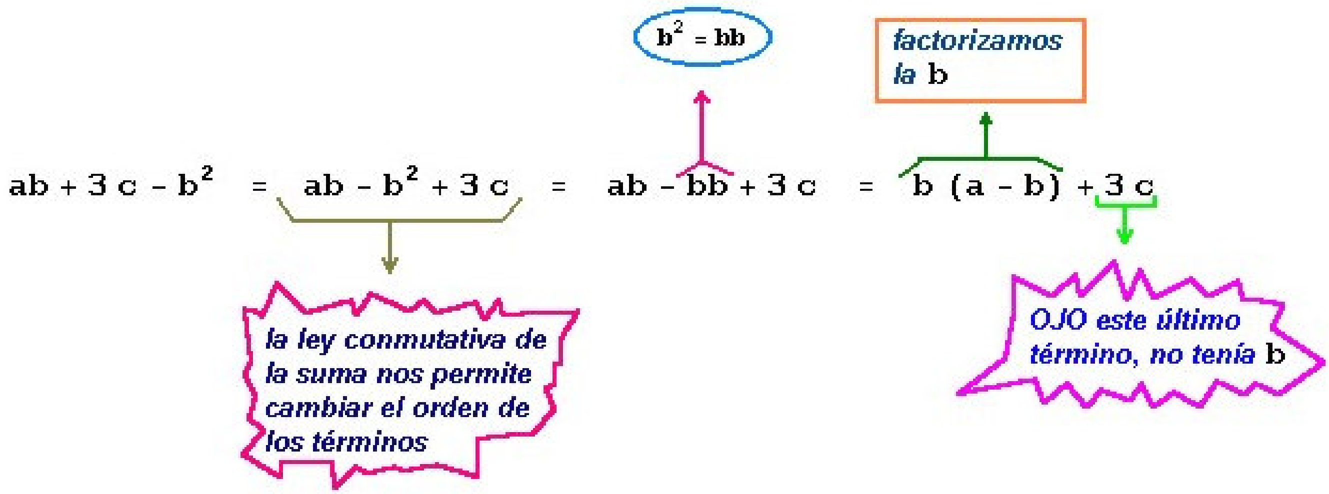
De la expresión $\mathbf{ab^2 + 3cb - b^3}$ podemos factorizar **b**

y obtenemos la expresión: $\mathbf{b(ab + 3c - b^2)}$ **(1)**

Veamos paso a paso cómo se obtuvo la expresión:



ahora podríamos reacomodar la expresión que queda dentro del paréntesis:



Finalmente si sustituimos este último resultado en **(1)**, obtenemos:

$$\mathbf{ab^2 + 3cb - b^3 = b\,(b\,(a - b) + 3c)}$$

$$\mathbf{ab^2 + 3cb - b^3 = b\,(ab - b^2 + 3c)}$$

$$\mathbf{ab^2 + 3cb - b^3 = b\,(ab + 3c - b^2)}$$

Por otro lado, algunos productos sencillos que tienen una estructura determinada y que pueden ser evaluados de forma directa se denominan **Productos notables.**

En general los casos de factorización corresponden a los casos de productos notables.

Antes de mostrar ejercicios de aplicación de factorización y productos notables, es necesario recordar la forma de hallar el **máximo común divisor (mcd)** de un conjunto de números dados.

Ejemplo: Determinar el máximo común divisor (mcd) de los números 56, 42 y 28.

El **máximo común divisor** de un conjunto de números dados corresponde al mayor número natural que los divide simultáneamente, con residuo cero.

Para hallar el **mcd** de un conjunto determinado de números, estos se dividen simultáneamente por los diferentes números primos (tomados en orden ascendente, y desechando los números primos por los cuales no se pueda hacer la división con residuo cero de**todos** los números de la fila) según el arreglo mostrado a continuación.

El proceso termina, cuando los números que aparecen en la fila inmediatamente inferior a la última división simultánea, **no pueden dividirse simultáneamente** por algún número primo.

El **mcd** buscado es el producto de los números primos que aparecen a la derecha:

56	42	28	÷	2
28	21	14	÷	7
4	3	2		

Los números originales (56, 42, 28) se escriben desde la izquierda hacia la derecha.

A la derecha de ellos se escribe el 2 (primer número primo de la lista) y se divide cada uno de estos números por 2, escribiendo el resultado obtenido en la misma columna del número original.

La segunda fila muestra estos resultados.

Como los números 28, 21 y 14 no pueden dividirse **simultáneamente** por 3, este número primo se desecha.

De forma similar se desecha el 5.

El siguiente número primo en la lista es 7.

En este caso se puede hacer la división simultáneamente obteniéndose los números 4, 3 y 2.

Esta última fila **no** puede dividirse simultáneamente ni por 2 ni por 3.

Como el siguiente número primo (5) es mayor que 4, el proceso termina.

Por lo tanto, el **mcd** de los números 56, 42 y 28 es el producto de los números primos de la derecha: $2 \cdot 7 = 14$

Lo anterior se expresa como: **mcd (56, 42, 28) = 14** (el máximo común divisor de los números 56, 42 y 28 es igual a 14)

Ejemplo: Factorizar **$9x + 6y - 12z$**

Este es un ejemplo sencillo de la factorización por factor común.

Dada una expresión algebraica se encuentra el máximo común divisor (mcd) de los coeficientes de los términos de la expresión algebraica.

Este mcd corresponde al coeficiente del factor común.

Para la parte literal se toman las variables comunes a todos los términos con el menor exponente que aparezca.

Para este ejercicio el **mcd de 9, 6 y 12 es 3**; además como no hay variables comunes en los tres términos tenemos:

$$\mathbf{9x + 6y - 12z = 3(3x + 2y - 4z)}$$

es decir $9x + 6y - 12z$ se ha expresado como el producto de los factores 3 y $3x + 2y - 4z$.

Ejemplo: Factorizar **$9xy^2 + 6y^4 - 12y^3z$**

En este caso además del factor común 3 (mcd de 9, 6, 12) la variable y es común a los tres términos. La menor potencia común es y^2 por lo tanto la factorización queda:

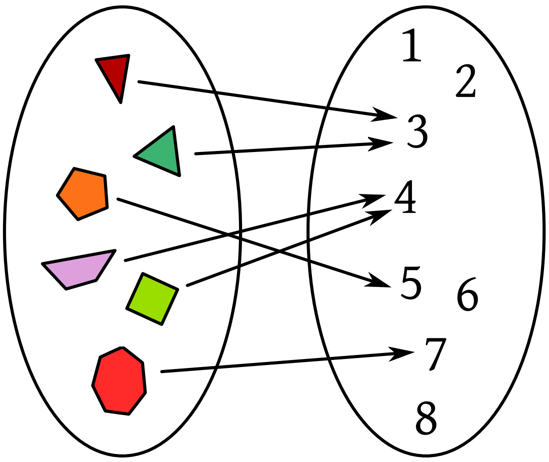
$$\mathbf{9xy^2 + 6y^4 - 12y^3z = 3y^2(3x + 2y^2 - 4yz)}$$

Los factores en este caso son $3x + 2y^2 - 4yz$ y $3y^2$. Para verificar, al realizar el producto indicado se obtiene la expresión original:

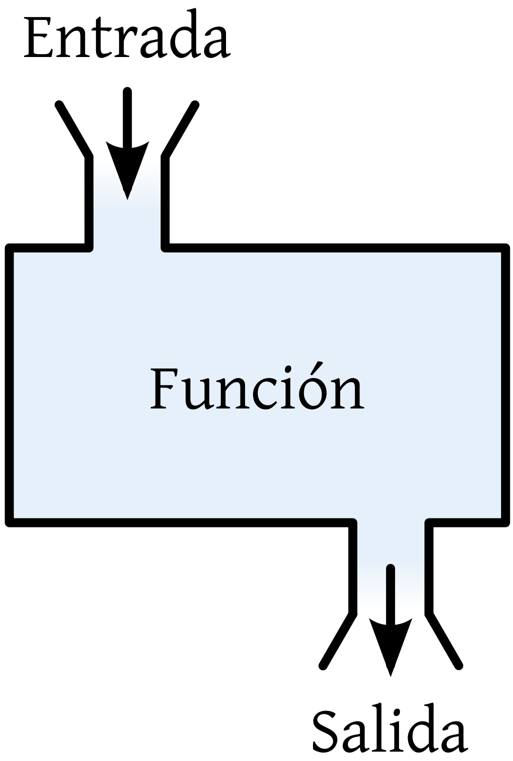
$$\mathbf{3y^2(3x + 2y^2 - 4yz) = (3y^2 * 3x) + (3y^2 * 2y^2) - (3y^2 * 4yz)}$$

$$\mathbf{= 9xy^2 + 6y^4 - 12y^3z}$$

Función matemática



En la imagen se muestra una función entre un conjunto de polígonos y un conjunto de números. A cada polígono le corresponde su número de lados.



