TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA FINAL
Sábado 17 junio

Elaborado por: Gustavo Meza García

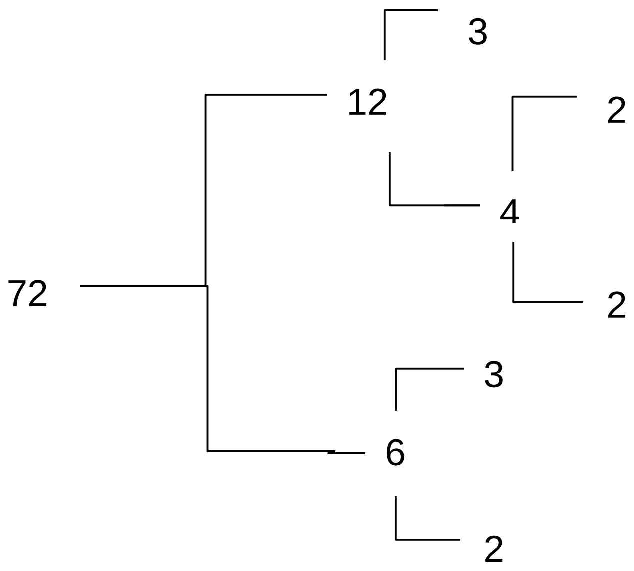
Teoría de Números

Números primos

Definición: Un número primo es un número que tiene exactamente 2 divisores positivos.
Ejemplo: 12 no es un número primo, porque 1, 2, y 12 dividen a 12, 7 es un número primo, porque ningún número menor a él lo divide más que el 1.
Ejercicio: Identifica cuáles de los siguientes números son primos. 1, 2, 9, 13, 51, 91, 1001.
Definición: Factorizar en primos un número significa encontrar primos que al multiplicarlos dé como resultado el número.
Teorema: (Teorema Fundamental de la Aritmética) Todo número mayor a 1 se puede factorizar en primos.

> **Demostración:** Dado el número N hay de 2 opciones, N es primo (Ya acabamos), N no es primo por lo que N = ab para algunos a,b diferentes de 1 y N, si hacemos lo mismo para a y luego para b, habremos factorizado N.

Ejemplo: Factorizar el número 72.



$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

Ejercicio: Factorizar el número 60
Nota: Hay una segunda parte del teorema fundamental de la aritmética que por ahora tomaremos como cierta. Esta dice que la factorización es única.
Teorema: Existen infinitos primos.

> **Demostración:** Para demostrar esto supongamos lo contrario, hay una cantidad finita de primos. Escribamos en una lista todos los primos, sea P el producto de todos esos primos, P+1 no es divisible entre ningún primo de la lista, pero todo número es producto de primos, por lo que debe haber primos que no están en esa lista, una contradicción. Como nuestra suposición nos llevó a una contradicción, entonces esta era falsa y hay infinitos primos.

Ejemplo: ¿1009 es primo?

> Una primera idea es probar con todos los números menores a 1009 y ver si alguno lo divide.

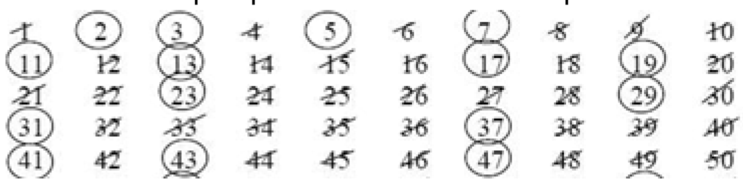
Luego se nos ocurre la siguiente idea: Basta con probar con los números menores a 32 (Aproximadamente la raíz cuadrada de 1009). Esto se debe a que un número mayor a 32 necesita un número menor a 32 para que su producto sea 1009. (Si multiplicas dos números mayores a 32 el resultado es mayor a 1024)

Por último, vemos que por el TFA basta con probar solo con los números primos. Lo que nos deja solo con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 como opciones.

Ejercicio: ¿2017 es primo? ¿961 es primo?

Ejemplo: Determinar los números primos menores a 50.

El algoritmo de la Criba de Eratóstenes nos permitirá hacer esto de manera eficiente.
Empecemos con los números del 1 al 50.
El 1 sabemos no es primo, lo tachamos.
El 2 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
El 3 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
El 5 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
El 7 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
Hemos acabado, pues 8 se pasa de la raíz cuadrada de 50.
Los números que quedaron sin tachar son primos.



Ejercicio: Encuentra todos los números primos menores a 100. (Si acomodas los números en una tabla con 6 columnas será más fácil)

Ejercicio: ¿Por qué podemos detenernos cuando pasamos la raíz cuadrada?

Observación: El número 12 tiene factorización en primos 2^2x3, y el número 60 tiene factorización 2^2x3x5. Podemos ver que el 12 “forma parte” del 60, es decir 60 = 12x5, por lo que 12 es divisor de 60. Podemos generalizar esto de la siguiente forma “Cualquier divisor a de m se puede conseguir mediante el agrupamiento de algunos de sus factores primos”.

Ejemplo: Escribir todos los divisores de 12.

La factorización en primos del 12 es 2^2x3, obtendremos todos sus divisores formando todos los posibles agrupamientos.

$2^0x3^0 = 1$
$2^0x3^1 = 3$
$2^1x3^0 = 2$
$2^1x3^1 = 6$
$2^2x3^0 = 4$
$2^2x3^1 = 12$

Ejercicio: Encuentra todos los divisores del 60.

Definición: El máximo común divisor de 2 números a y b, es el número más grande que divide tanto a a como a b, se escribe mcd(a,b) o simplemente (a,b).

Definición: El mínimo común múltiplo de 2 números a y b, es el número positivo más pequeño que es múltiplo tanto de a como de b, se escribe mcm[a,b] o simplemente [a,b].

Ejercicio: ¿Cuál es el máximo común múltiplo y el mínimo común divisor de 2 números?

Ejemplo: Calcular mcd(12, 90)

La factorización en primos de 12 es 2^2x3 y de 90 es $2x3^2x5$.

Como debe ser un divisor de 12 entonces puede tener a lo más dos 2’s y a lo más un 3.

Como debe ser un divisor de 90 entonces puede tener a lo más un 2, a lo más dos 3's y a lo más un 5.

Como debe cumplir ambas condiciones entonces puede tener a lo más un 2 y a lo más un 3. El número más grande que cumple esto es el 2x3 = 6.

Observación: Esto se puede ver como que el mcd se queda con las potencias más chicas.

Ejercicio: Calcular mcd(18, 84)

Ejercicio: Obtener el mcm[12, 90] como con el mcd pero conservando las potencias más grandes.

Problemas

1. ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{2017} x 5^{2020}?
2. ¿Cuántos 0's hay al final de 10!? (N! = N(N-1)(N-2)...(3)(2)(1))
3. ¿Cuántos 0's hay al final de 100!?
4. ¿Cuántos divisores tiene el 10!?
5. ¿Cuánto es el producto de los divisores de 10!?
6. Demuestra que si 12|n y 18|n, entonces 36|n
7. Demuestra que si n|12 y n|18, entonces n|6
8. Demuestra que mcd(a,b) * mcm[a,b] = ab.

B6: (G1) Si $2^n - 1$ es primo entonces n es 2 o n es impar.

B7: (G1) Si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo.

B8: (G1) Si $2^n + 1$ es primo entonces n es potencia de 2.

B10: Probar que si t es entero mayor a uno, el número $t^{4m} + t^{2m} + 1$ nunca es primo.

9. ¿Cuánto es la suma de los divisores de 10!?
10. Demuestra que $n^3|m^3$ si y sólo si n|m