Notas en Desigualdades
versión 0.1

Leonardo Urbina
leonardourbina@gmail.com

Marzo de 2006

Prólogo

Estas notas son un primer acercamiento al tópico de desigualdades dirigido a aquellos participantes de olimpíadas de matemáticas que quieran mejorar sus habilidades en esta área. Esta es la primera versión del material, así que cualquier error, duda o comentario por favor háganmelo saber.

Capítulo 1

Principios de Desigualdades

En las Matemáticas es muy propenso el estudio de ecuaciones, las cuales se basan en la igualdad entre dos expresiones. Pero en una gran mayoria de los casos, no hay igualdad, sino que en cambio, se estudian las relaciones que mantienen las expresiones entre sí. A esto es lo que llamamos "*desigualdades*". Aquí presentamos un resumen de algunas de las desigualdades más básicas e importantes.
Antes de empezar a trabajar es necesario saber algunas cosas básicas: Sean a, b, c, d reales cualesquiera, entonces:

1. $a \geq b \iff a + c \geq b + c$
2. Si $a \geq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \geq bc$ y si $c < 0$ la desigualdad se invierte.
3. Si $0 \leq a \leq b; 0 \leq c \leq d$, entonces $ac \leq bd$

1.1. Todo cuadrado es positivo

Teorema Para todo x real se tiene que:

$$x^2 \geq 0$$

Donde se tiene la igualdad si y solo si $x = 0$.
Veamos varios ejemplos de problemas que se solucionan usando este hecho:

Ejemplo 1: Sean a, b, c, d números reales. Probar que $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ no pueden ser todos mayores que $\frac{1}{4}$.

Supongamos que sí fuesen todos mayores que $\frac{1}{4}$, entonces se tendría que:

$$a-b^2>\frac{1}{4};\ b-c^2>\frac{1}{4};\ c-d^2>\frac{1}{4};\ d-a^2>\frac{1}{4}$$

Sumando todas las desigualdades y ordenando obtenemos:
$a^2-a+\frac{1}{4}+b^2-b+\frac{1}{4}+c^2-c+\frac{1}{4}+d^2-d+\frac{1}{4}<0$
$\Rightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{4})^2+(d-\frac{1}{4})^2<0$

Pero esto ultimo es una contradicción, ya que cada uno de los términos de la izquierda es mayor o igual que 0. Entonces nuestra suposicion era errónea y debe haber alguno menor a $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 2 Sea a un real. Probar que $4a-a^4\leq 3$.
Procederemos colocando todo del lado derecho buscando factorizarlo como un cuadrado, o como una suma de cuadrados:

$$a^4-4a+3=(a^2-1)^2+2a^2-4a+2=(a^2-1)^2+2(a-1)^2\geq 0$$

Y se tiene lo pedido.

Ejercicios: A continuación dejo algunos ejercicios para ser resueltos por el lector.

1. $x+\frac{1}{x}\geq 2$ para todo x real
2. Si $x,y>0$ entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$
3. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$
4. Probar que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no excede $\sqrt{2}$ por la hipotenusa
5. Determinar si exsite o no una función inyectiva $f:R\rightarrow R$ tal que $f(x^2)-(f(x))^2\geq\frac{1}{4}$
6. Hallar todas las soluciones reales (x,y,z) de $x^4+y^4+z^4-4xyz=-1$

1.2. Desigualdad de Reordenamiento

La siguiente desigualdad surge de una manera muy natural e intuitiva. La introduciremos a través de un ejemplo:
"Se quieren colocar billetes en cajas. Hay 5 cajas, en las cuales caben 10, 7, 5, 3 y 1 billetes respectivamente y hay billetes de denominaciones 1000, 500, 100, 50 y 10. En una misma caja solo se pueden meter billetes de una denominación y no pueden haber billetes de una misma denominación en cajas distintas. Cuál es la mayor/menor cantidad de dinero en total que se puede colocar en las cajas?"

