GTO Grandeza de México
Secretaría de Educación de Guanajuato

OlimpiadaS de Matemáticas en Guanajuato

Ejercicios de preparación para alumnos de primaria y secundaria

Ejercicios de preparación para alumnos de primaria y secundaria

Olimpiadas de Matemáticas en Guanajuato

Ejercicios de preparación para alumnos de primaria y secundaria

fue elaborado por la
Secretaría de Educación de Guanajuato
con la colaboración de estudiantes de la
Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Guanajuato

Responsables de contenidos
Cecilia Edith Hernández Fregoso
Christian Ojeda Trejo
José de Jesús Contreras Arredondo
Luis Islas Cruz
María Alejandra Valdez Cabrera
María de Lourdes Oros Barrón

Ilustración
Patricia Sarahí Ojeda Trejo

Primera edición, 2018
Secretaría de Educación de Guanajuato, 2018
Conjunto Administrativo Pozuelos S/N, 3600
Guanajuato, Gto.

Impreso en México.
DISTRIBUCIÓN GRATUITA/Prohibida su venta

CONTENIDO

1. Carta de los autores

El libro que tienes en tus manos contiene algunas ideas básicas utilizadas en las olimpiadas de matemáticas para encontrar soluciones ingeniosas y creativas a nuevos problemas.

La sección de aritmética es una de las más importantes de este libro y puede que te resulte familiar; en ella repasamos las propiedades de los números, operaciones que se pueden realizar con ellos y cómo manipular cantidades que en principio no se conocen. Dominar estos temas es clave ya que son la base del lenguaje con el que escribimos matemáticas.

En las secciones de Teoría de Números, Combinatoria y Geometría te enfrentarás con problemas que pocas veces trabajas en tu salón de clases pero que puedes resolver con los razonamientos adecuados. Aquí encontrarás esas ideas.

La última parte te brinda ejercicios para que practiques lo que aprendiste en este libro. Vale la pena que intentes los problemas, que les dediques el tiempo necesario a cada uno para que las ideas surjan. Es importante que tus argumentos sean claros y que escribas ordenadamente tus soluciones, así cualquier persona podrá entender tus ideas; aquí encontrarás ejemplos de cómo redactar tus procedimientos claramente.

Si en algún momento se te complica avanzar, vuelve a leer lo que no entiendas y busca ayuda con tus amigos y profesores. En el apartado de Aritmética, el tema de variables puede ser difícil para un alumno de primaria, nuestra sugerencia es que saltes este tema y pases a las otras secciones; conforme avances en tus estudios podrás regresar a él.

Uno de los principales objetivos de las competencias de matemáticas es desarrollar la capacidad de resolver problemas usando el *ingenio* y la *creatividad*, reforzando estrategias de razonamiento lógico. El camino para desarrollar estas aptitudes comienza identificando retos e intentando resolverlos. Este proceso lo realizamos siempre que nos enfrentamos a un problema de matemáticas que no habíamos intentado antes. Llegar a la solución, además de satisfacción, nos da la experiencia matemática que necesitamos para resolver retos más grandes.

Finalmente, queremos decirte que este libro está pensado especialmente para ti y esperamos que con su estudio puedas descubrir y disfrutar las matemáticas.

2. Un poco de historia

Cuando les digo la palabra ***matemáticas*** a mis amigos Robert y Rábano siempre se asustan, y si llegan a ver un examen sorpresa se ponen morados. Robert y Rábano no son las únicas personas que sufren de este mal. Un pequeño diablillo le dijo a Robert que esto le pasaba porque aún no entendía muy bien todo lo que su profesor le había querido enseñar.

Por el contrario, a los que hemos tenido la suerte de poder ver la magia y la belleza de las matemáticas, nos encantan. Por ello te contaré unas anécdotas de algunos conocidos que se divierten muchísimo haciendo matemáticas.

Te preguntarás, ¿qué hace una sección de historia y anécdotas en un libro de matemáticas? Dicen que la historia la crea uno mismo y es cierto, por eso, te contaré la historia que construyeron algunos alumnos que se animaron a participar en la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y Secundaria.

