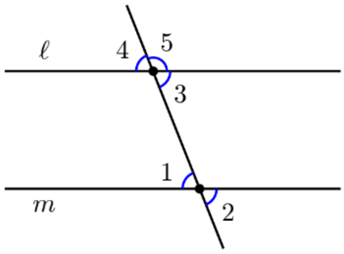
TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

Ángulos

Consideremos un par de *líneas paralelas* (ℓ y m) en el plano. Ahora, supongamos que una línea corta a l y m y observemos los ángulos que ésta forma con ellas. Los ángulos mantienen las siguientes relaciones:



(a) $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y se llaman ángulos *opuestos por el vértice*,
(b) $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ y se llaman ángulos *alternos internos*,

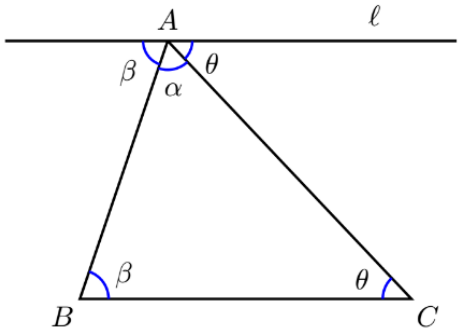
(c) $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *correspondientes*,

(d) $\measuredangle 2 = \measuredangle 4$ y se llaman ángulos *alternos externos*.

Además, tenemos que $\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 180°$ y decimos que $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$ son *suplementarios*. Aprovechando estas relaciones de ángulos podemos demostrar (justificar mediante argumentos válidos) el siguiente teorema básico:

Teorema 1.1.1 *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Demostración. Se traza un línea ℓ, paralela a BC, por el vértice A. De esta manera obtenemos las igualdades de ángulos marcados en la figura. Como sabemos que un ángulo llano mide $180°$, tenemos que $\alpha + \theta + \beta = 180°$. $\square$



TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo

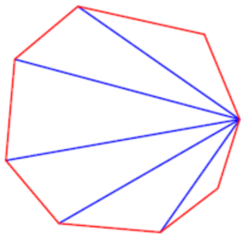
Elaborado por: Gustavo Meza García

Ejercicios:

1) Si un triángulo tiene 2 ángulos que miden 25° y 75° ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
2) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrilátero cualquiera?

Teorema:

1) La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es 180(n-2)
   a) Demostración: Podemos triangular el polígono como en la figura, al ser n-2 triángulos el resultado es inmediato.



Ejercicios:

1) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un octágono?
2) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos internos de un octágono regular?

Problemas:

1) Sea ABC y DEF dos triángulos tales que: ∠A = ∠D y ∠B = ∠E. Demuestre que ∠C = ∠F. *En este caso se dice que los triángulos son semejantes.*
2) Demostrar que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 ángulos interiores opuestos.

Ejemplo:

1) Demostrar que la altura que pasa por el ángulo distinto en un triángulo isósceles, es la bisectriz de este ángulo. (Una bisectriz es la que divide un ángulo a la mitad)
   a) Demostración: Sea ABC el triángulo, y sea A el ángulo desigual, sea L el punto donde la altura toca al lado BC, los triángulos BLA y CLA tienen un ángulo de 90° y además ∠B = ∠C, de aquí que ∠LAB = ∠LAC, lo que significa que AL es la bisectriz de ∠A.

Ejercicio:

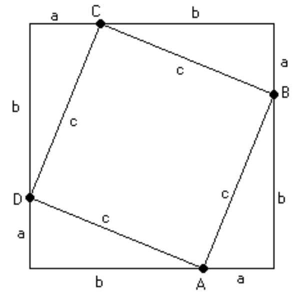
Demostrar que la bisectriz del ángulo distinto en un triángulo isósceles es perpendicular al lado opuesto de este vértice.

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

Teorema de Pitágoras.

Definición: En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo de 90° se llaman catetos, el 3er lado es la hipotenusa
Teorema:

1) En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, y cuya hipotenusa mide c. Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$
   a) La demostración se hará como problema.



Problema (Demostración guiada):

1) Obtener el área de uno de los triángulos de la figura.
2) Obtener el área del cuadrilátero ABCD.
3) Usar los 2 incisos anteriores para obtener el área de toda la figura.
4) Obtener el área de otra forma.
5) Demostrar el teorema de pitágoras.

Nota: el inverso del teorema de pitágoras (Si se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$ entonces el triángulo es rectángulo) es cierto, aunque no se demostrará en esta ocasión.
Ejercicios:

1) Calcule el valor de una diagonal de un cuadrado de lado 1

Un par de teoremas útiles.