Una función vista como una «caja negra», que transforma los valores u objetos de «entrada» en los valores u objetos de «salida»

En matemáticas, se dice que una magnitud o cantidad es **función** de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo el área A de un círculo es función de su radio r: el valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi \cdot r^2$. Del mismo modo, la duración T de un viaje de tren entre dos ciudades separadas por una distancia d de 150 km depende de la velocidad v a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad, d / v. A la primera magnitud (el área, la duración) se la denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad) es la variable independiente.

En análisis matemático, el concepto general de **función**, **aplicación** o **mapeo** se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto (correspondencia matemática). Por ejemplo, cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural (incluyendo el cero):

Esta asignación constituye una función entre el conjunto de los números enteros **Z** y el conjunto de los números naturales **N**. Aunque las funciones que manipulan números son las más conocidas, no son el único ejemplo: puede imaginarse una función que a cada palabra del español le asigne su letra inicial:

Esta es una función entre el conjunto de las palabras del español y el conjunto de las letras del alfabeto español.

La manera habitual de denotar una función f es:

$$f\colon A \to B$$
$$a \to f(a),$$

donde A es el **dominio** de la función f, su *primer* conjunto o conjunto de partida; y B es el **codominio** de f, su *segundo* conjunto o conjunto de llegada. Por $f(a)$ se denota la regla o algoritmo para obtener la **imagen** de un cierto objeto arbitrario a del dominio A, es decir, el (único) objeto de B que le corresponde. En ocasiones esta expresión es suficiente para especificar la función por completo, infiriendo el dominio y codominio por el contexto. En el ejemplo anterior, las funciones «cuadrado» e «inicial», llámeseles f y g, se denotarían entonces como:

$$f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$$
$$k \to k^2, \text{ o sencillamente } f(k) = k^2;$$

$$g\colon V \to A$$
$$p \to \text{Inicial de } p;$$

si se conviene $V = \{$Palabras del español$\}$ y $A = \{$Alfabeto español$\}$.

Una función puede representarse de diversas formas: mediante el citado algoritmo o ecuaciones para obtener la imagen de cada elemento, mediante una tabla de valores que empareje cada valor de la variable independiente con su imagen —como las mostradas arriba—, o como una gráfica que dé una imagen de la función.

1 Historia

Gottfried Leibniz acuñó el término «función» en el siglo XVII.

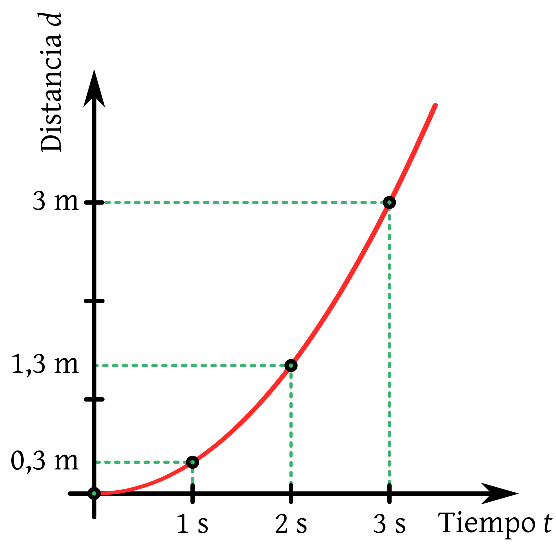
El concepto de función como un objeto matemático independiente, susceptible de ser estudiado por sí solo, no apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII.[1] René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Leibniz en particular acuñó los términos «función», «variable», «constante» y «parámetro». La notación $f(x)$ fue utilizada por primera vez por A.C. Clairaut, y por Leonhard Euler en su obra *Commentarii de San petersburgo* en 1736.[2][3][4]

Inicialmente, una función se identificaba a efectos prácticos con una expresión analítica que permitía calcular sus valores. Sin embargo, esta definición tenía algunas limitaciones: expresiones distintas pueden arrojar los mismos valores, y no todas las «dependencias» entre dos cantidades pueden expresarse de esta manera. En 1837 Dirichlet propuso la definición moderna de función numérica como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

La intuición sobre el concepto de función también evolucionó. Inicialmente la dependencia entre dos cantidades se imaginaba como un proceso físico, de modo que su expresión algebraica capturaba la ley física que correspondía a este. La tendencia a una mayor abstracción se vio reforzada a medida que se encontraron ejemplos de funciones sin expresión analítica o representación geométrica sencillas, o sin relación con ningún fenómeno natural; y por los ejemplos «patológicos» como funciones continuas sin derivada en ningún punto.

Durante el siglo XIX Julius Wilhelm Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Georg Cantor, partiendo de un estudio profundo de los números reales, desarrollaron *la teoría de funciones*, siendo esta teoría independiente del sistema de numeración empleado.[*cita requerida*] Con el desarrollo de la teoría de conjuntos, en los siglos XIX y XX surgió la definición actual de función, como una correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos.[5] También se asoció con otros conceptos vinculados como el de relación binaria.

2 Introducción



Representación gráfica de la velocidad de un cuerpo acelerado a 0,66 m/s^2.

Una función es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes, y puede presentarse a través de varios aspectos complementarios. Un ejemplo habitual de función numérica es la relación entre la posición y el tiempo en el movimiento de un cuerpo.

Un móvil que se desplaza con una aceleración de 0,66 m/s^2 recorre una distancia d que está en función del tiempo transcurrido t. Se dice que d es la variable dependiente de t, la variable independiente. Estas magnitudes, calculadas a priori o medidas en un experimento, pueden consignarse de varias maneras. (Se supone que el cuerpo parte en un instante en el que se conviene que el tiempo es t = 0 s.)

Los valores de las variables pueden recogerse en una tabla, anotando la distancia recorrida d en un cierto instante t, para varios momentos distintos:

La gráfica en la imagen es una manera equivalente de presentar la misma información. Cada punto de la curva roja representa una pareja de datos tiempo-distancia, utilizando la correspondencia entre puntos y coordenadas del plano cartesiano. También puede utilizarse un regla o algoritmo que dicte como se ha de calcular d a partir de t. En este caso, la distancia que recorre un cuerpo con esta aceleración está dada por la expresión:

$$d = 0{,}33 \times t^2,$$

donde las magnitudes se expresan unidades del SI. De estos tres modos se refleja que existe una dependencia entre ambas magnitudes.

Una función también puede reflejar la relación de una variable dependiente con varias variables independientes. Si el cuerpo del ejemplo se mueve con una aceleración constante pero indeterminada a, la distancia recorrida es una función entonces de a y t; en particular, $d = a{\cdot}t^2/2$. Las funciones también se utilizan para expresar la dependencia entre otros objetos cualesquiera, no solo los números. Por ejemplo, existe una función que a cada polígono le asigna su número de lados; o una función que a cada día de la semana le asigna el siguiente:

Lunes → Martes, Martes → Miércoles,..., Domingo → Lunes

3 Definición

La definición general de función hace referencia a la dependencia entre los elementos de dos conjuntos dados.

Un objeto o valor genérico a en el dominio A se denomina la *variable independiente*; y un objeto genérico b del dominio B es la *variable dependiente*. También se les llama valores *de entrada* y *de salida*, respectivamente. Esta definición es precisa, aunque en matemáticas se utiliza una definición formal más rigurosa, que construye las funciones como un objeto concreto.

Ejemplos

- Todos los números reales tienen un cubo, por lo que existe la función «cubo» que a cada número en el dominio **R** le asigna su cubo en el codominio **R**.
- Exceptuando al 0, todos los números reales tienen un único inverso. Existe entonces la función «inverso» cuyo dominio son los números reales no nulos $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, y con codominio **R**.
- Cada mamífero conocido se clasifica en un género, como *Homo*, *Sus* o *Loxodonta*. Existe por tanto una función «clasificación en géneros» que asigna a cada mamífero de la colección M = {mamíferos conocidos} su género. El codominio de «clasificación en géneros» es la colección G = {géneros de *Mammalia*}.
- Existe una función «área» que a cada triángulo del plano (en la colección T de todos ellos, su dominio), le asigna su área, un número real, luego su codominio es **R**.
- En unas elecciones en las que cada votante pueda emitir un único voto, existe una función «voto» que asigna a cada elector el partido que elija. En la imagen se muestra un conjunto de electores E y un conjunto de partidos P, y una función entre ellos.

3.1 Funciones con múltiples variables

Existen muchos ejemplos de funciones que «necesitan dos valores» para ser calculadas, como la función «tiempo de viaje» T, que viene dada por el cociente entre la distancia d y la velocidad media v: cada pareja de números reales positivos (una distancia y una velocidad) tiene asociada un número real positivo (el tiempo de viaje). Por tanto, una función puede tener dos (o más) variables independientes.