Ellos hicieron historia, tanto de manera personal como en su familia, con sus amigos, compañeros y conocidos. Las hazañas de estos alumnos los llevaron a poner en alto el nombre de su lugar de origen, de Guanajuato, y a ser ejemplo de superación y esfuerzo en el país. Tú también puedes hacer historia, sí, leíste bien. Puedes preguntarte ahora, ¿puedo hacerlo aunque no saque 10 en matemáticas en mi escuela? Por supuesto que sí, con la dedicación y práctica necesaria puedes lograrlo.

Hasta este año, se han realizado 16 ediciones de la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y Secundaria (ONMAPS). Este concurso es organizado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) y participan la mayoría de los Estados de la República Mexicana. Guanajuato ha participado en las últimas 10 ediciones. En los primeros concursos sólo participaban alumnos de secundaria (y se conocía como ONMAS) y tiempo después se incluyó también a alumnos de los últimos años de primaria.

XIV ONMAPS, Mazatlán, Sin. 2014

En estas olimpiadas, se toman en cuenta las mejores puntuaciones en los exámenes y se premia a los concursantes de cada categoría con medallas de oro, plata y bronce. A continuación, se presentan los resultados de Guanajuato desde 2008, primer año en que participó hasta el año anterior, 2017:

VIII ONMAS, Colima, Col. 2008

Joshua Acevedo	Instituto Euro-Americano, Guanajuato	Medalla Bronce
Saúl Gutiérrez	Secundaria Centenario 5 de mayo, Yuriria	Medalla Oro
Jorge Luis González	Telesecundaria Núm. 1, León	
Rocío Gutiérrez	Telesecundaria Núm. 512, San Felipe	
Gabriel Gutiérrez	Colegio Británico, León	Medalla Plata
Mariano Rivera	Instituto Lasalle, Guanajuato	

IX ONMAS, Guadalajara, Jal. 2009		
Estephanía Aguilar	Secundaria Técnica Núm. 57, Salvatierra	Medalla Bronce
Joshua Acevedo	Instituto Euro-Americano, Guanajuato	Medalla Oro
Victoria Terrones	Secundaria Técnica Núm. 11	Medalla Plata
Rocío Gutiérrez	Telesecundaria Núm. 512, San Felipe	Medalla Plata
Víctor Sámano	Secundaria Técnica Núm. 57, Salvatierra	

X ONMAS, Comitán, Chis. 2010		
Diego Moreno	Instituto Guanajuato, Guanajuato	Medalla Bronce
Héctor Salazar	Secundaria Presidente Benito Juárez, Guanajuato	
Eyal Bor	Instituto Guanajuato, Guanajuato	Medalla Plata
Estephanía Aguilar	Secundaria Técnica Núm. 57, Salvatierra	Medalla Bronce
Joshua Acevedo	Instituto Euro-Americano, Guanajuato	Medalla Oro
Victoria Terrones	Secundaria Técnica Núm. 11, Silao	Medalla Oro

XI ONMAPS, Mérida, Yuc. 2011		
Joaquín Sandoval	Colegio Valenciana, Guanajuato	
Fabián Álvarez	Colegio Valenciana, Guanajuato	
Salvador García	Secundaria General Núm. 1, León	Medalla Plata
Irwin Villalobos	Secundaria Técnica Núm. 9, Pénjamo	Medalla Plata
Diego Moreno	Instituto Guanajuato, Guanajuato	Medalla Plata
Josué Ornelas	Instituto California, León	
Estephanía Aguilar	Secundaria Técnica Núm. 57, Salvatierra	Medalla Plata
Ulises Pérez	Secundaria Técnica Núm. 32, Irapuato	Medalla Bronce

XII ONMAPS, La Paz, BC. 2012		
Marco Fuentes	Colegio La Paz, Silao	
Alondra Patlán	Primaria Francisco Villa, San Miguel de Allende	Medalla Bronce
Héctor Parga	Colegio Valenciana, Guanajuato	Medalla Bronce
Cristian Chacón	Defensores de Moroleón, Moroleón	Medalla Bronce
Israel Bonal	Secundaria Técnica Núm. 5, Irapuato	Medalla Plata
Eric Zavala	Secundaria Defensores de Moroleón, Moroleón	Medalla Bronce
Diego Moreno	Instituto Guanajuato, Guanajuato	
Tania Martínez	Secundaria Técnica Núm. 26, Moroleón	