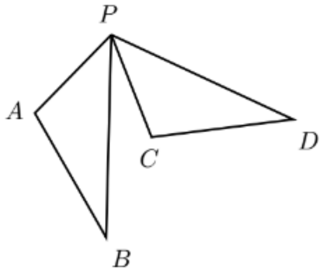
Definición: Tangente significa que toca a una curva en un sólo punto
Teorema:

1) Sea w una círcunferenciacon centro O, la recta tangente a w en el punto A y el radio OA son perpendiculares
   a) Demostración: Comencemos diciendo que el camino más corto de un punto P a una recta l es la perpendicular de P a l. Ahora, el camino más corto desde O hasta la recta tangente es OA, por lo que OA debe ser perpendicular a la tangente.
2) Sea w_1 una circunferencia con centro O_1, sea w_2 un circunferencia con centro O_2, se tiene que O_1 y O_2 son tangentes en el punto A, entonces O_1, A, O_2 están sobre una recta.
   a) Demostración: Supongamos que A no está en la recta O_1O_2, entonces sea B su reflejo respecto a la recta O_1O_2, se sigue que $O_1B = O_1A$ y $O_2B = O_2A$, de donde los círculos w_1 y w_2 se tocarían de nuevo en B, por lo que no serían tangentes, lo que es una contradicción. Por lo tanto A está en la recta O_1O_2.

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

Problemas con Ángulos

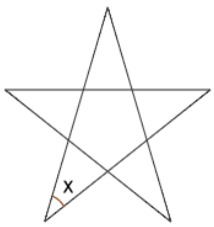
Problema 1.3 *En la figura, los triángulos $\triangle PAB$ y $\triangle PCD$ son idénticos. Si el ángulo $\measuredangle APC = 67°$ y el ángulo $\measuredangle CPD = 38°$, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle BPC$?*



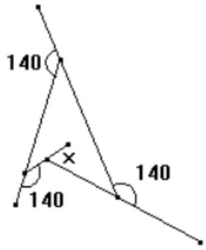
- Demostrar que en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.

P1: ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos internos de un polígono n-regular?

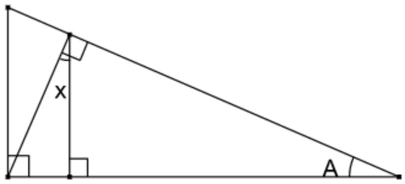
FB3.4: ¿Cuánto mide un ángulo interior de una estrella regular de 5 puntas?



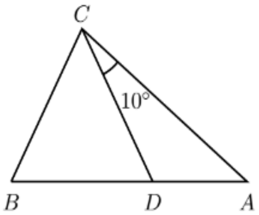
JN3.3: ¿Cuánto mide el ángulo x en la figura?



JN3.20: En la siguiente figura, los tres ángulos marcados son ángulos rectos. Si el ángulo A mide 20°, ¿cuánto mide el ángulo x?

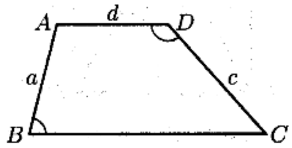


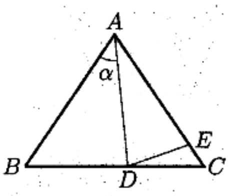
Ejemplo 1.1.1 *En el triángulo $\triangle ABC$, $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC = 110°$, y D es un punto sobre el segmento AB tal que $CD = CB$ y $\measuredangle DCA = 10°$. Calcula el valor del ángulo $\measuredangle CAB$.*



- Sea ABC un triángulo rectángulo con ∠A = 90°, demuestre que la altura por A divide al triángulo en 2 triángulos semejantes.

EE3.3: En el trapecio *ABCD* el ángulo *ADC* es el doble del ángulo *ABC.* Los lados *AB, CD* y *DA* miden *a,* c y *d* respectivamente. Da la medida del lado *BC* en función de a, c ó d.





MR3.3 En la siguiente figura el ángulo *BAD* mide α, *AB=AC* y *AD* = *AE.* ¿Da la medida del ángulo *CDE* en función de α?

Problemas de Teorema de Pitágoras

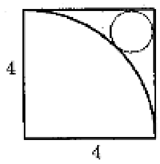
Demuestre que el área de un triángulo equilátero de lado d es $\frac{d^2\sqrt{3}}{4}$

¿Cuál es la razón entre el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia y el área de un cuadrado circunscrito a la misma circunferencia?

¿Cuál es la razón entre las áreas de un cuadrado y un octágono inscritos en la misma circunferencia?

Dos esferas de jabón encimadas, cuyos centros están separados por 50 mm y cuyos radios miden 40 mm y 30 mm respectivamente, se intersectan y su intersección forma un círculo. ¿Cuánto mide el radio de este círculo?

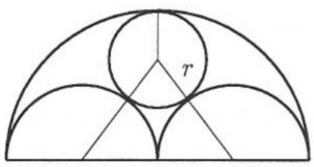
Sea w una circunferencia, sea A y B dos puntos sobre ella. La recta tangente a w en A y la recta tangente a w en B se intersectan en P. Demuestre que PA = PB (Teorema del payaso)



11. En la siguiente figura un cuarto de círculo está inscrito en un cuadrado de lado 4. ¿Cuánto mide el radio del círculo menor que es tangente al cuarto de círculo y a dos lados del cuadrado?