La noción de función de múltiples variables independientes no necesita de una definición específica separada de la de función «ordinaria». La generalidad de la definición anterior, en la que se contempla que el dominio sea un conjunto de *objetos matemáticos arbitrarios*, permite omitir la especificación de dos (o más) conjuntos de variables independientes, A_1 y A_2, por ejemplo. En lugar de ello, el dominio se toma como el conjunto de las parejas (a_1, a_2), con primera componente en A_1 y segunda componente en A_2. Este conjunto se denomina el producto cartesiano de A_1 y A_2, y se denota por $A_1 \times A_2$.

De este modo las dos variables independientes quedan reunidas en un solo objeto. Por ejemplo, en el caso de la función T, su dominio es el conjunto $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, el conjunto de parejas de números reales positivos. En el caso de más de dos variables, la definición es la misma, usando un conjunto ordenado de múltiples objetos, $(a_1,..., a_n)$, una n-tupla. También el caso de múltiples variables *dependientes* se contempla de esta manera. Por ejemplo, una función *división* puede tomar dos números naturales como valores de entrada (dividendo y divisor) y arrojar dos números naturales como valores de salida (cociente y resto). Se dice entonces que esta función tiene como dominio y codominio el conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

3.2 Notación. Nomenclatura

La notación habitual para presentar una función f con dominio A y codominio B es:

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \to & B \\ & a & \to & b = f(a) \end{array}$$

También se dice que f es una función «de A a B» o «entre A y B». El dominio de una función f se denota también por dom(f), D(f), Df, etc. Por $f(a)$ se resume la operación o regla que permite obtener el elemento de B asociado a un cierto $a \in A$, denominado la imagen de a.[6]

Ejemplos

- La función «cubo» puede denotarse ahora como f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = x^3$ para cada número real x.
- La función «inverso» es g: $\mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, con $g(x) = 1/x$ para cada x real y no nulo.
- La función «clasificación en géneros» puede escribirse como γ: $M \to G$, donde $\gamma(m)$ = Género de m, para cada mamífero conocido m.
- La función «área» se puede denotar como A: $T \to \mathbf{R}$, y entonces $A(t)$ = Área de $t = B \cdot H/2$, donde t es un triángulo del plano, B su base, y H su altura.
- La función «voto» se puede escribir como v: $E \to P$, donde $v(a)$ = Partido que a votó, para cada votante a.

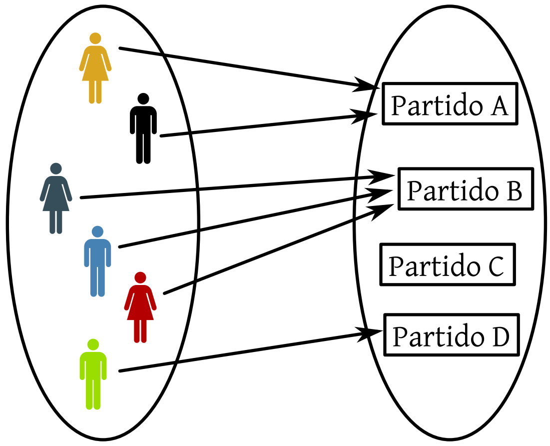
La notación utilizada puede ser un poco más laxa, como por ejemplo «la función $f(n) = \sqrt{n}$». En dicha expresión no se especifica que conjuntos se toman como dominio y codominio. En general, estos vendrán dados por el contexto en el que se especifique dicha función. En el caso de funciones de varias variables (dos, por ejemplo), la imagen del par (a_1, a_2) no se denota por $f((a_1, a_2))$, sino por $f(a_1, a_2)$, y similarmente para más variables.

Existen además terminologías diversas en distintas ramas de las matemáticas para referirse a funciones con determinados dominios y codominios:

- Función real: f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
- Función compleja: f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$
- Función escalar: f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$
- Función vectorial: f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

También las sucesiones infinitas de elementos tales como a, b, c, ... son funciones, cuyo dominio en este caso son los números naturales. Las palabras «función», «aplicación», «mapeo», u otras como «operador», «funcional», etc. pueden designar tipos concretos de función según el contexto. Adicionalmente, algunos autores restringen la palabra «función» para el caso en el que los elementos del conjunto inicial y final son números.[7]

3.3 Imagen e imagen inversa

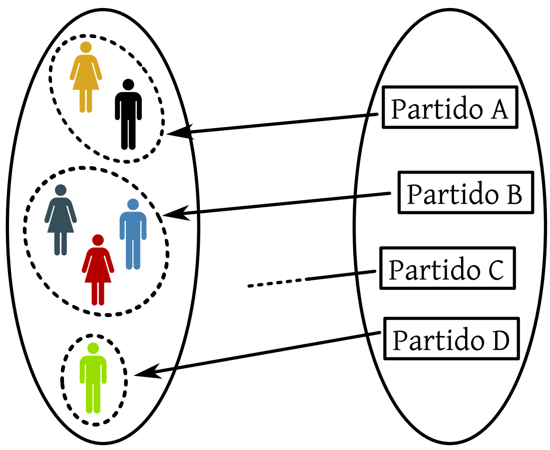


Dado un conjunto de votantes y un conjunto de posible partidos, en unas elecciones, el sentido del voto de cada individuo se puede visualizar como una función.

Los elementos del codominio B asociados con algún elemento del dominio A constituyen la imagen de la función.

La imagen de una función f se denota por Im(f), y la de un subconjunto X por $f(X)$ o $f[X]$. En notación conjuntista las imágenes de f y X se denotan:

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \text{ existe} a \in A \text{ que tal } f(a) = b\}$$
$$f(X) = \{b \in X : \text{ existe} a \in A \text{ que tal } f(a) = b\}$$



La anti-imagen de cada partido es el conjunto de los electores que lo votaron.

La imagen de una función f es un subconjunto del codominio de la misma, pero no son necesariamente iguales: pueden existir elementos en el codominio que no son la imagen de ningún elemento del dominio, es decir, que no tienen preimagen.

Así, la preimagen de un elemento del codominio puede no contener ningún objeto o, por el contrario, contener uno o más objetos, cuando a uno o varios elementos del dominio se les asigna dicho elemento del codominio. En notación conjuntista, se escriben:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$$
$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : \text{ existe } b \in Y \text{ con } f(a) = b\}$$

Ejemplos

- La imagen de la función cubo f es todo **R**, ya que todo número real posee una raíz cúbica real. En particular, las raíces cúbicas de los números positivos (negativos) son positivas (negativas), por lo que se tiene, por ejemplo, $f^{-1}(\mathbf{R}^+) = \mathbf{R}^+$.
- El recorrido de la función inverso g no es igual a su codominio, ya que no hay ningún número real x cuyo inverso sea 0, $1/x = 0$.
- Para la función «clasificación en géneros» γ se tiene:

  γ(Perro) = *Canis*, y γ^{-1}(*Canis*) = {Perro, coyote, chacal,...}.

- Como el área es siempre un número positivo, el recorrido de la función área A es $\mathbf{R}^+$.
- En el diagrama puede comprobarse que la imagen de la función voto v no coincide con el codominio, ya que el partido C no recibió ningún voto. Sin embargo puede verse que, por ejemplo, v^{-1}(Partido A) tiene 2 elementos.

3.4 Igualdad de funciones

Dadas dos funciones, para que sean idénticas han de tener el mismo dominio y codominio, y asignar la misma imagen a cada elemento del dominio:

4 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

La imagen inversa de un elemento del codominio puede ser vacía, o contener varios objetos del dominio. Esto da lugar a la siguiente clasificación:

Las funciones inyectivas no repiten las imágenes: si $b = f(a)$, ningún otro a' tiene por imagen a b, por lo que la anti-imagen de este último sólo contiene al elemento a. Las funciones suprayectivas recorren todo el codominio, por lo que ninguna anti-imagen puede estar vacía. La definición de función suprayectiva asume que esta tiene un codominio especificado previamente. De lo contrario, la noción de suprayectividad no tiene sentido.

Cuando una función tiene ambas propiedades a la vez, se dice que es una biyección entre ambos conjuntos:

Las funciones biyectivas constituyen un «emparejamiento perfecto» entre los elementos del dominio y el codominio: cada elemento en A tiene una única «pareja» en B —como todas las funciones—, y a cada elemento de B le corresponde uno solo en A —al menos uno por ser suprayectiva, y como mucho uno por ser inyectiva—.

Ejemplos.

- La función cubo f: **R** → **R** es biyectiva. Es inyectiva porque dos números reales que tienen el mismo cubo son idénticos, y es suprayectiva porque Im(f) = **R**.
- La función «inverso» g: **R** \ {0} → **R** es inyectiva, ya que el inverso de cada número real no nulo es único ($1/x = 1/y$ implica necesariamente que $x = y$). Sin embargo no es suprayectiva, dado que Im(g) = **R** \ {0}.
- La función de clasificación de mamíferos γ: $M \to G$ no es inyectiva, ya que hay mamíferos distintos en el mismo género (por ejemplo, γ(Yak) = γ(Toro) = *Bos*). Sin embargo sí es suprayectiva, ya que en cada género de mamíferos hay clasificada al menos una especie de mamíferos.
- La función área A: $T \to$ **R** no es sobreyectiva, ya que Im(A) = $\mathbf{R}^+$. Tampoco es inyectiva, ya que pueden construirse con facilidad triángulos distintos con el mismo área.
- En la imagen pueden verse varios ejemplos de funciones entre un conjunto de pinceles P y un conjunto de caras C.