XIII ONMAPS, Culiacán, Sin. 2013		
Emily Goñi	Colegio Juan Pablo II, León	Medalla Oro
Nuria Sydykova	Colegio Valenciana, Guanajuato	Medalla Plata
Alondra Patlán	Secundaria Fuego Nuevo, San Miguel de Allende	
Carolina Moreno	Instituto Guanajuato, Guanajuato	
Héctor Parga	Colegio Valenciana, Guanajuato	Medalla Plata
Pablo Cid	Secundaria Técnica Núm. 6, Acámbaro	
Israel Bonal	Secundaria Técnica Núm. 5, Irapuato	Medalla Plata
Irwin Villalobos	Secundaria Técnica Núm. 9, Pénjamo	

XIV ONMAPS, Mazatlán, Sin. 2014		
Jesús Sistos	Instituto Lux, León	Medalla Oro
Nathalia Jasso	Primaria Benito Juárez, Irapuato	Medalla Oro
Nuria Sydykova	Instituto Guanajuato, Guanajuato	Medalla Plata
Emily Goñi	Instituto A. Mayllén, León	
Alondra Patlán	Secundaria Fuego Nuevo, San Miguel de Allende	
Noé Álvarez	Secundaria José Antonio Torres, Manuel Doblado	
Héctor Parga	Colegio Valenciana, Guanajuato	Medalla Bronce
Pablo Cid	Secundaria Técnica Núm. 6, Acámbaro	

XV ONMAPS, Mexicali, BC. 2015

Joshua González	CEIC, Celaya	
Zabdy Hernández	Primaria Justo Sierra, Salvatierra	
Jesús Sistos	Colegio SuBiré, León	Medalla Oro
Nathalia Jasso	Escuela Secundaria Técnica Núm. 32, Irapuato	Medalla Plata
Nuria Sydykova	Instituto Guanajuato, Guanajuato	Medalla Plata
Andrea Roaro	Secundaria Anexa 18 de Marzo, Salamanca	Medalla Bronce
Alondra Patlán	Secundaria Fuego Nuevo, San Miguel Allende	Medalla Plata
Josué Galindo	Liceo del Bajío, Celaya	Medalla Bronce

XVI ONMAPS, Ciudad de México 2016

Camila Bravo	Bicentenario de la Independencia de México, Irapuato	Medalla Bronce
Ana Álvarez	Colegio Juan Pablo II, León	
Iván Flores	Secundaria General Francisco Villa, Celaya	Medalla Oro
Isaac Pancardo	Secundaria General Núm. 1, Irapuato	Medalla Bronce
Jesus Sistos	Colegio SuBiré, León	Medalla Oro
Nathalia Jasso	Secundaria Técnica Núm. 39, León	Medalla Plata
Sebastián Sánchez	Colegio Andersen, Celaya	
Rubén Palacios	Instituto Lux, León	

XVII ONMAPS, Jerez, Zacatecas 2017

Cynthia López	Primaria Presa de la Soledad, Guanajuato	Medalla Plata
Braulio Olivares	Colegio Villagrán, Villagrán	Medalla Oro
Camila Bravo	Secundaria General Núm. 1, Irapuato	Medalla Bronce
Aleli Rodríguez	Praxedis Guerrero, San Felipe	
Joshua González	Instituto Vicente Guerrero, Celaya	Medalla Plata
Isaac Pancardo	Secundaria General Núm. 1, Irapuato	Medalla Oro
Jesús Sistos	Colegio SuBiré, León	Medalla Oro
Nathalia Jasso	Secundaria Técnica Núm. 39, León	Medalla Oro

I OMMEB, Oaxtepec, Mor. 2017		
Argelia Sánchez	Primaria Julia García Retana, León	Medalla Plata
Samuel Cano	Primaria José Vasconcelos, Pénjamo	Medalla Bronce
Karol Arias	Miguel Campuzano, San Felipe	
Cynthia López	Primaria Presa de la Soledad, Guanajuato	
Camila Bravo	Secundaria General Núm. 1, Irapuato	
Braulio Olivares	Colegio Villagrán, Villagrán	Medalla Bronce
Joshua González	Instituto Vicente Guerrero, Celaya	Medalla Plata
Isaac Pancardo	Secundaria General Núm. 1, Irapuato	Medalla Plata
Iván Flores	Secundaria General Francisco Villa, Celaya	Medalla Bronce

