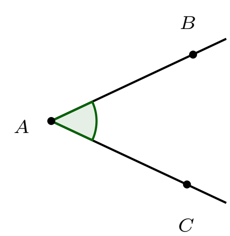
Notas de Geometría

Porfirio Toledo Hernández

Febrero de 2018

1 Ángulos

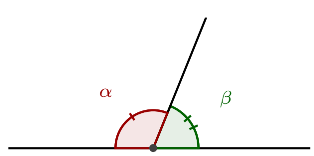
Definición 1 *Un* ***ángulo*** *es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice.*



Si el vértice del ángulo es A y los puntos P y Q pertenecen el primero a una semirecta y el segundo a la otra, denotaremos al ángulo formado por

$$\measuredangle A = \measuredangle PAQ = \measuredangle QAP.$$

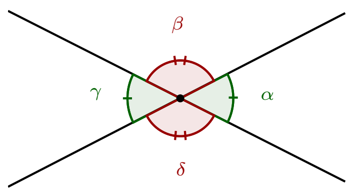
Definición 2 *Si una pareja de ángulos α y β están subtendidos por una recta a la cual pertenece el vértice común de dichos ángulos, diremos que son* ***adyacentes****, como ellos suman $180°$ entonces diremos que son* ***suplementarios****, y cada uno es el suplemento del otro. De esta manera α y β son suplementarios si y sólo si $\alpha + \beta = 180°$.*



Observemos que si una pareja de ángulos suplementarios son iguales entonces necesariamente tienen que medir $90°$, en este caso diremos que cada uno de ellos es un **ángulo recto**.

Cuando una recta encuentra a otra formando con ella ángulos adyacentes iguales, estos ángulos serán rectos, en tal caso decimos que las rectas son perpendiculares.

Supongamos que tenemos dos rectas que se cortan entre sí, el punto de intersección será un vértice común a cuatro ángulos. Para tal caso tenemos la siguiente clasificación para los ángulos en cuanto a la posición que ocupan con respecto al punto de intersección de las rectas.

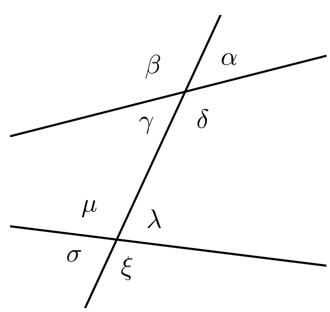


Opuestos por el Vértice	Adyacentes
α, γ β, δ	α, β β, γ γ, δ δ, α

Recordar 1 *En todo sistema de dos rectas distintas que se cortan, tenemos que*

1. *los ángulos adyacentes son suplementarios,*
2. *los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

En un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal podemos clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan con respecto a los sistemas adyacentes.



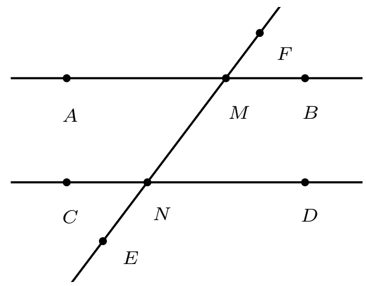
Correspondientes
α, λ β, μ γ, σ δ, ξ

Alternos	Colaterales	
γ, λ δ, μ	γ, μ δ, λ	Internos
α, σ β, ξ	α, ξ β, σ	Externos

Recordar 2 *En todo sistema de dos rectas paralelas distintas cortadas por una secante, se tiene que*

1. *los ángulos correspondientes son iguales,*
2. *los ángulos alternos son iguales,*

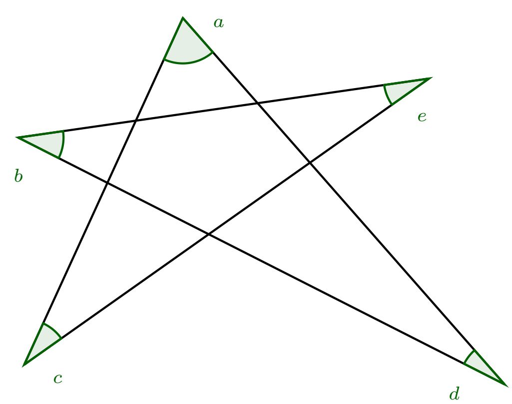
3. *los ángulos colaterales son suplementarios.*



El resultado inverso también es válido.