5 Álgebra de funciones

Con las funciones puede realizarse una operación de composición con propiedades similares a las de la multiplicación.

5.1 Composición de funciones

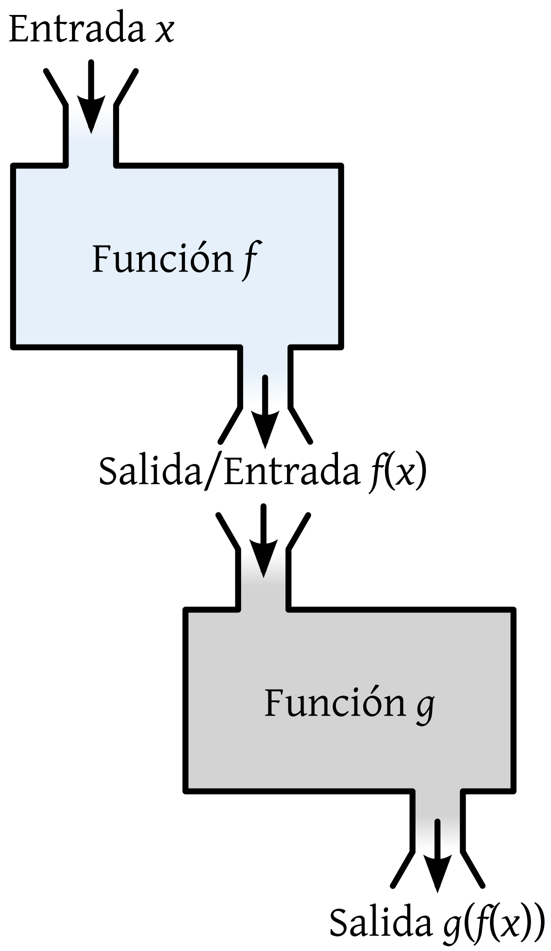
Dadas dos funciones, bajo ciertas condiciones podemos usar los valores de salida de una de ellas como valores de entrada para la otra., creando una nueva función.

Es decir, la composición $g \circ f$ hace actuar primero la función f sobre un elemento de A, y luego g sobre la imagen que se obtenga:

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

La condición Im(f) ⊆ C asegura precisamente que este segundo paso se pueda llevar a cabo.

Ejemplos



La composición g ∘ f *actúa sobre el objeto* x *transformándolo según* f*, y después transformando* f(x) *mediante* g*.*

- La imagen de la función «inverso» g es $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ —puesto que todo número real no nulo es el inverso de otro—, y por tanto está contenido en el dominio de la función cubo f, que es $\mathbf{R}$. La composición $f \circ g$: $\mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ actúa entonces como $f(g(x)) = f(1/x) = (1/x)^3 = 1/x^3$.
- Dadas las funciones reales $h_1 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $h_2 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dadas por $h_1(x) = x^2$ y $h_2(x) = x + 1$, puede tomarse la composición en ambos órdenes, $h_1 \circ h_2$ y $h_2 \circ h_1$. Sin embargo, son funciones distintas, ya que:

  $(h_1 \circ h_2)(x) = h_1(h_2(x)) = h_1(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, y

  $(h_2 \circ h_1)(x) = h_2(h_1(x)) = h_2(x^2) = x^2 + 1$
- La función γ que clasifica los mamíferos en géneros puede componerse con la función ω: $G \to Or$ que clasifica los géneros de mamíferos en órdenes —que forman el conjunto Or—. La función $\omega \circ \gamma$ asigna a cada mamífero su orden:

  $(\omega \circ \gamma)$(Humano) = ω(*Homo*) = Primate, $(\omega \circ \gamma)$(Guanaco) = ω(*Lama*) = Artiodactyla

5.2 Función identidad

En cualquier conjunto puede definirse una función identidad, que teniendo como dominio y codominio al propio conjunto, asocia cada elemento consigo mismo.

También se denota como IA. La función identidad actúa como un elemento neutro al componer funciones, ya que no «hace nada».

Es decir, dado un elemento $x \in A$, se tiene que:

$$x \xmapsto{\mathrm{id}_A} x \xmapsto{f} f(x)$$
$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{\mathrm{id}_B} f(x)$$

5.3 Función inversa

Una función puede tener inversa, es decir, otra función que al componerla con ella resulte en la identidad, del mismo modo que un número multiplicado por su inverso da 1.

No todas las funciones son invertibles, sino que solo aquellas que sean biyectivas poseen inversa:

La notación para funciones inversas puede ser confusa. Para un elemento del codominio b, $f^{-1}(b)$ puede denotar tanto la anti-imagen de b (un subconjunto del dominio), como a la imagen de b por la función inversa de f (un elemento del dominio), en el caso de que f sea invertible.

Ejemplos.

- La función «exponencial» h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, que asocia a cada número real su exponencial, $h(x) = e^x$, no es invertible, ya que no es suprayectiva: ningún número negativo pertenece a la imagen de h.
- Existe una función que calcula el cambio entre dos divisas. En el caso del cambio de rupias a quetzales (las monedas de la India y Guatemala), la conversión está dada (en 2011) por:
  $Q(r) = 0{,}15 \times r$
  Esta función de cambio tiene inversa, la conversión recíproca de quetzales a rupias:
  $R(q) = 6{,}65 \times q$
- La función cubo $f(x) = x^3$ es invertible, ya que podemos definir la función inversa mediante la raíz cúbica, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
- La función de clasificación en géneros γ: $M \to G$ no es invertible, ya que no es inyectiva, y para cada género pueden existir varios mamíferos clasificados en él.
- La función que asigna a cada día de la semana su siguiente tiene por inversa la función que asigna a cada día de la semana su antecesor:

  Lunes → Domingo, Martes → Lunes,..., Domingo → Sábado

Serie matemática

En matemáticas, una **serie** es la generalización de la noción de suma a los términos de una sucesión infinita. Informalmente, es el resultado de sumar los términos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \ldots$ lo cual suele escribirse en forma más compacta con el símbolo de sumatorio: $\sum_{1 \leq n} a_n$.

El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito *n* de términos sucesivos, y mediante un pasaje al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que *n* crece indefinidamente.

Una secuencia o cadena «finita», tiene un primer y último término bien definidos; en cambio en una **serie infinita**, cada uno de los términos suele obtenerse a partir de una determinada regla o fórmula, o por algún algoritmo. Al tener infinitos términos, esta noción suele expresarse como *serie infinita*, pero a diferencia de las sumas finitas, las series infinitas requieren de herramientas del análisis matemático para ser debidamente comprendidas y manipuladas. Existe una gran cantidad de métodos para determinar la naturaleza de convergencia o no-convergencia de las series matemáticas, sin realizar explícitamente los cálculos.

1 tipos de series

1.1 Sumas parciales

Para cualquier sucesión matemática $\{a_n\}$ de números racionales, reales, complejos, funciones, etc., la *serie asociada* se define como la suma formal ordenada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

La **sucesión de sumas parciales** $\{S_k\}$ asociada a una sucesión $\{a_n\}$ está definida para cada k como la suma de la sucesión $\{a_n\}$ desde a_0 hasta a_k :

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

Muchas de las propiedades generales de las series suelen enunciarse en términos de las sumas parciales asociadas.

1.2 Convergencia

Por definición, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge** al límite L si y solo si la sucesión de sumas parciales asociada S_k converge a L . Esta definición suele escribirse como

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Leftrightarrow L = \lim_{k \to \infty} S_k$$

2 Ejemplos

- Una serie geométrica es aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, llamada *razón r*. En este ejemplo, la razón *r* = 1/2):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

En general, una serie geométrica es convergente, sólo si |*z*| < 1, a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$$

- La serie armónica es la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

La serie armónica es divergente.

- Una serie alternada es una serie donde los términos cambian de signo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

- Una serie telescópica es la suma $\sum a_n$, donde *an* = *bn* − *bn*+1:

$$\sum_{n=0}^{N}(b_n - b_{n+1})$$

La convergencia de dicha serie y su suma se pueden calcular fácilmente, ya que:

$$S_N = (b_0-b_1)+(b_1-b_2)+\cdots+(b_{N-1}-b_N)+(b_N-b_{N+1}) = b_0-b_{N+1}$$

- Una serie hipergeométrica es una serie de la forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$.

