NÚMEROS PRIMOS

Daniela Maribel Trancoso Cervantes

1. Primos

En teoría de números, los primeros números que se estudian son los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Son los números que utilizamos para contar, incluso podemos pensar que son los primeros números que existieron. Si tomamos uno de estos números y lo expresamos como una multiplicación, el 72 por ejemplo, se puede escribir como: $72 = 9 \times 8$, pero el 9 se puede expresar como otra multiplicación, al igual que el 8, entonces $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 4$, y sucede que el 4 también se puede expresar como una multiplicación, de esta forma $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$. Podríamos multiplicar por 1, pero no tiene mucho sentido. Estos números obtenidos al final, 3 y 2, se llaman **números primos**.

Un **número primo** es un número mayor a 1 y que tiene exactamente dos divisores: 1 y él mismo. Sabemos que todo número es múltiplo de él mismo y de 1, es decir, todos los números tienen estos divisores, los cuales son conocidos como divisores triviales. Aquellos números que no tengan más divisores son los números primos. Revisemos algunos números:

Número	Divisores	¿Es primo?
1	1	**NO**, porque un número primo es mayor a 1
2	1,2	**SÍ**
3	1, 3	**SÍ**
4	1, 2, 4	**NO**
5	1, 5	**SÍ**
6	1,2, 3, 6	**NO**
7	1, 7	**SÍ**
8	1,2, 4, 8	**NO**
9	1, 3, 9	**NO**
10	1, 2, 5, 10	**NO**

Los números primos entre el 1 y el 50 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47. Podemos notar que entre más grande es un número será más difícil determinar si este es primo o no.

2. Test de primalidad

¿Se habrían imaginado que la raíz cuadrada de un número podría ayudarnos a determinar si es primo o no? Pues déjenme contarles que, si un número no tiene divisores primos menores o iguales que su raíz cuadrada, entonces es primo.

Hagamos esta prueba con el número 37: No es necesario conocer la raíz exacta del número, es suficiente con saber que la raíz de 37 está entre 6 y 7, es decir, $6 < \sqrt{37} < 7$. Entonces, debemos revisar si el 2, 3 o 5 son divisores del 37. Si divido al 37 entre cualquiera de estos 3 primos, obtengo un residuo, así que 37 no es múltiplo de ninguno de ellos, por lo tanto, es primo.

Se pueden revisar sólo los números primos menores a $\sqrt{N}$ para saber si N es primo. Por si te preguntas qué paso con todos los números que no son primos supongamos que encontramos que $a = bc$ y $a|N$, entonces por la tercera propiedad de divisibilidad (del material de Criterios de Divisibilidad), como $b|a$ y $a|N$, entonces $b|N$. Así que, al revisar si un primo es divisor de N, no sería necesario revisar si los múltiplos de ese primo son divisores de N. Si se revisan los primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ ya no tendríamos que revisar a los números que estén formados por multiplicaciones de estos.

Otro ejemplo:

¿1009 es primo?

Una primera idea es probar con todos los números menores a 1009 y ver si alguno lo divide. Luego se nos ocurre la siguiente idea: Basta con probar con los números menores a 32 (Aproximadamente la raíz cuadrada de 1009). Esto se debe a que un número mayor a 32 necesita un número menor a 32 para que su producto sea 1009. (Si multiplicas dos números mayores a 32 el resultado es mayor a 1024) Por último, vemos que basta con probar solo con los números primos. Lo que nos deja solo con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 como opciones.

3. Criba de Eratóstenes

La criba de Eratóstenes es un algoritmo que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado, N.

Ejemplo:

Determinar los números primos menores a 50.

El algoritmo de la Criba de Eratóstenes nos permitirá hacer esto de manera eficiente.

- Empecemos anotando los números del 1 al 50.
- El 1 sabemos no es primo, lo tachamos.
- El 2 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
- El 3 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
- El 5 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
- El 7 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.