II OMMEB Mérida, Yucatán 2018.		
Fernando Gutiérrez	Josefina Camarena	
Rodrigo Avilés	Subiré León	Plata
Said Huizar	Valentín Gómez Farías	Plata
Cynthia López	Esc. Sec. Técnica 34	Plata
Pablo Amezcua	Secundaria Técnica No. 9	Mención honorifica
Braulio Olivares	Colegio Alfonso García Robles	Plata
Berenice Martínez	Colegio Valenciana	Mención honorifica
Camila Bravo	Esc. Sec. General No. 1	Bronce
Aleli Rodríguez	Secundaria General Praxedis Guerrero	Bronce

XVIII ONMAPS, Ciudad de Gómez Palacio, Durango 2018		
Cynthia López	Esc. Sec. Técnica núm. 34	Oro
Isaac Pancardo	Esc. Sec. General Núm. 1	Oro
Argelia Sánchez	Instituto Julia García Retana	Plata
Itzel Cano	Colegio José Vasconcelos	Plata
Braulio Olivares	Colegio Alfonso García Robles	Plata
Camila Bravo	Esc. Sec. General Núm. 1	Bronce
Joshua González	Instituto Vicente Guerrero	Bronce
Aleli Rodriguez	Secundaria General Praxedis Guerrero	

Anécdotas de algunos jóvenes de tu edad que aceptaron el reto y tuvieron muchos logros.

Héctor Eduardo Parga Nájera

“En una olimpiada los aprendizajes en todas sus etapas son invaluables; amigos, lugares, perspectivas, ideas y hasta los mismos temas que se ven en el aula son algunos de ellos, y todos se disfrutan por igual. Te das cuenta que lo que importa es el trabajo, el esfuerzo, la disciplina y el sacrificio”.

Héctor participó sus tres años de secundaria en la ONMAPS.

Jesús Omar Sistos Barrón

"Las Olimpiadas de Matemáticas, si bien implican algunos sacrificios, tienen también muchas cosas padres que hacen que en realidad valgan la pena. Conoces nuevas personas, nuevos lugares, haces amistades, entre muchas otras cosas. Y aunque al principio pudiese parecer aburrido, la verdad es que, si a uno le gustan las matemáticas, lo disfrutará mucho y todos podemos aprender matemáticas, además de que son importantes en muchas actividades que hacemos día a día, nos permite resolver problemas de manera lógica”.

Además, Jesús ha participado en la International Mathematics Competition en Tailandia, obteniendo medalla de bronce y en la India, obteniendo medalla de plata.

Alondra Galván Patlán

“Las olimpiadas de matemáticas pueden ser una forma de descubrir que las matemáticas no son algo complicado que tienes que memorizar sino algo que puedes analizar y razonar, llegar a una solución es más emocionante de esta manera. Participando, además de los premios que puedas ser capaz de conseguir, siempre hay algo que puedes aprender, es una experiencia a la que vale la pena darle una oportunidad. ¡Tú lo puedes lograr!”

Alondra fue la primera alumna en ser parte de la selección guanajuatense para la ONMAPS cuatro años seguidos, desde primaria hasta su tercer año de secundaria, obteniendo una Medalla de Bronce y una de Plata.

Nuria Sydykova Méndez

"Las olimpiadas de matemáticas son una experiencia divertida, se debe hacer por gusto e iniciativa propia, de lo contrario será complicado encontrarle el gusto y la diversión. Así empecé yo. Después de un tiempo, la Olimpiada se volvió parte indispensable de mi vida. Esto me permitió conocer nuevas personas y obtener diferentes conocimientos. Al principio hay que sacrificar algunas cosas, como el tiempo; se requiere disciplina pues es necesario ir adquiriendo habilidades y cada vez resolver retos más complicados. Pero, les puedo asegurar que este enorme esfuerzo vale la pena. Además de los premios y logros académicos que puedes conseguir, conoces a muchos amigos y que también se divierten aprendiendo matemáticas, que han encontrado que no son aburridas.

A través de las olimpiadas de matemáticas adquieres un compromiso, primero contigo mismo y después con tu familia, tu escuela, tu Estado y tu país. Pero lo más importante es una oportunidad para ser mejor. Te invito a darle una oportunidad a las matemáticas son algo muy bello, y si es posible que vayas a las olimpiadas, no te arrepentirás, nunca dejes de esforzarte por lograr tus metas."