3 Convergencia de series

Una serie ∑*an* se dice que *es convergente* (o que *converge*) si la sucesión *SN* de sumas parciales tiene un límite finito. Si el límite de *SN* es infinito o no existe, se dice que la serie diverge. Cuando este límite existe, se le llama *suma de la serie*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Si todos los *an* son cero para *n* suficientemente grande, la serie se puede identificar con una suma finita. El estudio de la convergencia de series, se centra en las propiedades de las series infinitas que incluyen infinitos términos no nulos. Por ejemplo, el número periódico

Sn = 0.111111...

tiene como representación decimal, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$$

Dado que estas series siempre convergen en los números reales (ver: espacio completo), no hay diferencia entre este tipo de series y los números decimales que representan. Por ejemplo, 0.111… y $^1/_9$; o bien 1=0,9999...

4 Véase también

- Serie de Taylor
- Serie de Laurent
- 1 - 2 + 3 - 4 + . . .
- Fórmula de Faulhaber
- Serie convergente
- Límite de una sucesión
- Anexo:Series matemáticas

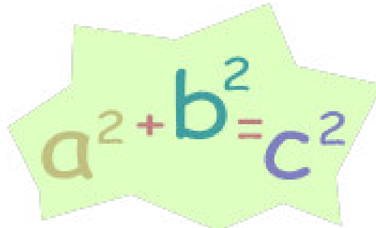
5 Referencias

- K.R. Stromberg, T.J. Bromwich; K. Knopp, A. Zygmund, N.K. Bari (2001), «Series», en Hazewinkel, Michiel (en inglés), *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1556080104.
- Weisstein, Eric W. «Series». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- A history of the calculus (en inglés).

6 Enlaces externos

- Apuntes_UPM

EXPONENTES Y LEYES DE EXPONENTES



El concepto de **exponente** es de mucha utilidad para expresar números en una forma más corta. Por ejemplo: el producto 2 x 2 x 2 x 2 x 2 se expresa de la forma $\mathbf{2^5}$ y se lee "dos a la cinco". La expresión 2 x 2 x 2 x 2 x 2 está en la **forma expandida** y la expresión 2^5 es una **expresiónexponencial**. El valor **32** es la quinta **potencia** de 2.

Definición: La expresión $\mathbf{x^n}$ significa que **x** aparece multiplicada **n veces**. **x** se conoce como la **base** y **n** como el **exponente**. Se llama**potencia** al valor que se obtiene al multiplicar la base **n** veces. Esto es, $\mathbf{x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdot \cdot}$ multiplicado por si mismo **n** veces.

Ejemplos:

1) La notación exponencial de (-3)(-3)(-3)(-3) es $(-3)^4$.
2) La notación exponencial de $b \cdot b \cdot b$ es b^3.
3) El valor de $(-2)^4$ es $(-2)(-2)(-2)(-2) = 16$. La expresión $(-2)^4$ se lee " negativo dos a la cuatro".
4) El valor de -2^4 es $-(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -(16) = -16$. La expresión -2^4 se lee "el opuesto de dos a la cuatro".
5) ¿Cuál es el valor de $(\frac{2}{3})^3$?

Definición: Para toda base x, $\mathbf{x^1 = x}$. Esto es, cualquier número elevado a la uno es el mismo número.

Ejemplos: $3^1 = 3$; $(17)^1 = 17$; $(259)^1 = 259$

Definición: Cualquier número diferente de cero, elevado a la cero es igual a uno. Esto es, para toda base x, $x \neq 0$, $\mathbf{x^0 = 1}$.

Ejemplos: $3^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $(\frac{5}{8})^0 = 1$; 0^0 no está definido

Definición: Cualquier número diferente de cero y **n** un número entero, tenemos:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Ejemplos:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

2) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

3) $b^{-5} = \frac{1}{b^5}$

Ejercicio: Halla el valor de:

1) $4^2 =$
2) $(-4)^2 =$
3) $-4^2 =$
4) $(3/8)^2 =$
5) $4^{-2} =$
6) $(2/3)^{-2} =$

Leyes de Exponentes

1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

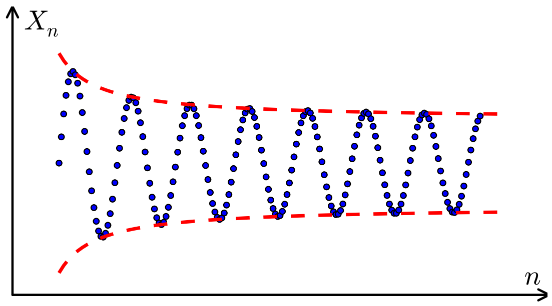
2) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad para \quad x \neq 0$

3) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

4) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad para \quad y \neq 0$

Sucesión matemática



Una sucesión infinita de números reales (en azul). La sucesión no es ni creciente, ni decreciente, ni convergente, ni es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, sí es una sucesión acotada.

Una **sucesión matemática** es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números. Cada uno de ellos es denominado *término* (también *elemento* o *miembro*) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la *longitud* de la sucesión. No debe confundirse con una serie matemática, que es la suma de los términos de una sucesión.

A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición. De manera formal, una sucesión puede definirse como una función sobre el conjunto de los números naturales (o un subconjunto del mismo) y es por tanto una función discreta.

Ejemplo

La sucesión (*A, B, C*) es una sucesión de letras que difiere de la sucesión (*C, A, B*). En este caso se habla de sucesiones finitas (de longitud igual a 3). Un ejemplo de sucesión infinita sería la sucesión de números positivos pares: 2, 4, 6, 8, ...

En ocasiones se identifica a las sucesiones finitas con palabras sobre un conjunto. Puede considerarse también el caso de una sucesión vacía (sin elementos), pero este caso puede excluirse dependiendo del contexto.

1 Definiciones

Las diferentes definiciones suelen estar ligadas al área de trabajo, la más común y poco general es la definición de sucesión numérica, en la práctica se usan sucesiones de forma intuitiva.

1.1 Definición formal

Una **sucesión finita** (a_k) (de longitud *r*) con elementos pertenecientes a un conjunto *S*, se define como una función

$$f : \{1, 2, \dots, r\} \to S \ .$$

y en este caso el elemento a_k corresponde a $f(k)$.

Por ejemplo, la sucesión finita, (de longitud 4) de números primos menores que 10:

$$2, 3, 5, 7$$

corresponde a la función $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{P}$ (donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de números primos) definida por:

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7 \ .$$

Una **sucesión infinita** (a_k) con elementos pertenecientes a un conjunto *S*, se define como una función

$$f : \mathbb{N} \to S \ .$$

en donde, de forma análoga, a_k corresponde a $f(k)$.

1.2 Notación

Notaremos por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a una sucesión, donde *x* la identifica como distinta de otra digamos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La notación es permisiva en cuanto a su modificación si realmente es necesario.

1.3 Definición de término general

Llamaremos *término general* de una sucesión a x_n ,donde el subíndice $n \in \mathbb{N}$ indica el lugar que ocupa en dicha sucesión.

1.4 Definición de parcial

Llamaremos *parcial* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a una sucesión $\{x_{n_i}\}_{n_i\in\mathbb{N}}$ donde $n_i < n_{i+1}$.

2 Notación

Existen diferentes notaciones y nociones de sucesión en matemáticas, dependiendo del área de estudio, algunas de las cuales (como por ejemplo sucesión exacta) no quedan comprendidas en la notación que se introduce a continuación.

Se puede usar la notación (a_n) para indicar una sucesión, en donde a_n hace referencia al elemento de la sucesión en la posición *n*.

Ejemplo. Retomando el ejemplo de los números positivos pares, si denotamos dicha sucesión por (p_n) :

$$(p_n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...$$

entonces

$$p_1 = 2, p_2 = 4, p_3 = 6, p_4 = 8, \ldots.$$

En el caso de que los elementos de la sucesión queden determinados por una regla, se puede especificar la sucesión haciendo referencia a la fórmula de un término arbitrario. **Ejemplo**. La sucesión anterior (p_n) puede especificarse mediante la fórmula $p_n = 2n$.

No es infrecuente encontrar sucesiones en donde los subíndices denotando posiciones inician desde cero, en vez desde uno, particularmente en matemática discreta o en ciencias de la computación. También se puede usar una variable distinta a *n* para denotar el término general, cuando así convenga para evitar confusión con otras variables.

En la literatura es posible encontrar una gran variedad de notaciones alternativas. Por ejemplo, uso de llaves en vez de paréntesis, o indicaciones de los *límites* mediante variantes de super y subíndices, a continuación se muestran algunos pocos ejemplos:

- $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$
- $(a_k)_{k=1}^m = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \ldots,$

3 Sucesiones numéricas

Una **sucesión numérica** se formaliza como una aplicación de los números naturales sobre otro conjunto numerico, así por ejemplo:

$$\begin{array}{llll} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \to & a_n \end{array}$$

Una sucesión de **N** sobre **N**, como la sucesión de Fibonacci.