Ejercicio 1

1. *La suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a* $180°$*.*
2. *En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir los que le son opuestos.*
3. *Si un triángulo tiene un ángulo interior igual a* x *y dos ángulos exteriores iguales a* $2x$ *y* $3x$*, determinar el valor de los ángulos interiores del triángulo.*
4. *(**3a. OVMAES-Intermodalidades, 22a. OVMEES-Sector**) ¿Cuanto vale la suma de los cinco ángulos marcados en la estrella?*

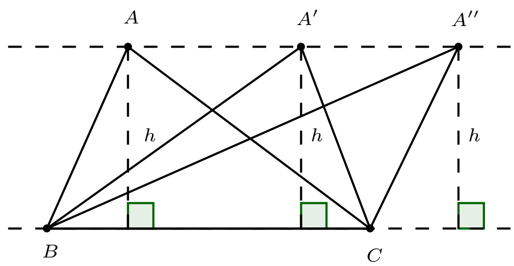


5. *(**20a. OVMAES-Sector**) Los puntos* A, B, C, D, E, F *y* G *son los vértices de un heptágono regular, colocados en el sentido de las manecillas del reloj,* FE *y* BC *se prolongan hasta cortarse en el punto* P*. ¿Cuánto vale el ángulo* $\measuredangle CPE$*?*

2 Congruencia y Semejanza

El área de un triángulo $\triangle ABC$ está determinada por las medidas de su base y altura

$$(\triangle ABC) = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2}.$$



Observemos que para triángulos diferentes, no importa cuánto midan los otros lados, mientras la base y la altura permanezcan iguales, las áreas serán las mismas.

Ejercicio 2

1. *Si dos triángulos tienen un par de bases iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las alturas correspondientes.*

2. *Si dos triángulos tienen un par de alturas iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las bases correspondientes.*

Teorema 1 *(**Primer Teorema de Thales**) Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros lados, entonces los segmentos formados son proporcionales*

Lo que nos dice este resultado es que para un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, si D y E son puntos en AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC, entonces

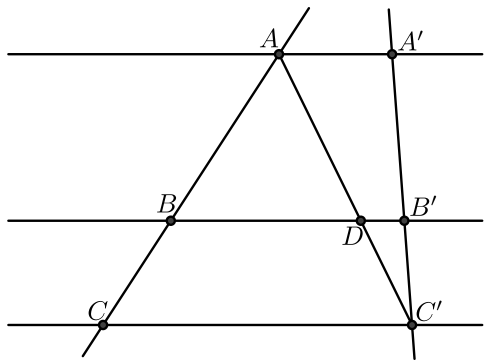
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Basta demostrar la primera relación, puesto que las otras son equivalentes. El resultado inverso también es cierto

Teorema 2 *(**Segundo Teorema de Thales**) Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.*

Este teorema nos garantiza que si consideramos tres rectas paralelas y suponemos que dos tranversales cortan a las primeras en los puntos A, B, C y A', B', C' respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{A'B'}{B'C'}, \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{A'C'}{B'C'}, \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{A'C'}{A'B'} \end{aligned}$$



Definición 3 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son **congruentes** o **iguales** si y sólo si tanto sus lados como sus ángulos correspondientes son iguales, es decir*

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_2B_2, \\ B_1C_1 &= B_2C_2, \\ A_1C_1 &= A_2C_2, \\ \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son congruentes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2.$$

Recordar 3 *Para que $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las siguientes tres condiciones*

*(**LAL**) Dos parejas de lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo*

$$A_1B_1 = A_2B_2, \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 \text{ y } B_1C_1 = B_2C_2.$$

*(**ALA**) Dos ángulos iguales e igual la pareja de lados comprendidos entre los ángulos, por ejemplo*

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2, A_1B_1 = A_2B_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

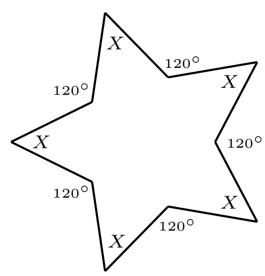
*(**LLL**) Las tres parejas de lados iguales*

$$A_1B_1 = A_2B_2, B_1C_1 = B_2C_2 \text{ y } A_1C_1 = A_2C_2.$$

De esta manera, cada una de las condiciones LAL, ALA o LLL implica todas las relaciones (1).