Nuria representó a Guanajuato en la ONMAPS de 2013 a 2015. En 2017 logró formar parte del equipo que representó a México en algunas competencias internacionales; como la IMC (International Mathematical Competition) en Tailandia y la EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad) en Suiza y obtuvo una Medalla de Bronce en cada una.

Isaac Pancardo Botello

"Las Olimpiadas de Matemáticas no son solamente problemas, exámenes y entrenamientos; también es conocer amigos, ciudades, lugares, aprender, competir y divertirse. Conoces personas que nunca olvidarás, y por todo esto es que me gusta mucho participar en las olimpiadas."

Isaac comenzó a participar en 2016, obteniendo una medalla de Bronce. Gracias a su esfuerzo, en 2017 alcanzó la medalla de Oro y formó parte también de la selección de Guanajuato para la OMMEB.

3. Aritmética

Fracciones

Cuando tengo un problema en la vida, uso las palabras para describirlo. Un problema de matemáticas también lo puedo describir para analizarlo y darle solución, pero en esta ocasión uso un lenguaje especial, llamado *aritmética*. Este lenguaje nos permite hacer diferentes operaciones y procedimientos con los números que tenemos en un problema para finalmente llegar a una solución y por ello es importantísimo conocerlo y dominarlo.

La primera vez que me topé con unos números muy especiales fue cuando en mi clase empezamos a hablar de *fracciones*. Mi profesora me dijo que imaginara que quería repartir 100 galletas entre mis 7 amigos y yo.

Esto se puede hacer utilizando la operación:

Al hacer esta división vemos que a cada amigo le corresponden 12.5 galletas.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;12.5\;} \\ 8 & 100 \\ & 20 \\ & \;40 \\ & \;\;0 \end{array}$$

Otra manera de decir esto es que a cada persona le corresponde una octava parte de 100.

Cuando mi maestra empezó a hablar sobre fracciones, descubrí que había otra manera de representar la división. Una octava parte se puede escribir en fracción como 1/8, así que una octava parte de 100 lo escribimos como:

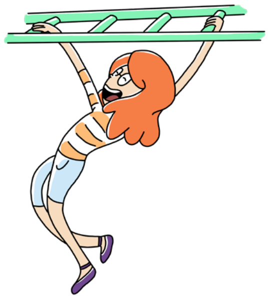
$$\frac{1}{8} \times 100 = \frac{1}{8} \times \frac{100}{1} = \frac{1 \times 100}{8 \times 1} = \frac{100}{8}$$

El secreto aquí es que estamos haciendo la misma operación,

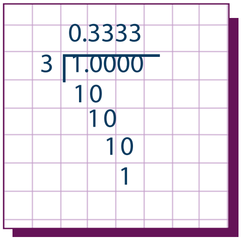
entonces $\frac{100}{8}$ es lo mismo que $8\,\overline{)\,100}$

Por lo tanto: $\frac{100}{8} = 12.5$ ***Una fracción representa una parte de algo o una división.***

Pero, ¿por qué son importantes las fracciones, si ya teníamos una manera de representar estos números decimales? Para responder esta pregunta observemos el siguiente ejemplo. En el parque de mi escuela hay un pasamanos de 21 barras. Después de avanzar 3 barras consecutivas recorres un metro de distancia. ¿Sabes cuántos metros mide el pasamanos?



Del hecho de que con 3 barras consecutivas se recorre un metro, se obtiene que una barra es un tercio de un metro. La división es:



> El resultado de hacer la división de 1 entre 3 es 0.3333333... donde la cantidad de números 3 después del punto decimal nunca termina (son infinitos). Entonces, para poder terminar el problema, podríamos tomar un número aproximado y decir que en una barra se avanza 0.33 metros. Así que la longitud que abarcan 21 barras es 21 × 0.33 = **6.93 metros.**

Otra manera de resolver el problema es usando fracciones, como ya vimos anteriormente dividir 1 entre 3, es equivalente a la fracción $\frac{1}{3}$, por lo tanto en cada barra se avanza $\frac{1}{3}$ de metro. Entonces al pasar 21 barras se habría recorrido:

$$21 \times \frac{1}{3} = \frac{21}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{21 \times 1}{1 \times 3} = \frac{21}{3} = 7 \text{ metros}$$

Obtuvimos resultados distintos en ambos métodos porque en el primero, el resultado que usamos de la división de 1 entre 3 fue 0.33 que no es exacto, así que al hacer operaciones con esta cantidad, el resultado es aproximado. ***La ventaja de usar fracciones es que éstas sí son representaciones exactas de la división.***

Para conocer más sobre las fracciones, estas tienen dos partes:
el numerador y el denominador.