Problema 1.80 *Sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo, c la hipotenusa y h la altura trazada hacia la hipotenusa. Demuestra que el triángulo con lados h, $c+h$ y $a+b$ es un triángulo rectángulo.*

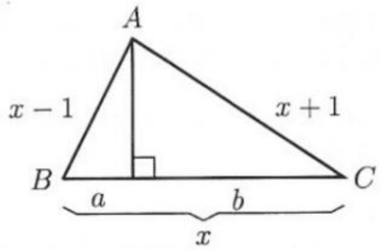
Ejercicio 1.10.17 Dos semicírculos de radio 3 están inscritos en un semicírculo de radio 6, como se muestra en la figura. Un círculo de radio r es tangente a los tres semicírculos. ¿Cuánto vale r?



Sea ABC un triángulo acutángulo y sea L donde la altura por A intersecta a BC. Demuestre que $BA^2 - AC^2 = BL^2 - LC^2$ (Lema de Carnot)

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

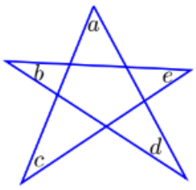
Ejercicio 1.10.20 En la siguiente figura, demostrar que $b - a = 4$.



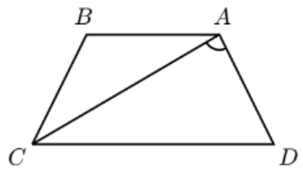
Tarea ángulos

Ejercicio 1.10.18 Sobre una mesa se encuentra una semiesfera (mitad de una esfera) de radio uno, con su parte plana apoyada en la mesa. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r de tal forma que cada esfera toca la semiesfera, la mesa y las dos esferas adyacentes. ¿Cuánto vale r?

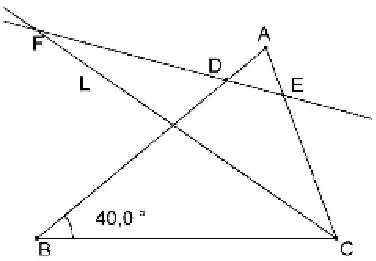
Ejemplo 1.1.2 *En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?*



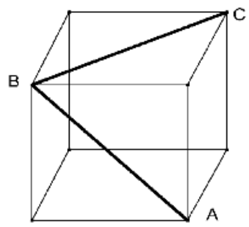
Problema 1.5 *El trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$ y $DC = 2$, donde AB es paralelo a DC. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CAD$?*

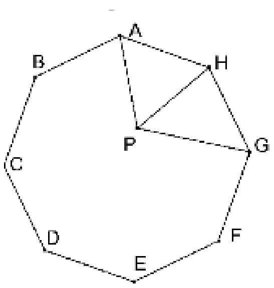


AO3.25 En la siguiente figura AD=AE y la línea L es bisectriz del ángulo ACB. Sea F la intersección de L con DE. Si sabemos que el ángulo ABC es 40°, ¿cuánto mide el ángulo CFE?



P3: Si la figura que se muestra es un cubo, ¿Cuánto mide el ángulo ABC?





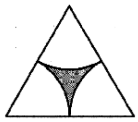
NV3.27 Un punto P está dentro de un octágono regular ABCDEFGH y el triángulo AHP es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo APG?

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 6 de mayo y jueves 11 de mayo

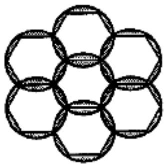
Elaborado por: Gustavo Meza García

Tarea Pitágoras

Calcula el área sombreada de la siguiente figura donde el triángulo es equilátero de lado igual a 2 y los círculos tienen radio 1.



7. En la siguiente figura los hexágonos son regulares de lado 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Ejercicio 1.10.19 Cuatro pelotas de basket-ball se colocan en el piso formando un cuadrado con las cuatro. Una quinta pelota se coloca sobre las otras cuatro de tal forma que toca a todas ellas. Si el diámetro de una pelota es 25, ¿a qué distancia del suelo, se encuentra el centro de la quinta pelota?

Problema 1.81 *Dado un rectángulo* $A_1A_2A_3A_4$ *y un punto* P *dentro de éste sabemos que* $PA_1 = 4$, $PA_2 = 3$ *y* $PA_3 = \sqrt{10}$ *. ¿Cuál es la longitud de* PA_4*?*

Problema 1.89 *Sobre un lado de un ángulo recto con vértice en un punto* O*, se toman dos puntos* A *y* B*, siendo* $OA = a$ *y* $OB = b$*. Halla el radio de la circunferencia que pasa por los puntos* A *y* B*, a la cual es tangente el otro lado del ángulo.*

Problema 1.88 *Demuestra que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, entonces sus diagonales son perpendiculares entre sí.*

- Demuestra que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma del cuadrado de las diagonales

3. Encuentre el área del rombo para el cual los lados miden 10 cm y las diagonales difieren en 4 cm.