Si la sucesión numérica se formaliza como una aplicación de los números naturales en los números reales, es decir :

$$\begin{array}{llll} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n \end{array}$$

En cualquier caso se denota simplemente como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, si se da por entendido que los subíndices son enteros, también se denota como $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

El nombre que recibe la sucesión también puede hacer referencia a los valores que toma sobre los reales; así, si la imagen de a fuesen los racionales, es decir fracciones enteras del tipo $\frac{x}{y},\ y{\neq}0$, se puede llamar sucesión de números racionales, y lo mismo para los irracionales, naturales, enteros, algebraicos, trascendentes, ...

Puede ser creciente o decreciente. Las hay en progresión aritmética o en progresión geométrica, la diferencia básica es que en la sucesión aritmética la razón de cambio entre un miembro y otro es la suma o resta de la misma razón, y en la sucesión geométrica el siguiente número de la sucesión se logra por multiplicar o dividir la razón de cambio. En cualquier caso la razón de cambio es constante y no puede variar, a menos que el cambio de la razón también corresponda a una sucesión, lo que supone tener una sucesión dentro de otra sucesión.

El término general de la sucesión queda definido de forma *implícita* si su valor depende de sus predecesores. En general, dados previamente los valores de $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n$, podemos definir el término general de forma inductiva como $a_{i+1} = f(a_{i-n},\ \ldots\ , a_i),\ i \geq n$ como por ejemplo con la ecuación en recurrencias $a_{i+1} = b_0 a_{i-n} + \ldots + b_n a_i + c_n,\ i \geq n,\ b_0,\ \ldots\ ,\ b_n,\ c_n \in \mathbb{R}$.

3.1 Tipos

3.1.1 Sucesión finita

Se dice que una sucesión es finita si determinamos su último término, por ejemplo el *n*-ésimo:

> Genéricamente: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_i,\ \ldots\ ,\ a_n$, donde a_i sería el término general si hiciese falta.
>
> ejemplo: 100, 99, 98, ... , 1, 0

3.1.2 Sucesión constante

Se dice que una sucesión es constante si todos los términos valen un mismo valor, k , es decir, un mismo número real cualquiera, ejemplo:

$$a_0 = k,\ a_1 = k,\ a_2 = k,\ a_3 = k,\ \ldots\ ,\ a_n = k,\ \ldots$$

$$k = 1$$

Apéndice A

Inducción Matemática.

Consideremos por un momento el polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$. Sustituyendo $x = 1, 2, 3 \ldots$ obtenemos los valores

x	$x^2 + x + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71

Observemos que todos los valores obtenidos son números primos. ¿Será cierto que para cualquier entero x el valor que se obtiene es un número primo? Responderemos esta pregunta más adelante.

A.1 **(Yuc-98)** Considera un triángulo rectángulo isósceles con catetos iguales a 1. Sobre la hipotenusa de éste se levanta un segundo triángulo rectángulo de cateto igual a 1, como se muestra en la figura, sobre la hipotenusa de este nuevo triángulo se levanta un tercer triángulo rectángulo y así sucesivamente. Encuentra la longitud de la hipotenusa del triángulo número 1998.

Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que la primera hipotenusa vale $\sqrt{2}$, la tercera vale $\sqrt{3}$, la cuarta vale $\sqrt{4}$. Si este patrón continuara, obtendríamos que la hipotenusa del triángulo 1998 sería $\sqrt{1999}$. Pero, ¿podemos asegurar que este patrón realmente continúa?

A.1. El método de Inducción Matemática.

En muchos problemas necesitamos demostrar que una propiedad que depende de un número entero n se cumple para todos los enteros positivos. La técnica canónica que usaremos para lograr este objetivo se denomina *inducción matemática*.

En su forma simple, este método consta de dos etapas:

1. Se verifica que la propiedad se cumple para un valor inicial ($n = 1$).
2. Se demuestra que si la propiedad se cumple para algún entero k, entonces se cumple para el siguiente ($k + 1$).

Una vez verificados esos 2 requisitos, podemos asegurar que la propiedad se cumple para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Veamos un ejemplo práctico antes de analizar porqué funciona el método.

En el problema del triángulo, queremos comprobar la propiedad

La hipotenusa del triángulo n es $\sqrt{n+1}$.

Notemos que la propiedad depende de un y sólo un número entero, el valor de n. Esto es un indicador de que el método de inducción matemática podría ser apropiado.

La primera etapa pide mostrar que la propiedad se cumple para $n = 1$, es decir, que la hipotenusa del primer triángulo es $\sqrt{2}$, lo cual es cierto en virtud del Teorema de Pitágoras.

En la segunda etapa, imaginamos que ya sabemos que la propiedad se cumple para algún valor k (o sea, la hipotenusa del triángulo k es $\sqrt{k+1}$). Queremos probar que la propiedad también se cumple para $k + 1$ (o sea, la hipotenusa del triángulo $k + 1$ es $\sqrt{k+2}$).

Para calcular la hipotenusa del triángulo $k+1$ aplicamos el Teorema de Pitágoras. Uno de sus catetos es 1, y el otro es la hipotenusa del triángulo anterior, el cual estamos suponiendo que vale $\sqrt{k+1}$. Entonces

$$hipotenusa = \sqrt{1^2 + (\sqrt{k+1})^2} = \sqrt{1 + k + 1} = \sqrt{k+2}.$$

Comprobamos que *si* la propiedad se cumple para un entero k, se cumple para $k + 1$. Entonces la inducción matemática nos garantiza que la propiedad *siempre* se cumple, y ya somos capaces de asegurar que la hipotenusa del triángulo 1998 es $\sqrt{1999}$.

¿Porqué funciona el método?

Este proceso puede compararse a una escalera, donde la primera etapa nos da el primer peldaño, y la segunda etapa construye nuevos peldaños a partir de los anteriores.

La primera etapa prueba que la propiedad se cumple para $n = 1$, dándonos un punto de partida. La segunda etapa dice que si sabemos que la propiedad se cumple para algún entero, se cumple para el siguiente. ¡Pero la primera etapa nos dice que la propiedad se cumple para $n = 1$! Entonces podemos asegurar que la propiedad se cumple para el siguiente entero, es decir, $n = 2$. Como la propiedad se cumple para $n = 2$, la segunda etapa nos dice que se cumple para el siguiente, $n = 3$. Como ahora ya sabemos que se cumple para $n = 3$, la segunda etapa nos dice que la propiedad se cumple para $n = 4$, y así sucesivamente.

Esto basta para asegurar que la propiedad se cumple para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, ya que no importa qué número escojamos, en algún momento la escalera "alcanza" ese número.

Variantes del método de inducción.

El análisis del método de inducción sugiere algunas variantes. Por ejemplo, en la primera etapa, el valor inicial no necesariamente tiene que ser 1. Si en la primera etapa probamos (por ejemplo) que la propiedad se cumple para $n = 10$, el método de Inducción nos garantiza que la propiedad se cumple únicamente para $n = 10, 11, 12, \ldots$, y si probásemos que la propiedad se cumple para $n = -3$, el método de Inducción nos garantiza que la propiedad se cumple para $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Sin embargo, en la mayoría de los problemas el paso inicial es $n = 0$ o $n = 1$.

La segunda etapa también es susceptible de modificación. Un ejemplo sería probar que si la propiedad se cumple para algún entero k, se cumple para $k + 2$. En este caso, suponiendo que el valor inicial fuese $n = 1$, habríamos probado que la propiedad se cumple para $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$ (Cerciorarse de este hecho). Sin embargo, las modificaciones a la segunda etapa son bastante raras, y con frecuencia pueden evitarse escogiendo adecuadamente la variable de inducción.

Importancia de las dos etapas.

Si bien es cierto que la segunda etapa es la que "demuestra" que la propiedad se cumple, la primera tiene una importancia fundamental. Un error común es dar por sentada la primera parte del método y comprobar únicamente la segunda. Este es un error que se debe evitar, pues es necesario tener un punto inicial para que la inducción pueda funcionar. Consideremos el siguiente ejemplo.

En el problema del triángulo, imaginemos que equivocadamente hubiéramos notado que la hipotenusa del triángulo n era $\sqrt{n-1}$.

En la segunda etapa suponemos que la propiedad se cumple para un k e intentamos probar que también se cumple para $k + 1$. Usando el Teorema de

Pitágoras:

$$hipotenusa = \sqrt{1^2 + (\sqrt{k-1})^2} = \sqrt{1+k-1} = \sqrt{k}.$$

y concluimos que la hipotenusa el triángulo n es ¡¡$\sqrt{n-1}$ en vez de $\sqrt{n+1}$!!.

El error provino de omitir la primera etapa, que es la que nos provee de una base verdadera para que la segunda etapa construya una escalera de verdades.