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{numerador} \\ \longrightarrow \textbf{denominador} \end{array}$$

Si el numerador es más grande que el denominador, entonces la fracción representa un número más grande que uno.

$$\frac{15}{6} = 2.5$$

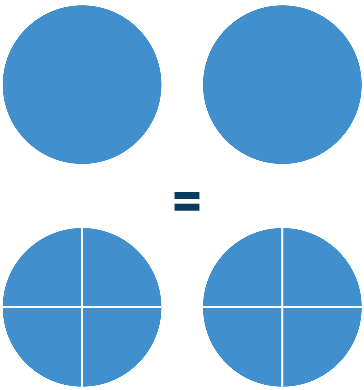
Fracciones equivalentes

Seguro te ha pasado al igual que a mí, que has visto más de una manera de representar un número, por ejemplo:

$$2 = 002 = 2.00 = \frac{2}{1}$$

Pero además de estas formas posiblemente te ha tocado escuchar e incluso estudiar algo llamado fracciones equivalentes, por ejemplo:

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{4}$$



A estas fracciones se le llama así porque representan el mismo número, al igual que en el primer ejemplo. Ahora te mostraré cómo se obtuvieron las fracciones equivalentes del número 2:

$$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \times 1 = \frac{2}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{2\times4}{1\times4} = \frac{8}{4}$$

La menor fracción está multiplicada por alguna otra que es equivalente a uno, ya que multiplicar por uno no altera al número.

Notemos que escribir

$$2 \times 4 = 8$$

y

$$1 \times 4 = 4$$

nos ayudó a ver que la fracción

$$\frac{8}{4}$$

es la misma que

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{4}$$

Este **4** que descubrimos para llegar al 8 y al 4, es un factor que tienen en común estos números.

Lo anterior nos dice que las fracciones se pueden reducir a unas más simples si tienen factores en común. En el ejemplo, la fracción más simple equivalente a

$$\frac{8}{4} \text{ es } \frac{2}{1}$$

pues 2 y 1 ya no tiene factores comunes.

Ahora usaremos el poder de las fracciones equivalentes para poder comparar fracciones.

¿Qué número es más grande?

Mis amigos Mane y Chema compraron cada uno un pastel de manzana del mismo tamaño. Mane partió su pastel en 7 partes iguales, se comió 4 el mismo día que lo compró y guardó el resto para el día siguiente. Chema en cambio partió su pastel en 9 partes iguales, repartió 4 de ellas entre sus hermanos y se quedó una para él ese mismo día, guardó el resto para el día siguiente. ¿A quién le quedó más pastel para el día siguiente?

A Mane le quedaron

$$\frac{3}{7}$$

del pastel, mientras que a Chema le quedaron

$$\frac{4}{9}$$

Comparar fracciones es muy sencillo si estas tienen el mismo denominador, por ejemplo, sabemos que

$$\frac{3}{4} \textbf{ es mayor que } \frac{2}{4}$$

pues en ambas fracciones partimos el objeto en cuatro partes iguales, en la primera fracción tomamos 3 de estas partes, mientras que en la segunda solamente tomamos 2 de las 4 partes, y 3 es mayor a 2.

La estrategia para comparar dos fracciones que no tienen el mismo denominador consiste en convertir el problema a uno que ya conocemos, en este caso, convirtiendo las fracciones a unas con el mismo denominador. Las fracciones equivalentes serán nuestra principal herramienta.

Para encontrar fracciones equivalentes de

$$\frac{3}{7} \textbf{ y de } \frac{4}{9}$$

que tengan el mismo denominador, debemos hallar un múltiplo común de 7 y 9.
Algunos múltiplos de **7** son:
7, 14, 21, 28, 35, 42, 56, **63,** 70, 77...
Mientras que algunos de los múltiplos de **9** son:
9, 18, 27, 36, 45, 54, **63,** 72, 81, 90, 99...