Ejercicio 3

1. *Si dos triángulos rectángulos tienen catetos iguales, entonces son congruentes.*
2. *Si un triángulo tiene dos de sus lados iguales, entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a dichos lados.*
3. *Si un triángulo tiene todos sus lados iguales entonces tiene todos sus ángulos interiores iguales a $60°$.*
4. *(**14a. OVMAES-Intermodalidades**) En la siguiente estrella todos los lados son iguales y los ángulos exteriores miden $120°$ como se muestra en la figura. Si todos los picos tienen el mismo ángulo X. ¿Cuánto mide X?*



Definición 4 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son **semejantes** si y sólo si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, es decir si cumplen las siguientes relaciones*

$$\begin{array}{c} \measuredangle A_1 = \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 = \measuredangle C_2, \\ \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}. \end{array} \tag{2}$$

Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son semejantes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Recordar 4 *Para que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las tres condiciones siguientes*

*(**AA**) Dos ángulos iguales, por ejemplo*

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

*(**LAL**) Dos parejas de lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

*(**LLL**) Las tres parejas de lados proporcionales*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Considerando este resultado, cada una de las condiciones anteriores implican todas las relaciones (2). Cabe también señalar que cuando la razón de semejanza es igual a 1 obtenemos triángulos congruentes, así la conguencia es un caso particular de semejanza.

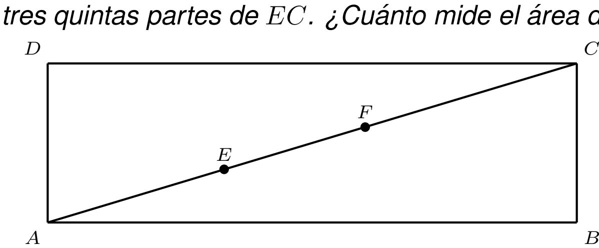
Ejercicio 4

1. *El segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.*

2. *(**4a. OVMAES-Intermodalidades**) En un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, sea H la intersección de las alturas que salen de B y C. Sean M, N, J y K los puntos medios de AB, AC, HB y HC respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero $MNKJ$ es un rectángulo.*

3. *El triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de cualquier triángulo, es siempre semejante a éste y su área es una cuarta parte del área del triángulo original.*

4. *(**16a OVMAES-Intermodalidades**) La base de un rectángulo $ABCD$ mide 10 cm y su altura 3 cm. Dividimos la diagonal AC en tres partes mediante los puntos E y F de manera que AE mide la mitad de EC y FC mide tres quintas partes de EC. ¿Cuánto mide el área de $\triangle BEF$?*



5. *La altura trazada desde el vértice correspondiente al ángulo recto en un triángulo rectángulo, divide a éste en dos triángulos semejantes al original.*

6. ***Teorema 3 (Teorema de Pitágoras)*** *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

7. *Si para un triángulo $\triangle ABC$ se cumple que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, entonces tal triángulo es rectángulo. En particular el ángulo en A es recto.*

8. *(**4a. OVMAES-Segunda Etapa**) Se tiene un triángulo equilátero de $1\ \mathrm{cm}$ de lado y un punto P en el interior. Llamemos h_1, h_2 y h_3 a los segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo y con un extremo en P. ¿Cuánto vale $h_1 + h_2 + h_3$?*

Definición 5 *Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a su opuesto.*

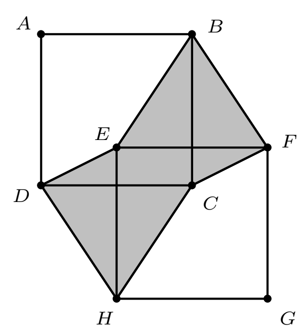
Ejercicio 5

1. *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*

2. *Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales. Además de que dos ángulos consecutivos son suplementarios.*

3. *Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

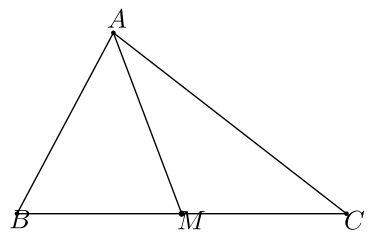
4. *(**14a. OVMES-Intermodalidades**) En la figura $ABCD$ y $EFGH$ son dos cuadrados iguales, AB es paralelo a EF y el área de la región sombreada es $1\ \mathrm{cm}^2$. Encuentra el área del cuadrado $ABCD$. Justifica tu respuesta.*



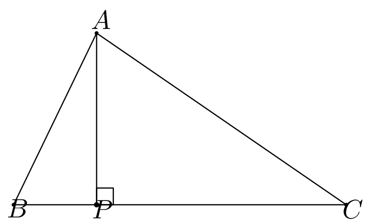
5. ***Teorema 4 (Teorema de Varignon)*** *puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo determinan un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales. Y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.*

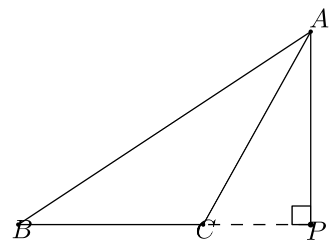
3 Puntos y rectas en los triángulos

Definición 6 *Una **mediana** en un triángulo es un segmento trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto.*