Analicemos ahora el problema del polinomio. Después de probar los primeros 20 números obtenemos siempre números primos (esto equivaldría a realizar la primera etapa), sin embargo, como nos es difícil probar la segunda parte, nos vemos tentados a decir “después de hacer muchos casos, concluimos que el polinomio siempre devuelve números primos”. Este es un error aún más grande que el anterior, pues

$$p(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41{\cdot}43$$

y tenemos que el polinomio no siempre genera números primos. La moraleja es que si algún patrón parece repetirse de manera constante, es bueno señalarlo, pero hasta no realizar ambos pasos de la inducción no podemos garantizar que la propiedad siempre se cumple (aunque la comprobemos en muchos casos particulares).

A.2. Problemas y Ejercicios.

A.2 Demostrar que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es $(n-1)180^\circ$.

A.3 Demostrar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\\
1+3+5+7+\cdots+(2n-1) &= n^2
\end{aligned}$$

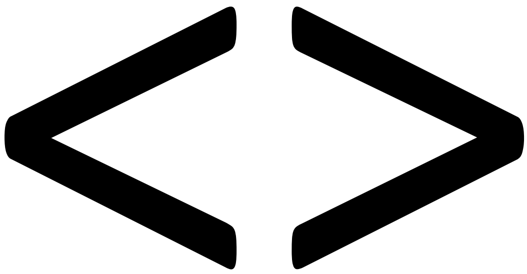
A.4 Verifica que

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

A.5 Todos los números de la forma $1007, 10017, 100117, 1001117, \ldots$ son divisibles entre 53.

A.6 Se tienen $2n$ puntos, y de todos los segmentos que los unen se colorean n^2+1. Prueba que existen 3 puntos tales que los 3 segmentos que los unen están pintados.

Desigualdad matemática



En matemáticas, una **desigualdad** es una relación de orden que se da entre dos valores cuando éstos son distintos (en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad).

Si los valores en cuestión son elementos de un conjunto ordenado, como los enteros o los reales, entonces pueden ser comparados.

- La notación $a < b$ significa a es **menor que** b;
- La notación $a > b$ significa a es **mayor que** b;

estas relaciones se conocen como **desigualdades estrictas**, puesto que a no puede ser igual a b; también puede leerse como "estrictamente menor que" o "estrictamente mayor que".

- La notación $a \leq b$ significa a es **menor o igual que** b;
- La notación $a \geq b$ significa a es **mayor o igual que** b;

estos tipos de desigualdades reciben el nombre de **desigualdades amplias** (o *no estrictas*).

- La notación $a \ll b$ significa a es **mucho menor que** b;
- La notación $a \gg b$ significa a es **mucho mayor que** b;

esta relación indica por lo general una diferencia de varios órdenes de magnitud.

- La notación $a \neq b$ significa que a **no es igual** a b. Tal expresión no indica si uno es mayor que el otro, o siquiera si son comparables.

1 Propiedades

Las desigualdades están gobernadas por las siguientes propiedades. Notar que, para las propiedades transitividad, adición, sustracción, multiplicación y división, la propiedad también se mantiene si los símbolos de desigualdad estricta ($<$ y $>$) son reemplazados por sus correspondientes símbolos de desigualdad no estricta ($\leq$ y $\geq$).

Transitividad

- Para números reales arbitrarios a,b y c:
  - Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
  - Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
  - Si $a > b$ y $b = c$ entonces $a > c$.
  - Si $a < b$ y $b = c$ entonces $a < c$.

Adición y sustracción

- Para números reales arbitrarios a,b y c:
  - Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.
  - Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.

Multiplicación y división

- Para números reales arbitrarios a y b, y c diferente de cero:
  - Si c es positivo y $a < b$ entonces $ac < bc$ y $a/c < b/c$.
  - Si c es negativo y $a < b$ entonces $ac > bc$ y $a/c > b/c$.

Opuesto

- Para números reales arbitrarios a y b:
  - Si $a < b$ entonces $-a > -b$.
  - Si $a > b$ entonces $-a < -b$.

Recíproco

- Para números reales a y b distintos de cero, ambos positivos o negativos a la vez:
  - Si $a < b$ entonces $1/a > 1/b$.
  - Si $a > b$ entonces $1/a < 1/b$.
- Si a y b son de distinto signo:
  - Si $a < b$ entonces $1/a < 1/b$.
  - Si $a > b$ entonces $1/a > 1/b$.

1.1 Función monótona

Al aplicar una función monótona creciente a ambos lados, la desigualdad se mantiene. Si se aplica una función monótona decreciente, la desigualdad se invierte.

Ejemplo

$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$

al aplicar la función exponencial a ambos miembros de la desigualdad, esta se mantiene.

1.2 Valor absoluto

Se puede definir el valor absoluto por medio de desigualdades:

- $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b \iff -b \geq a \vee a \geq b$

2 Cuerpo ordenado

Si (F, +, ×) es un cuerpo y ≤ es un orden total sobre F, entonces (F, +, ×, ≤) es un *cuerpo ordenado* si y solo si:

- $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$;
- $0 \leq a$ y $0 \leq b$ implica $0 \leq a \times b$.

Los cuerpos (**Q**, +, ×, ≤) y (**R**, +, ×, ≤) son ejemplos comunes de cuerpo ordenado, pero ≤ no puede definirse en los complejos para hacer de (**C**, +, ×, ≤) un cuerpo ordenado.

Las desigualdades en sentido amplio ≤ y ≥ sobre los números reales son relaciones de orden total, mientras que las desigualdades estrictas < y > sobre los números reales son relaciones de orden estricto.

3 Notación encadenada

La notación **a < b < c** establece que a < b (a menor que b) y que b < c (b menor que c) y aplicando la propiedad transitiva anteriormente citada, puede deducirse que a < c (a menor que c). Obviamente, aplicando las leyes anteriores, puede sumarse o restarse el mismo número real a los tres términos, así como multiplicarlos o dividirlos todos por el mismo número (distinto de cero) invirtiendo las inecuaciones según su signo. Así, $a < b + e < c$ es equivalente a $a - e < b < c - e$.

Esta notación se puede extender a cualquier número de términos: por ejemplo, $\mathbf{a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n}$ establece que $a_i \leq a_{i+1}$ para i = 1, 2, ..., n−1. Según la propiedad transitiva, esta condición es equivalente a $ai \leq aj$ para cualesquiera $1 \leq i \leq j \leq n$.

Ocasionalmente, la notación encadenada se usa con inecuaciones en diferentes direcciones. En ese caso el significado es la conjunción lógica de las desigualdades entre los términos adyacentes. Por ejemplo:

a < b = c ≤ d

significa que a < b, b = c, y c ≤ d (y por transitividad: a < d). Esta notación es utilizada en algunos lenguajes de programación tales como Python.

4 Desigualdades entre medias

Las distintas medias pueden relacionarse utilizando desigualdades. Por ejemplo, para números positivos a_1, a_2, …, an, si

entonces: $H \leq G \leq A \leq Q$.

5 Véase también

- Inecuación
- Programación lineal
- Teoría del orden
- Categoría:Desigualdades (para una lista de desigualdades conocidas)

6 Bibliografía

- Hardy, G., Littlewood J.E., Polya, G. (1999). *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press. ISBN 0-521-05206-8.

PARIDAD

"Todo número natural es par o impar"

Esta afirmación es una de las más simples y conocidas en matemáticas, pero también es una herramienta muy útil para resolver problemas que involucran números naturales.

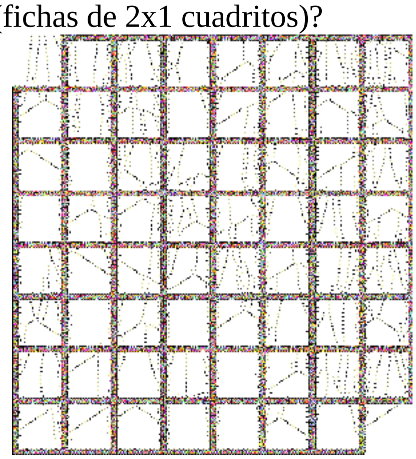
Relacionados a la afirmación anterior se encuentran también:
La suma de dos números pares es par.
La suma de dos números impares es par.
La suma de un par y un impar es impar.
También diremos que dos números tienen la misma paridad si ambos son pares o impares.

Usos de la Paridad

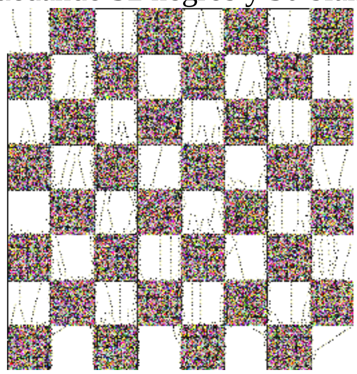
Ejemplo 1
María y sus amigos están sentados formando un círculo, de forma que los dos vecinos de cada amigo son del mismo sexo. Si de los amigos de María 5 son hombres. ¿ Cuantas mujeres hay?
Solución:
Hay 5 mujeres. Para ver esto recordemos que los vecinos de cualquier persona son del mismo sexo, por lo que las mujeres y los hombres están alternados, entonces hay la misma cantidad de hombres que de mujeres.

