Números primos y divisibilidad
3^{ro} de secundaria

Joshua S. González Torres Olimpiadas Básicas de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
11 de febrero de 2022

---

1. Teoría

El primer concepto del entrenamiento de hoy será el de divisibilidad.

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Diremos que un entero a es *divisible* entre un entero b si y sólo si existe un entero k tal que $a = bk$. Hay varias maneras de expresar esto: "a divide a b", "a es divisor de b", "b es divisible entre a".

Como ya habrán notado, no siempre existe este número k, sin embargo, podemos reescribir la manera en que dividimos a entre b:

$$a = bk + r,$$

donde r es el "residuo" de la división y cumple que $0 \leq r < b$. Con la resolución de problemas notarán la utilidad de esta representación de la división.

Uno de los pilares más importantes de la aritmética es la definición de números primos y las cosas que podemos construir con ellos.

Definición 2 (Número primo)**.** Un número primo es un número entero positivo que tiene *exactamente* dos divisores positivos.

Es importante que, durante toda su participación en la olimpiada, se apeguen a esta definición por razones que se explicarán dentro de un par de párrafos.

El 1 no es primo.

Aunque parezca trivial, es una aclaración importante para uno de los teoremas más importantes de la Teoría de números.

Teorema 1 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** Todo número natural (a excepción del 1) puede expresarse como una única factorización en números primos y ésta es única para cada número. A esta factorización se le conoce como *factorización canónica*.

En pocas palabras, el teorema anterior nos dice que todo número es una combinación única de primos a diferentes potencias. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 1001 &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \\ 2017 &= 2017 \end{aligned}$$

Por esto es que el 1 no puede ser primo: si lo fuera, entonces $2 \cdot 1 \neq 2$, pero eso es una contradicción, por lo que no se le considera primo.

Cuando revisamos divisibilidad, lo hacemos de forma poco elegante: hacemos la división y si el residuo sale 0, entonces sí es divisible. Sin embargo, esto tiene la división misma como fuente de error, además de no ser del todo funcional cuando tenemos números muy grandes o de forma desconocida. Una propiedad interesante que tienen los primos es que pueden generar lo que se conocen como *criterios de divisibildad*.

Definición 3 (Criterio de divisibilidad)**.** Diremos que una afirmación es un *criterio de divisibilidad de a* si resulta cierta para un número b si y sólo si b divide a a.

Esta definición puede verse un poco nublada, pero quedará más clara con los ejemplos a continuación:

Criterio del 2: Un número es divisible entre 2 si el dígito de sus unidades es par (0, 2, 4, 6, 8).

Criterio del 3: Un número es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

Criterio del 4: Un número es divisible entre 4 si el número conformado por los últimos 2 dígitos es múltiplo de 4.

Criterio del 5: Un número es divisible entre 5 si el dígito de sus unidades es 5 ó 0.

Criterio del 6: Un número es divisible entre 6 si cumple los criterios del 2 y el 3.

Criterio del 8: Un número es divisible entre 8 si el número conformado por los últimos 3 dígitos es múltiplo de 8.

Criterio del 9: Un número es divisible entre 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.

Criterio del 10: Un número es divisible entre 10 si su último dígito es 0.

Criterio del 11: Un número es divisible entre 11 si la diferencia entre la sumas alternadas de sus dígitos es un múltiplo de 11.

2. Problemas, yei

Problema 1. Usando lo más posible de criterios de divisibilidad, factorice en primos el número 131220. También el 45753125

Problema 2. Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falsa:

- La suma de las cifras del número es 6.
- Dos de las cifras del número son iguales.
- El número es menor que 110.
- El número es mayor que 40.

- El número es primo.

¿Cuál es el número de mi casa?

Problema 3. Si el número de 5 dígitos $35aaa$ es divisible por 11, ¿cuál es el dígito a?

Problema 4. Christóforo tiene cierta cantidad de dinero y está conformada por los dígitos 2, 4, 1, 5, 3 y 3 en algún orden. La cantidad es múltiplo de 8, 9 y 11. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que puede tener Christóforo?

Problema 5. El faraón Tutankamón lleva más de 1000 años enterrado, pero menos de 10000. Un historiador quiere escribir la cantidad de años, pero sólo escribe $5abc$. Si recuerda que el número es divisible entre 2, 5, 9 y 11, ¿cuánto lleva enterrado el faraón?

Problema 6. Cuando multiplicamos las edades de Alma y sus dos hijas gemelas, obtenemos 8325. ¿Cuánto obtenemos cuando las sumamos?

Problema 7. El número $58abc$ es divisible entre 330, pero no entre 660. ¿Cuánto vale $a+b+c$?

Problema 8. ¿Cuántos 0's tiene al final el número $30!$.

Problema 9. El número 2860 se escribe como multiplicación de 4 números enteros positivos a, b, c y d, de tal forma que ninguna de ellos es igual a 1. ¿Cuál es el máximo valor de $a+b+c+d$?, ¿y el mínimo?

Problema 10. Si el número $a364054898129906 44b$ es un múltiplo de 99, ¿cuál es el valor de a y b?