Uno puede intuir que para la primera parte, la respuesta es colocar los billetes de mayor denominación en las cajas donde caben mas billetes, y los de menor denominación en las cajas donde caben menos billetes, es decir, colocamos los billetes de 1000, 500, 100, 50 y 10 en las cajas donde caben 10, 7, 5, 3 y 1 billetes respectivamente. Y para la segunda parte uno intuye que es simplemente hacer esto pero en el orden invertido
Ya con una idea de lo que nos referimos, veamos el enunciado formal de la Desigualdad de Reordenamiento:

Desigualdad de Reordenamiento: Dadas dos sucesiones de n reales cada una $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ es una permutación cualquiera de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n \\ &\geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

Probaremos solo el lado izquierdo de la desigualdad, ya que el lado derecho es análogo. Sea:

$$S = a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n$$

Supongamos que $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ no es igual a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, entonces existe un índice i mínimo tal que $a'_i \neq a_i$. Entonces $a'_i > a_i = a'_j$, para algún $j > i$. Definimos $c_k = a'_k$ para todo $k \neq i, j$ y $c_i = a'_j$ y $c_j = a'_i$. Sea entonces:

$$T = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots c_ib_i + \ldots c_jb_j + \ldots + c_nb_n$$

Entonces vemos que:

$$T - S = a'_j b_i + a'_i b_j - a'_i b_i - a'_j b_j = (a'_i - a'_j)(b_j - b_i) \geq 0$$

Esto último, ya que, como vimos $a'_i \geq a'_j$ y por como se definieron los $b'_k s$ sabemos que siendo $j > i$, entonces $b_j \geq b_i$. De esto se sigue que que

$$T \geq S$$

Ahora bien, cada vez que se aplica este procedimiente de *intercambiar* los terminos de la sucesión, la suma que queremos se agranda. Pero tambien sabemos que en a lo más n *intercambios*, la permutación que nos queda es igual a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. De esto nos queda hemos demostrado que la Desigualdad de Reordenamiento es cierta. A continuación algunos ejemplos de problemas resueltos con usando este teorema:

Ejemplo 1: Sean $a_1, a_2, \ldots a_n$ reales y $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ una permutación cualquiera. Demuestre que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots a_n a'_n$$

Vemos que en la desigualdad de reordenamiento colocando $a_i = b_i$, obtenemos lo que queremos.

Ejemplo 2: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos. Demuestre que

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Sea $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ la permutación de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$. Entonces tenemos que $a'_i \geq i$ (aquí se usa el hecho de que son enteros positivos distintos). Por la desigualdad de reordenamiento obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} &\geq \frac{a'_1}{1^2} + \frac{a'_2}{2^2} + \ldots + \frac{a'_n}{n^2} \\
&\geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Y tenemos lo que se quería.

Ejercicios: A continuacion colocamos algunos ejercicios para ser resueltos usando este teorema, o usando las ideas para su demostración.

1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales positivos y $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$. Demuestre que:

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \ldots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n$$

2. Demuestre si a, b, c son reales positivos, entonces se tiene:

   a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 + c^2 a$
   b) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$
   c) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$
   d) $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

3. (Desigualdad de Nesbitt) Sean a, b, c reales positivos, entocnes:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. (IMO 1975) Sean $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ y $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ números reales, Sea $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ una permutación de $(y_1, y_2 \ldots, y_n)$. Demuestre que

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2 \leq (x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2+\ldots+(x_n-z_n)^2$$

5. (APMO 1998) Sean a, b, c reales positivos, muestre que:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{abc}\right)$$

1.3. "Smoothing Principle"

El "smoothing principle"de manera formal afirma que si se tiene una cantidad de la forma $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$, tal que se hace pequeña a medida que dos de las variables se acercan entre si (manteniendo alguna condición, por ejemplo, la suma de las variables constante), entonces esta cantidad atiene su mínimo cuando todas las variables son iguales. Para ver esta idea de una manera más clara, demostraremos la desigualdad media aritmética media geométrica.

Ejemplo 1 (MA-MG): Dados reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ entonces

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1...x_n}$$

Haremos una serie de sustituciones que mantendrán el valor del lado izquierdo, mientrás que agrandarán el lado derecho. Al final todos los x_i's serán iguales y se tendrá que el lado izquierdo es igual al lado derecho de la desigualdad. Esto implicará que la desigualdad es cierta.