Ejemplo 2
Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamiento de 3, 5 y 7 Km. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 km. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?
Solución:
No es posible. En cada sesión debe nadar un número impar de kilómetros y la suma de un número par de impares es par, por lo que nunca podrá ser 35.

Ejemplo 3
A una cuadrícula de 8X8 cuadritos se le retiran dos cuadritos de esquinas opuestas, ¿Puede ser cubierta con 31 dominós (fichas de 2x1 cuadritos)?

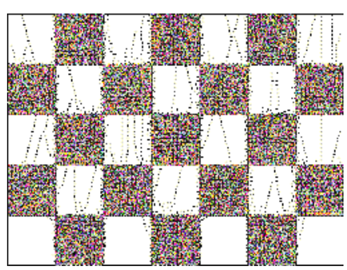


Solución:
La respuesta es no. Un artificio para resolverlo es pensar en la cuadrícula coloreada como un tablero de ajedrez, esto es, los cuadritos coloreados en forma alternada con dos colores: blanco y negro. En el tablero completo, con 64 cuadritos, quedan coloreados 32 cuadritos de color blanco y 32 de negro. Al retirar dos esquinas opuestas, se están retirando dos cuadritos de un mismo color. Quedando 32 negros y 30 blancos.



Por otro lado, un dominó cubre dos cuadritos: uno de cada color. Las 31 fichas de dominó que se tienen, solamente pueden cubrir un número impar de cuadritos de color negro (exactamente 31 cuadritos de color negro), y debemos cubrir una cantidad par de cuadritos negros: 32, por lo que es imposible cubrir la cuadrícula como se pide, de hecho, siempre faltará por cubrir un cuadrito negro.

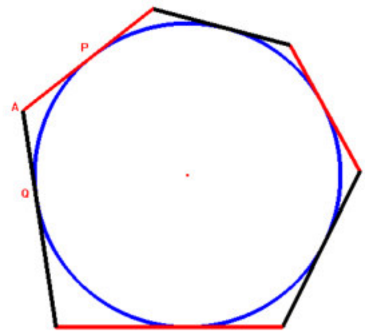
Ejemplo 4
En un salón de clase están sentados los alumnos formando un arreglo rectangular de 5 x 7. La maestra que quiere hacer una dinámica las pide a todos los alumnos que cambien de lugar, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o hacia atrás. Pepito que sabe de matemáticas le dice que esto es imposible, ¿Porqué tienen razón Pepito?
Solución:
Tomemos una cuadrícula de 5 x 7 (cada casilla es un lugar), y coloreada a la manera del tablero de ajedrez, entonces observemos que si te encuentras en casilla coloreada y te mueves un lugar de la manera antes descrita, pasarás a una casilla que no está coloreada y viceversa.



Pero sucede que el arreglo tiene 18 casillas coloreadas y 17 que no lo están, por lo que los que están en casilla coloreada no podrán ocupar las 17 que no lo están.

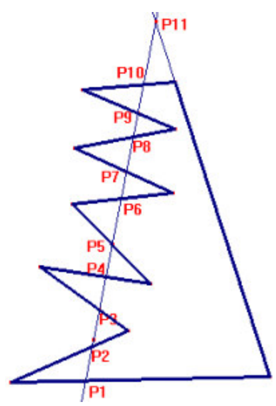
Nota: *Si los objetos se pueden agrupar en parejas, entonces el número de objetos es par. O bien, si se han agrupado varias parejas de objetos de un número impar de objetos, entonces al menos un objeto quedará sin pareja.*

Ejemplo5
Un polígono con un número par de lados se circunscribe a una circunferencia. Los lados se colorean alternadamente de negro y rojo. ¿Es la suma de las longitudes de lados rojos igual a la de las longitudes de los lados negros?
Solución:
Si, son iguales. Primero observemos que al ser un número par de lados y al ser coloreados alternadamente, siempre un lado tiene por vecinos a dos de distinto color. También vemos que a cada vértice convergen dos lados de distinto color.



Sí A es uno de los vértices y P y Q son los puntos de tangencia de tales lados, se conoce de geometría que AP = AQ; como uno de los segmentos es rojo y el otro es negro, tenemos después de recorrer los vértices del polígono y sumar las longitudes de las tangentes, que la suma de los las longitudes de los lados rojos es igual a la suma de las longitudes de los lados negros.

Ejemplo 6
Once segmentos se conectan formando una poligonal cerrada. ¿Puede una línea que no pase por uno de los vértices cortar a cada uno de los once segmentos en un punto interior?
Solución:

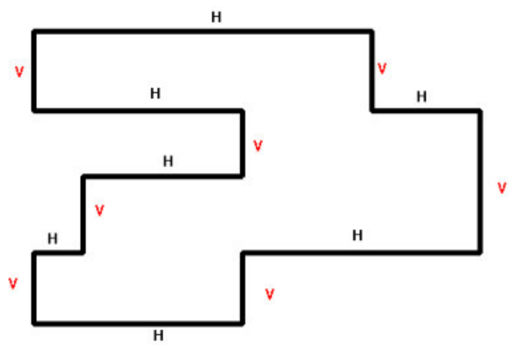


No es posible. Si una línea cumple que corta a los 11 segmentos entonces tenemos 11 puntos de intersección: $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$, ordenados digamos de izquierda a derecha. Ahora, si caminamos sobre la línea de izquierda a derecha, vamos del exterior de la curva hasta P_1, de P_1 a P_2 estamos dentro de la poligonal, de P_2 a P_3 estamos fuera de ella, así sucesivamente hasta llegar a que de P_{10} a P_{11} estamos fuera y entonces al cruzar por P_{11} debemos entrar, pero de P_{11} hacia la derecha estamos fuera, luego hay una contradicción.

Ejemplo 7
¿Es posible dibujar una línea quebrada de 11 segmentos, cada uno de los cuales se intersecta (internamente) exactamente con uno de los otros dos segmentos?
Solución:

No es posible. Si fuera posible, podemos partir los segmentos en parejas de segmentos que se intersecan, como cada segmento se corta con otro segmento y solamente con uno, tendremos que los segmentos se agrupan en parejas y entonces el número de segmentos debe ser par, lo que es una contradicción.

Ejemplo 8
Un polígono cerrado que no se intersecta a si mismo y cuyos lados son verticales u horizontales, tiene un número par de lados.
Solución:



Demos a los lados del polígono una letra de la siguiente manera: H a los horizontales y V a los verticales, las letras H y V también se alternan, y como la figura es cerrada al recorrer los lados si iniciamos en H , debemos de terminar en V, así el recorrido lo podemos realizar por pares de lados HV, por lo que tendrá un número par de lados.

Nota: *si los objetos se pueden ir alternando, siendo estos de dos tipos, tenemos que:*
a) *si iniciamos y terminamos con objetos del mismo tipo, el número total de objetos es par y si*
b) *iniciamos con un objeto de un tipo y terminamos con un objeto del otro tipo, el número de objetos es par*.

Ejemplo 9
Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1 cm, y el segundo 2 cm, y así sucesivamente, ¿Será posible que después de 17 días el gusano se encuentre en el lugar de donde partió?
Solución:
No es posible. Si fuera posible, tenemos que: al conjunto {1,2, . . ,17}, lo podemos dividir en dos conjuntos $\{a_1, . . ., a_n\}$ y$\{b_1, . . ., b_m\}$ denotando las distancias que el gusano va hacia arriba y las cantidades que baja respectivamente. Estas cumplen las siguientes dos cosas:

1) $a_1+ \ldots + a_n=b_1+ \ldots +b_m$
2) $a_1+ \ldots + a_n+b_1+ \ldots + b_m =1+2+3+ \ldots +17=153$

pero la suma de dos números iguales nunca es impar.

Nota:
La suma de un número par de dos números impares es par.
La paridad de la suma de varios números depende de la paridad del número de sumandos impares: si el número de sumandos impares es par (impar), entonces también la suma es par (impar).

En estos problemas se puede observar que los argumentos utilizados permite concluir que las repuestas van en la dirección de "no es posible hacer tal cosa". En la mayoría de las veces, un argumento de paridad sirve exactamente para eso: mostrar que un determinado hecho no puede ocurrir. Esto no debe desanimar, por el contrario, sirve para convencerse y no gastar tiempo en tentativas inútiles. Las experiencia son valiosas en el sentido de abrirnos los ojos para no insistir en caminos donde no hay soluciones y buscar a partir de ahí argumentos que resuelvan definitivamente el problema.

Nota:
Al igual que tenemos las reglas de paridad para la suma de números naturales, tenemos las reglas de la paridad para la multiplicación.
El producto de dos números pares es par.
El producto de dos números impares es impar.
El producto de un número par con un impar es par.