Hemos acabado, pues 8 se pasa de la raíz cuadrada de 50, así que los números que quedaron sin tachar son primos.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

4. Datos de vital importancia

1. Los girasoles tienen 55 espirales en un sentido y 89 en otro, o 89 y 144, números de la sucesión de Fibonacci. La piña tiene también un número de espirales de la misma sucesión, 8 y 13, o 5 y 8. https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99
2. Terminando con la saga de los ocelotes (si no te diste cuenta de la saga, revisa los anteriores materiales). En abril del 2015, Ivonne Báez, Eduardo "Ronbarbón" y Hermes Ramírez (exolímpico); estudiantes de la Licenciatura en Diseño Gráfico, tomaron como proyecto remodelar la página ommags.com/new/ y con eso también crearon a Ozzy.

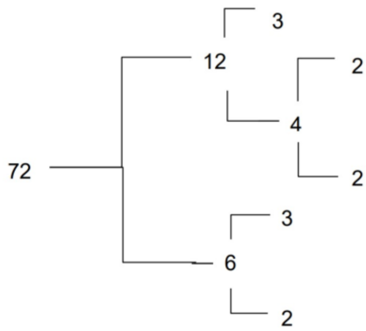
3. Ivonne, Eduardo y Hermes ya están graduados.

5. Factorización en primos

Factorizar un número N en primos significa encontrar primos cuya multiplicación nos dé como resultado dicho número N.

Ejemplo: Factorizar el número 72.

Gráficamente:



$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 3^2$$

Una forma efectiva para factorizar:

Para factorizar un número entero a, se busca el menor primo positivo p_1 divisor de a; después se divide a entre p_1 y se busca el menor primo positivo que divida al cociente obtenido; se procede de la misma manera hasta obtener el número 1 como único divisor. La notación que se utiliza es $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$, donde $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$, y e_i representa el número de veces que aparece el divisor p_i en este proceso.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r|l} 5600 & 2 \\ 2800 & 2 \\ 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32670 & 2 \\ 16335 & 3 \\ 5445 & 3 \\ 1815 & 3 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Se escribe:

$500 = 2^5 \times 5^2 \times 7$

$32670 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11^2$

No es necesario que realices este proceso todo el tiempo, si confías en tus habilidades puedes hacerlo de forma mental.

6. Teorema fundamental de la aritmética

Todo entero mayor a 1 puede ser escrito como producto de primos, esta representación es única salvo por el orden de sus factores.

Demostración: Dado el número N hay 2 opciones, N es primo (y ya terminamos), o N no es primo por lo que $N = ab$ para algunos a, b diferentes de 1 y N, si hacemos lo mismo para a y luego para b, si a no es primo se podrá separar en dos factores diferentes de 1. Podemos repetir este proceso hasta que todos los factores sean primos. Sabemos que siempre acabarán siendo primos porque cada vez los factores serán más pequeños y mayores que 1. Así habremos factorizado N.

En resumen, este teorema nos dice que todo número es primo o es el producto de números primos.

Ejemplos:

$27 = 3 \times 3 \times 3$, el 3 es un número primo. Entonces, el 27 es un producto de números primos.

$60 = 3 \times 5 \times 2 \times 2$, el 3, 2 y 5 son números primos. Entonces, el 60 también es un producto de números primos.

$23 = 23$, no podemos expresar este número como una multiplicación de números primos, por lo tanto, es primo.

7. Infinidad de primos

¿Te has preguntado si hay infinitos primos?

Pues Euclides ya demostró que hay infinitos números primos. Hasta ahora sólo hemos visto una lista parcial de ellos.

La idea de Euclides era muy simple, pensó en varios números primos, digamos 2, 3, 5 y 7. Y también pensó en un número $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 221$. La magia de este número es que el resultado de la multiplicación $2 \times 3 \times 5 \times 7$, 210, es múltiplo de estos 4 primos a la vez, pero al sumarle 1, se obtiene un número que no es múltiplo de ninguno de los mismos 4 primos.

Euclides construyó un número que no puede ser múltiplo de ninguno de los primos en su lista.

