Más rectas notables del triángulo: Simedianas

Entrenamiento extra
Por: Clemente

Resumen

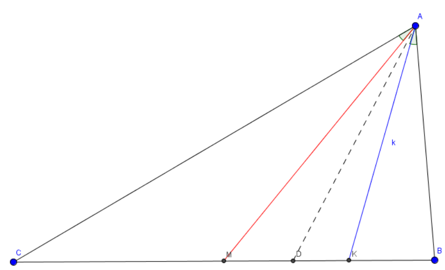
Ha llegado la hora de que conozcas la quinta recta notable del triángulo y añadas más herramientas a tu repertorio geométrico. Esta lista te va a causar mucho problemas, pero espero que la disfrutes.

1. Simediana

Para empezar, recordemos que dos líneas isogonales con respecto al vértice A del triángulo $\triangle ABC$ son rectas que pasan por éste y son simétricas con respecto a la bisectriz. Es decir la bisectriz también bisecta a éstas dos.

Ahora, la simediana del vértice A del triángulo $\triangle ABC$ es la recta isogonal a la mediana de este ángulo. O sea, que es la recta **SI**métrica a la **MEDIANA** con respecto a la bisectriz.

Espero que no tengas problemas para visualizarlo, pero por si acaso, ahí te va un dibujito.



Si te preguntas que por qué no se muestra esta recta durante el entrenamiento normal de puntos y rectas notables del triángulo, es porque:

1. La lista ya está lo suficientemente cargada.
2. Este tema es suficientemente extenso y un poco más avanzado como para requerir su propio tiempo.

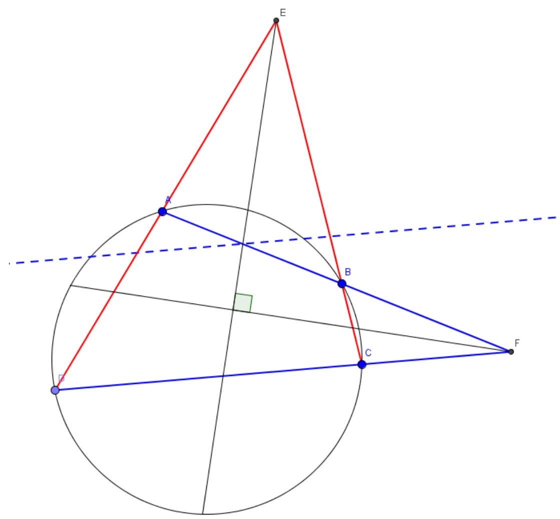
Pero antes de continuar con el estudio de las simedianas, detengámonos primero en una herramienta útil que te servirá mucho al combinarlo con simedianas.

1.1. Antiparalelas

¿Recuerdas qué son? Se vieron brevemente en el entrenamiento de semejanza... No te culpo si no te acuerdas, ni si quiera se mencionó su nombre.

Digamos que tenemos dos pares de líneas no paralelas, el primer par tiene las líneas ℓ_1 y ℓ_2, y el segundo par tiene a las líneas ℓ_3 y ℓ_4. Entonces, si reflejas a ℓ_1 (o ℓ_2) con respecto a la bisectriz de ℓ_3 y ℓ_4, el resultado es una recta paralela a ℓ_2 (o ℓ_1). Y se dice que una recta es antiparalela a otra con respecto al otro par. Una propiedad de estas rectas es que si tenemos las mismas rectas que antes, entonces las bisectrices de los dos pares son perpendicuales.

Aunque lo anterior fue por cultura general, ahora si va lo que es realmente útil: dos pares de rectas son antiparalelas unas con respecto a las otras si y solo si las cuatro intersecciones de un par con el otro forman un cuadrilátero cícliclo. O sea que si tienes un cíclico, puedes prolongar sus lados y conseguir dos antiparalelas. ¡Eso ya suena útil! Aquí te pongo un dibujito que te ilustra los 3 conceptos que te dije hasta ahora.



Ahora, si te fijas se tiene que $\measuredangle ABE = \measuredangle EDC$ por ser $ABCD$ un cíclico. Si te detienes a pensarlo un poquito, se parece que ángulos correspondientes de lineas paralelas... Pero volteados. Esa es una manera fácil de ubicar antiparalelas y es útil, porque tienes dos triángulos semejantes... Pero volteados.

2. Properdiades

Ahora si, ya que definimos las simedianas y las antiparalelas, te van las propiedades de las simedianas, que te serán útiles para resolver problemas con ellas. Recuerda demostrar todas y cada una de ellas.

1. Sea K el punto donde la simediana del vértice A toca el lado BC del triángulo $\triangle ABC$. Entonces
$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$
2. **Simediana externa:** Sea K el punto donde la tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ por el vértice A toca el lado BC. Demuestra que
$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$
3. Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos B y C se intersectan en un puno P. Entonces AP es la simediana del lado BC.

4. En un triángulo $\triangle ABC$ sea D el punto donde la simediana, trazada hacia el lado BC, intersecta al circuncírculo de éste. Entonces CB es simediana del triángulo $\triangle ADC$.

5. La tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ por el punto A intersecta a la línea BC en un punto P. Se traza la otra tangente a la circunferencia desde P y ésta la intersecta en un punto Q. Entonces AQ es simediana del triángulo $\triangle ABC$.