Si todos los x_i's son iguales entre sí, entonces vemos que

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{nx_1}{n} = \sqrt[n]{x_1^n} = \sqrt[n]{x_1....x_n}$$

Denotemos m a la media aritmética de los x_i's. Supongamos que no todos son iguales entre sí, entonces existen índices i, j tal que $x_i < m < x_j$. Consideremos ahora $x_i{}' = m$ y $x_j{}' = x_i + x_j - m$. Vemos que la suma de los x_i's no se ve alterada, mientras que

$$x_i{}' x_j{}' = (x_i + x_j) - m^2 = (m - x_i)(x_j - m) + x_i x_j > x_i x_j$$

Nótese que en cada paso la cantidad de x_i's que son iguales a la media aritmética aumenta en 1, es decir, que en un número finito de pasos (a lo más $n - 1$) todos serán iguales a m. Además, cada vez que se realizó la sustitución el lado derecho de la desigualdad aumentaba mientras el lado izquierdo permanecía inalterado. Dado que la igualdad se da cuando todas las variables son iguales entre sí, queda que en todos los otros casos el lado derecho tuvo que ser menor que el lado izquierdo, y queda probada la desigualdad.

Ejemplo 2 (Vietnam 1998): Sean $x_1, ...x_n (n \geq 2)$ reales positivos que satisfacen

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + ... + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}$$

Demuestre que

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}{n - 1} \geq 1998$$

La idea será usar "smoothing"para ver que a medida que se acercan los x_i's entre sí (manteniendo la condición dada), la cantidad de la izquierda decrece hasta hacerse igual a 1998. Llamemos $y_i = \frac{1}{x_i+1998}$, entonces se tiene que $x_i = \frac{1-y_i 1998}{y_i}$ y que $\sum y_i = \frac{1}{1998}$. Como $x_i \geq 0$ para todo i, entonces se debe tener que $y_i > 0$. Veamos lo siguiente

$$x_i x_j = \frac{1-y_i 1998}{y_i} . \frac{1-y_j 1998}{y_j} = \frac{1-(y_i+y_j)1998}{y_i y_j} + 1998^2$$

Además como $\sum y_i = \frac{1}{1998}$ y siendo $y_i \geq 0$, entonces $y_i + y_j < \frac{1}{1998}$ o lo que esquivalente $1 - (y_i + y_j)1998 > 0$. Entonces al realizar la sustitución $y_i{}' = m$ y $y_j{}' = y_i + y_j - m$ (donde m es la media aritmética de los $y_i's$) vemos que (de manera identica al ejemplo anterior) $y_i{}' y_j{}' > y_i y_j$ mientras que $y_i{}' + y_j{}' = y_i + y_j$. Siendo positivo el numerador de la expresión dada, vemos que al realizar la sustitución, el valor de la expresión decrece. Esto es lo que queríamos.

Además, cuando todos los $y_i's$ son iguales se tiene que todos los x_i's son iguales, denotemoslos por x. Vemos entonces

$$\frac{n}{x+1998} = \frac{1}{1998}$$
$$\Rightarrow x = (n-1)1998$$

Al introducir esto en la desigualdad que se quiere probar vemos que

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 ... x_n}}{n-1} = \frac{\sqrt[n]{(n-1)^n 1998^n}}{n-1} = 1998$$

Con esto se sigue lo pedido.

Ejemplo 3 (USA 1998): Sean $a_0, a_1, ..., a_n$ números en el intervalo $(0, \pi/2)$ tal que

$$\tan(a_0 - \pi/4) + \tan(a_1 - \pi/4) + ... + \tan(a_n - \pi/4) \geq n - 1$$

Demuestre que $\tan a_0 \tan a_1 ... \tan a_n \geq n^{n+1}$

Sea $x_i = \tan(a_i - \pi/4)$ y $y_i = \tan a_i$. Entonces vemos que $x_i \in (-1, 1)$ y $y_i \in (0, \infty)$ y además

$$x_i = \tan(a_i - \pi/4) = \frac{\tan a_i - 1}{\tan a_i + 1} = \frac{y_i - 1}{y_i + 1} \Rightarrow y_i = \frac{1 + x_i}{1 - x_i}$$

Entonces lo que aporta el producto de dos y_i's al lado izquierdo de la desigualdad es

$$y_i y_j = \frac{1 + x_i}{1 - x_i} . \frac{1 + x_j}{1 - x_j} = \frac{1 + x_i + x_j + x_i x_j}{1 - (x_i + x_j) + x_i x_j} = \frac{2(x_i + x_j)}{1 - (x_i + x_j) + x_j x_j} + 1$$

$$= \frac{2}{\frac{1-(x_i+x_j)+x_i x_j}{x_i+x_j}} + 1 = \frac{2}{\frac{1+x_i x_j}{x_i+x_j} - 1} + 1$$

Entonces, si $x_i + x_j$ fuese positivo, al acercar x_i y x_j entre si, el producto aumentaría dejando la suma inalterada de donde el valor de la expresión disminuye.