El teorema fundamental de la aritmética nos decía que un número o era primo o era producto entre primos, entonces habría que agregar un nuevo número en esa lista, ya sea el número obtenido o sus factores.

Euclides lo planteó de forma general:

Si esta es la lista de todos los primos que existen $P_1, P_2, \ldots, P_K$, suponiendo que hay una cantidad finita de primos, se puede crear un nuevo primo $N = P_1 \times \ldots \times P_K + 1$. De esta forma, el teorema fundamental de la aritmética dice que este nuevo numero es primo o debe tener un divisor primo que no estaba en esta lista, lo cual quiere decir que nunca podrás tener una lista completa y finita de los primos, debe haber una infinidad de ellos.

8. Problemas

1. Factorizar los siguientes números:
   a) 1260
   b) 375
   c) 473
   d) 23716000.
2. ¿2017 es primo? ¿961 es primo?
3. Encuentra todos los números primos menores a 100. (Si acomodas los números en una tabla con 6 columnas será más fácil).
4. La suma de dos números primos es 85. ¿Cuál es el producto de esos dos primos?
5. Usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9, forma cuatro primos de dos dígitos, usando cada dígito una sola vez. ¿Cuál es la suma de los cuatro primos?
6. Tres integrantes de un equipo de softball tienen la siguiente conversación:
   - **Ashley**: Acabo de darme cuenta de que los números de nuestros uniformes son números primos de dos dígitos.
   - **Brittany**: La suma de los números de sus uniformes es el día de mi cumpleaños que pasó hace unos días.

- **Caitlin**: Es gracioso. La suma de los dos números de sus uniformes es la fecha de mi cumpleaños que es a finales de este mes.
- **Ashley**: La suma de los dos números de sus uniformes es la fecha de hoy.

¿Cuál es el número que trae cada una en su uniforme?

7. ¿Cuántos ceros hay al final del producto 25×25×25×25×25×25×25×8×8×8?
8. El producto de las edades de mis hijos es 1664. La edad del más joven es la mitad de la del mayor. ¿Cuántos hijos tengo y cuáles son sus edades?
9. Si *p* es el primo más grande cuyos dígitos son números primos distintos, ¿cuál es la cifra de las unidades de p^2?
10. Encuentra el primo más grande que tenga una cantidad par de cifras y todas ellas iguales.
11. Encuentra cinco números primos tales que estén en progresión aritmética de diferencia 6. Demuestra que no hay otro grupo de cinco primos con esa condición.
12. ¿Para qué valores de n la expresión
$$\frac{18}{n+4}$$
es un entero?
13. Justifica porque el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.
14. En un pasillo oscuro y estrecho quieres prender la luz. Tanteas la pared y encuentras un botón que oprimes por instinto. Todos los focos a lo largo del pasillo se encienden como una fila de soldados. La luz es demasiada y vuelves a oprimir el botón, pero sólo se apagan los que tienen una posición par. Sigue habiendo mucha luz y presionas el botón de nuevo, pero notas que se altera el estado de los que se encuentran en una posición divisible entre tres. Y así continuas ajustando la iluminación del pasillo en el que te encuentras. Si hay n focos y presionaste el botón n veces, ¿qué focos se quedarán prendidos?

15. Sea p_n el n-ésimo número primo. Demuestre que el número $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$ no puede ser el cuadrado de un número entero.
16. Demuestra que para toda n, existen n enteros consecutivos que son compuestos (Sugerencia: ¿Qué pasa si el primero de ellos fuera $(n+1)! + 2$)
17. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro números primos distintos tales que $2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162$, $11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162$. Encuentra todos los posibles valores del producto $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$.

9. Vídeos

Definición

https://www.youtube.com/watch?v=e1XtzmR-4jk

Criba

https://www.youtube.com/watch?v=GST7EhThqpQ

Factorización en primos

https://www.youtube.com/watch?v=NPaBFe6QBDQ

Un poco de todo por la OMM GTO

https://www.youtube.com/watch?v=9YRWVKBrXcY