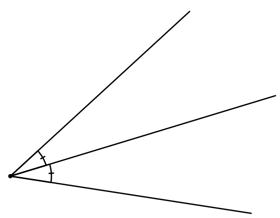


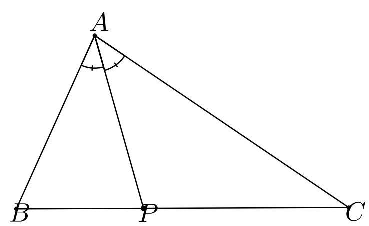
*Una **altura** en un triángulo es un segmento perpendicular a un lado o a su prolongación que va al vértice opuesto.*



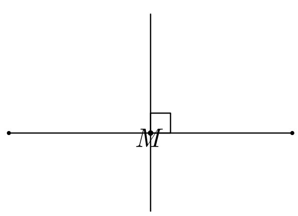


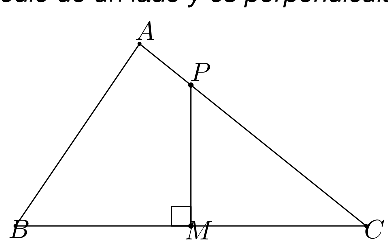
*La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. En particular una bisectriz en un triángulo es una línea que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales.*





*La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento. En particular una mediatriz en un triángulo es una línea que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él.*





Proposición 1

1. *Dos medianas se cortan en un tercio de la longitud total de cada una.*
2. *El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de cada lado de un ángulo fijo es la bisectriz del ángulo.*

3. *El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos distintos pertenecientes al mismo plano, es la mediatriz del segmento determinado por estos puntos.*

Recordar 5

1. *Las tres medianas de cualquier triángulo son concurrentes.*

   *Al punto de intersección G de las tres medianas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **gravicentro**. Este punto también es conocido como **centroide**, **baricentro** o **centro de gravedad**.*

2. *Las bisectrices de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo son concurrentes.*

   *Al punto I en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **incentro**, que es el centro de la circunferencia tangente interiormente a cada uno de los lados de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el **incírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **inradio**.*

3. *Las tres mediatrices de cualquier triángulo son concurrentes.*

   *El punto O en donde se intersectan las mediatrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el **circuncírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **circunradio**.*

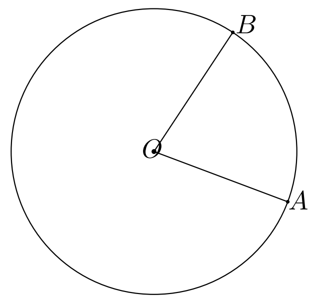
4. *Las tres alturas de cualquier triángulo son concurrentes.*

   *El punto H en donde concurren las tres alturas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **ortocentro**.*

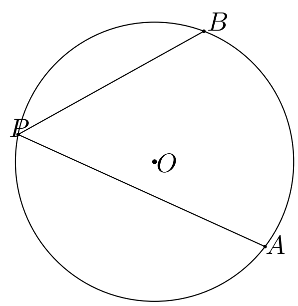
4 Ángulos en la circunferencia

Definición 7 *Un **ángulo central** es el formado por dos radios en una circunferencia. Por lo tanto, dados dos puntos A y B en una circunferencia, el ángulo central $\measuredangle AOB$ es el que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia y sus lados son los radios OA y OB.*

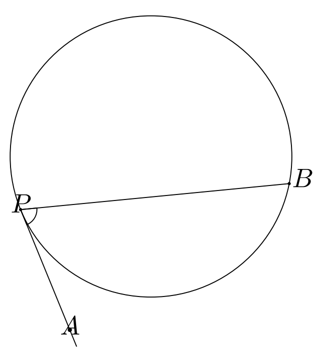
El arco correspondiente es el que se encuentra entre los lados del ángulo central: $\overset{\frown}{AB} = \measuredangle AOB$.



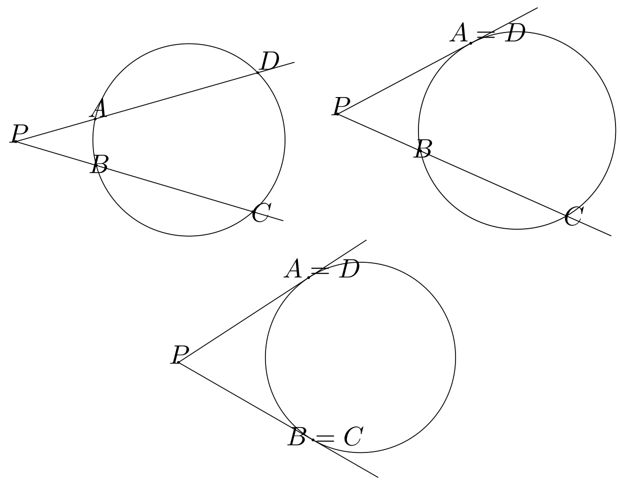
*Un **ángulo inscrito** es el formado por dos cuerdas que tienen un extremo en común. Por lo tanto dados tres puntos A, B y P en una circunferencia, el ángulo inscrito $\measuredangle APB$ es el ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia y sus lados PA y PB son secantes.*