6. En la construcción anterior, se tiene que
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

7. En un triángulo $\triangle ABC$, se trazan las bisectrices interior y exterior del vértice A, cuyas intersecciones con el ládo BC son D y E. Se traza la circunferencia $\mathcal{C}$ de diámetro DE. Demuestra que la cuerda común de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ con $\mathcal{C}$ es simediana de este triángulo. A $\mathcal{C}$ se le conoce como circunferencia de Apolonio del vértice A.

8. En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C, la altura bajada desde C es también la simediana.

9. Las tres simedianas de un triángulo concurren.

10. Una simediana y las otras dos simedianas externas concurren.

11. Los pies de las tres simedianas externas son colineales.

12. Sea L el punto donde concurren las simedianas internas y K el pie de la simediana del vértice A. Encontes
$$\frac{AL}{LK} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

3. Notas, tips y demás

1. Las antiparalelas te sirven de manera muy curiosa, si tienes antiparalelas (por tanto, triángulos semejantes volteados) y la mediana de uno de esos triángulo, entonces para el triángulo volteado esa es su simediana.

2. Si tienes antiparalelas, pero no te sirven, puedes moverlas de lugar a partir de paralelas.

3. Las diagonales de un cuadrilátero cíclico son también antiparalelas con respecto a cualquier par de lados opuestos del cuadrilátero.

4. Esto ya lo deberías de saber, pero te lo recuerdo: busca siempre donde aplicar las propiedades de las simedianas.

5. Chuy dice que si un problema te pide demostrar que una recta corta a otra en su punto medio, consideres usar simedianas.

4. Agregados culturales

1. A la intersección de las simedianas se le llama Punto de Lemoine.

2. También existe el concepto de mediana externa. Es, de manera análoga, el conjugado isogonal de la simediana externa con respecto al ángulo externo del vértice A.

3. Por si no sabes qué onda: la mediana externa es la recta paralela al lado BC que pasa por A.

5. Problem's

1. La recta ℓ es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en ℓ pasa por A y corta l en los puntos C y D. Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersectan en N. Demuestra que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.

2. Sea N el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ trazadas por los puntos B y C. Sea M un punto en la circunferencia de tal manera que AM es paralelo a BC y sea K el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demuestra que KA divide BC por la mitad.

3. Desde un punto A exterior a una circunferencia están trazadas las tangentes AM y AN. También desde A se traza una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L. Trazamos una recta arbitraria ℓ paralela a AM. Supongamos que KM y LM cortan ℓ en los puntos P y Q. Demuestra que la recta MN divide el segmento PQ por la mitad.

4. Sea AD una altura de un triángulo $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y AC en K y L, respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersectan en un punto M. Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.

5. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC < 90°$. La recta por D y el punto medio de BC intersecta a la recta AB en un punto E. Demuestra que $\measuredangle BEC = \measuredangle DAC$.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, y los ángulos en A y B rectos. Sea M el punto medio de AB y el ángulo $\measuredangle CMD = 90°$. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo $\measuredangle AKB$ es recto y que
$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1$$

7. Se considera el triángulo $\triangle ABC$ y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita. Demuestra que
$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

8. Las tangentes en B y C al circuncírculo de un triángulo $\triangle ABC$ se cortan en X. Sea M el punto medio de BC. Probar que
$$\frac{AM}{AX} = \cos(\measuredangle BAC)$$

9. Dado un triángulo $\triangle ABC$ y su cincuncírculo Ω, denotaremos con A' el punto de intersección de las tangentes a Ω en B y C. Definimos B' y C' de manera similar. Sea K el punto de concurrencia en de AA', BB', CC' y sea G el centroide del triángulo $\triangle ABC$. Demuestra que KG es paralela a BC, si y sólo si $2a^2 = b^2 + c^2$, donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$.

10. **(IMO, 2003)** El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Los pies de las perpendiculares desde D hacia las líneas AB, BC, CA, son P, Q, R, respectivamente. Demuestra que las bisectrices de las ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CDA$ se intersectan sobre la línea AC si y sólo si $RP = RQ$.

11. Desde A se trazan tangentes AB y AC a una circunferencia; sea PQ un diametro; ℓ una linea tangente a la circunferencia en Q. Las lineas PA, PB y PC intersectan ℓ en A_1, B_1 y C_1. Demuestra que $A_1B_1 = A_1C_1$.

12. Sea ω el circuncírculo del $\triangle ABC$. T es la intersección de las lineas que son tangentes a ω en B y C. AT curta BC en M. Sean P y Q puntos en AB y AC tales que MP es paralela a AC y MQ es paralela a AB. Demuestra que BCQP es un cuadrilátero cíclico.

6. Jarcors

1. Un hexágono convexo $ABCDEF$ está inscrito en una circunferencia de tal manera que $AB = CD = EF$ y las diagonales AD, BE y CF concurren en un punto. Sea P el punto de intersección de AD y CE. Demuestra que
$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2$$
.

2. Dos circunferencias se intersectan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que $\measuredangle B > 90^\circ$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Demuestra que $\measuredangle BCF = \measuredangle ACD$.

4. **(Polonia, 2000)** Sea $\triangle ABC$ con $AC = BC$ y P un punto en su interior tal que $\measuredangle PAB = \measuredangle PBC$. Si M es el punto medio de AB, muestra que $\measuredangle APM + \measuredangle BPC = 180^\circ$

5. **(Vietnam TST, 2001)** Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B y sea PQ su tangente común. Las tangentes en P y Q al circuncírculo del $\triangle PAQ$ se intersectan en S. Si H es la reflexión de B con respecto a PQ, prueba que A, S y H son colineales.