Lo que se tiene que hacer entonces es demostrar que en cada paso es posible conseguir i, j tal que $x_i + x_j > 0$ y así poder realizar el smoothing.

Es claro que si $x_i > 0$ para todo i, entonces se puede realizar el smoothing sin ningún problema. El problema surge cuando hay x_i's negativos. Ahora bien, nótese que a lo más uno solo puede ser negativo, ya que $a_0 + ... + a_n \geq n - 1$, y cada x_i es menor que 1, es decir, que si dos fuesen negativos, la suma sería a lo más la suma de los $n - 1$ restantes que es menor que $n - 1$. Además si $x_0 < 0$, es imposible que $x_0 + x_j < 0$ para $j = 1, 2, ...n$ debido a que en este caso se tendría

$$x_0 + x_1 + ... + x_n < x_0 - n x_0 = -x_0(n - 1) < n - 1$$

Entonces siempre existe j para el cual $x_0 + x_j > 0$. Con esto el smoothing se puede realizar, hasta obtener todos los x_i's iguales, por lo que todos los a_i's son iguales, llamemoslos a. Entonces la condición del problema se convierte en

$$(n + 1)\tan(a - \pi/4) \geq n - 1$$

$$\frac{\tan a - 1}{\tan a + 1} \geq \frac{n - 1}{n + 1}$$

$$\Rightarrow \tan a \geq n$$

Y por lo tanto

$$\tan a_0 \tan a_1 ... \tan a_n = (\tan a)^{n+1} \geq n^{n+1}$$

Y se sigue lo pedido

Ejercicios: A continuación algunos problemas que pueden ser resueltos usando esta técnica o algunas ideas relacionadas a esto.

1. (India 1995) Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ reales positivos tal que su suma es 1. Demuestre que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

2. (Shortlist IMO 1998) Sean $r_1, r_2, ..., r_n$ reales mayores o iguales a 1. Demuestre que

$$\frac{1}{r_1+1} + ... + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1...r_n}+1}$$

3. Sea $x_1, x_2, ...$ una sucesión de reales positivos. Si a_k y g_k son la media aritmética y la media geométrica respectivamente de $x_1, ..., x_k$, demuestre que

$$\frac{a_n^n}{g_k^n} \geq \frac{a_{n-1}^{n-1}}{g_k^{n-1}};$$

$$n(a_n - g_n) \geq (n-1)(a_{n-1} - g_(n-1).$$

Capítulo 2

2.1. La Desigualdad MA-MG-MH

Teorema (MA-MG): Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ reales positivos, entonces

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 ... a_n}$$

Demostración 1: Usaremos el "Smoothing Principle". Sea m la media aritmética de $a_1, a_2, ..., a_n$. Si $a_1 = a_2 = ... = a_n = m$, entonces se tiene la igualdad. De lo contrario existen índices i, j tal que $a_i < a < a_j$.
Considerando la sustitución $a'_i = m$ y $a'_j = a_i + a_j - m$ vemos que $a'_i + a'_j = a_i + a_j$, mientras que:

$$a'_i a'_j = m(a_i + a_j) = (a_j - m)(m - a_i) + a_i a_j$$

Por lo que el lado derecho de la desigualdad aumenta mientras que el lado izquierdo se mantiene fijo. En un número finito de pasos (a lo más $n-1$) todos los a_i's serán iguales y obtendremos que ambos lados de la desigualdad son iguales. Como en cada paso el lado derecho crecía, originalmente se debió tener que el lado derecho era menor que el lado izquierdo. De aquí se sigue lo pedido.