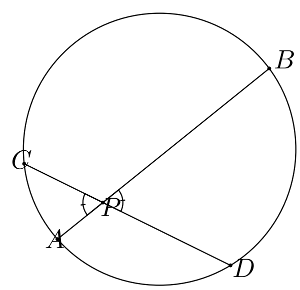
*Un **ángulo semi-inscrito** está formado por una cuerda y una tangente que se intersectan en el punto de tangencia. De esta manera, un ángulo semi-inscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante.*



*Un **ángulo exterior** es el formado por dos rectas secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes que se intersectan en un punto exterior a una circunferencia y que cortan a la circunferencia en 4, 3 o 2 puntos respectivamente.*



*Un **ángulo interior** en una circunferencia es el formado por dos cuerdas de la circunferencia que se cortan en un punto interior.*



Recordar 6

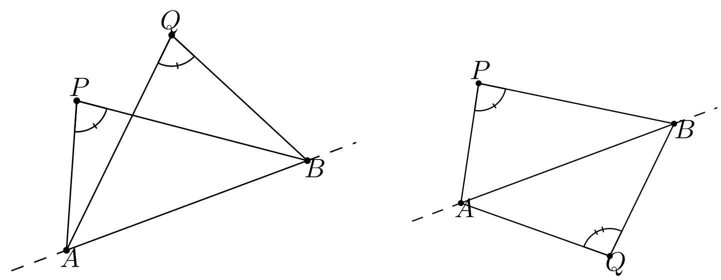
1. *Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que abraza.*
2. *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, subtendido por el diámetro, es recto.*
3. *Dos ángulos inscritos en una misma circunferencia y que abracen una misma cuerda, son iguales si sus vértices están del mismo lado de la cuerda; y son suplementarios si sus vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda.*
4. *La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.*
5. *Si dos rectas paralelas intersectan a una circunferencia, entonces los arcos determinados entre ellas son iguales.*
6. *Todo ángulo exterior a una circunferencia mide la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

7. *Un ángulo interior en una circunferencia mide la semi-suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.*

Definición 8 *Diremos que un conjunto de puntos es* ***concíclico*** *si todos los puntos del conjunto se encuentran en una misma circunferencia.*

Si cuatro puntos son concíclicos, diremos que el cuadrilátero que tiene a dichos puntos como vértices es ***cíclico****.*

Recordar 7 *Sean A, B, P, Q cuatros puntos en el plano, cada tres de ellos no colineales. Si los puntos P y Q están en un mismo semiplano determinado por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos iguales, o bien si los puntos P y Q están en distintos semiplanos determinados por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos suplementarios; entonces los puntos A, B, P y Q son concíclicos.*

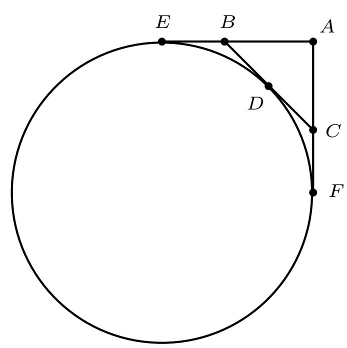


Ejercicio 6

1. *(**5a. OVMAES-Intermodalidades**) Consideremos una semicircunferencia $\mathcal{S}_1$ de diámetro AB y radio R y otra semicircunferencia $\mathcal{S}_2$ de radio r (menor que R) con el mismo centro que la anterior. Sea P un punto del arco AB tal que PB es tangente a $\mathcal{S}_2$. Demuestra que $PA = 2r$.*

   Si una circunferencia de diámetro PA fuera tangente a $\mathcal{S}_2$, ¿Cuál sería el valor de $\frac{R}{r}$?

2. *(**10a. OVMAES-Intermodalidades**) El área del triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$ es 9 y su hipotenusa y lados son tangentes al círculo como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del círculo?*



3. ***Teorema 5 (Teorema de Brahmagupta)*** *En un cuadrilátero cíclico y con diagonales perpendiculares, la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a un lado biseca al lado opuesto.*