Demostración 2: Procederemos por inducción sobre el número de variables. Si $n = 2$, entonces

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

De donde obtenemos el caso base. Demostraremos que si se cumple para k entonces se cumple para $2k$, y si se cumple para $m + 1$ entonces se cumple para m. Con esto se tendríamos lo pedido.

Supongamos que se cumple para k. Entonces si $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{2k}$ son reales positivos usando el caso base y la hipótesis inductiva vemos que

$$\frac{a_1 + ... + a_{2k}}{2k} = \frac{\frac{a_1+...+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+...+a_{2k}}{k}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + ... + a_k}{k}\right)\left(\frac{a_{k+1} + ... + a_{2k}}{k}\right)}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1...a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}...a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1...a_{2k}}$$

Entonces si se cumple para k se cumple para $2k$.

Supongamos ahora que se cumple para $m+1$, entonces aplicando esto para los reales $a_1, ..., a_m, A$, donde $A = \frac{a_1+...+a_m}{m}$ vemos que

$$A = \frac{a_1 + ... + a_m}{m} = \frac{a_1 + ... + a_m + A}{m+1} \geq \sqrt[m+1]{a_1...a_m A}$$

Entonces

$$A^{m+1} \geq a_1...a_m.A \Rightarrow A^m \geq a_1...a_m$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + ... + a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1...a_m}$$

De aquí se sigue lo pedido.

Demostración 3: Por la desigualdad de reordenamiento sabemos que si $x_1, x_2, ..., x_n$ son reales entonces

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} \geq n$$

Sea $G = \sqrt[n]{a_1...a_n}$, entonces colocando $x_1 = \frac{a_1}{G}, x_2 = \frac{x_1 x_2}{G^2}, ..., x_n = \frac{a_1...a_n}{G^n}$ obtenemos que

$$\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+...+\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\frac{a_1}{G}}{\frac{a_1...a_n}{G^n}}+\frac{\frac{a_1a_2}{G^2}}{\frac{a_1}{G}}+...+\frac{\frac{a_1...a_n}{G^n}}{\frac{a_1...a_{n-1}}{G^{n-1}}} = \frac{a_1}{G}+\frac{a_2}{G}+...+\frac{a_n}{G} \geq n$$

Y se sigue lo pedido.

Ahora, si $a_1, ...a_n$ son reales positivos consideremos la desigualdad MA-MG aplicada a los números $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$, de donde queda

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1...a_n}}$$

Y obtenemos que

$$\sqrt[n]{a_1...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

Esta última se conoce como la Desigualdad Media Geométrica - Media Harmónica. Con esto obtenemos lo que de abreviaremos como la desigualdad MA-MG-MH:

Teorema (MA-MG-MH): Dados reales positivos $a_1, ..., a_n$, entonces

$$\frac{a_1+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}}$$

A continuación se muestran un par de ejemplos donde se usa la desigualdad MA-MG-MH:

Ejemplo 1: Si x, y, z son reales positivos, muestre que

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 8$$

Demostración: Sacando común denominador vemos que es equivalente demostrar que

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

Ahora bien, por MA-MG tenemos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\ ; \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}\ ; \quad \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$$

Multiplicando estas tres desigualdades obtenemos lo que queríamos.

Ejemplo 2: Dados $x_1, ...x_n$ reales positivos demuestre que

$$(x_1+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Demostración: Usando la desigualdad $MA - MH$ con los números $x_1, ..., x_n$ nos queda que:

$$\frac{x_1+...+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$$

Lo cual se convierte en

$$(x_1+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Y se sigue lo pedido.

A continuación problemas para ser resueltos por el lector.
Problemas:

1. Si $x>0$ demuestre que $x+\frac{1}{x}\geq 2$.
2. Si $x,y>0$ entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$
3. Sea n un entero positivo. Demuestre que $n!\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
4. Si $a,b,c>0$ muestre que

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

5. Sea n un número natural. Demuestre la siguiente desigualdad

$$\prod_{k=0}^{n}(k!)^2 \geq \left(\frac{(n+1)!}{2^n}\right)^{n+1}$$

6. Sean $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ reales positivos tales que $x_1+x_2+...+x_n = x_{n+1}$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}$$

7. Para $x+y+z>0$ demuestre que

$$2 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{6}$$

8. (APMO 1991) Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ reales positivos tales que $a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n$. Demuestre que

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_n)$$