Entonces, un múltiplo que tienen en común 7 y 9 es 63. Fíjate que puede haber muchos múltiplos comunes, pero las fracciones equivalentes que usaremos en este caso son

$$\frac{3}{7} = \frac{27}{63} \quad \text{y} \quad \frac{4}{9} = \frac{28}{63}$$

Entonces, a Mane le quedaron $\frac{27}{63}$ del pastel, mientras que a Chema le quedaron $\frac{28}{63}$

Ahora, sabemos que a Chema le queda más pastel para el segundo día que a Mane.

Suma de fracciones

Cuando las fracciones que queremos sumar no tienen el mismo denominador, nuestro problema es más divertido todavía y se parece mucho al problema de comparar dos fracciones.

A mi amiga Lili le dieron \$600 pesos para gastar en la semana. Si una tercera parte de este dinero lo gasta en pasajes para ir a la escuela y dos quintas partes en comprar todos los días su postre favorito en el receso, entonces ¿qué fracción de su dinero no se gasta?

Una tercera parte de \$600 es equivalente a dividir esta cantidad entre tres y tomar una de ellas,

$$\frac{600}{3}$$

Por otro lado, dos quintas partes de \$600 equivalen a tomar dos veces

$$\frac{600}{5}$$

Por otro lado,dos quintas partes de $600 equivalen a tomar dos veces

$$\frac{600}{5} + \frac{600}{5} = \frac{1200}{5}$$

Por tanto, en total Lili habrá gastado

$$\frac{600}{3} + \frac{1200}{5}$$

de su dinero.

Para resolver esta suma, usaremos las siguientes equivalencias:

$$\frac{600}{3} = \frac{3000}{15} \quad y \quad \frac{1200}{5} = \frac{3600}{15}$$

Entonces:

$$\frac{600}{3} + \frac{1200}{5} = \frac{3000}{15} + \frac{3600}{15} = \frac{6600}{15}$$

No hemos terminado todavía; la fracción de dinero que le sobra a Lili es:

$$600 - \frac{6600}{15} = \frac{600}{1} - \frac{6600}{15} = \frac{9000}{15} - \frac{6600}{15} = \frac{2400}{15} = 160$$

Por lo tanto a Lili le sobran $160 pesos al final de la semana.

En resumen, para sumar dos fracciones con diferente denominador basta encontrar dos fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y sumarlas.

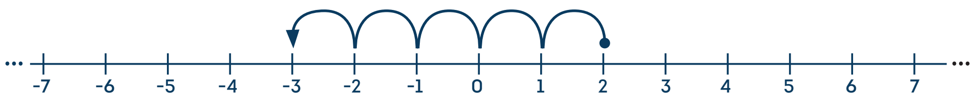
Los números enteros y números racionales

En la escuela nos enseñaron que los números con los que aprendimos a contar se llaman números naturales y estos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...

Los números enteros son los números naturales, el cero, y los negativos de los naturales: ...,-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...

La maestra me dijo que los números que conocemos se pueden ubicar en una recta numérica en orden ascendente de izquierda a derecha, esto quiere decir que mientras más a la derecha esté el número, más grande será. Intentémoslo con los números enteros:

La resta de números en la recta numérica corresponde a desplazarse a la izquierda tanto como indique la resta, por ejemplo: La resta de los números 2-5 corresponde a posicionarse en el lugar que ocupa el número 2 en la recta numérica y luego retroceder (ir a la izquierda) 5 lugares como en la figura:



Fíjate que una resta la podemos escribir de muchas maneras. Por ejemplo **-5** lo podemos escribir como **-2-3** pues si nos posicionamos en el número **-2** en la recta numérica basta retroceder 3 lugares a la izquierda para llegar al número **-5**, aunque también lo podemos escribir como **-(2+3)** que quiere decir que primero sumamos 2+3 y luego, si nos posicionamos en el 0, tenemos que retroceder la cantidad que nos dio la suma, entonces −(5) = -5. Lo anterior nos dice que **-(2+3)=-2-3**. Usando esto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{2 - 5} &= \mathbf{2 + (- 2 - 3)} \\ &= \mathbf{(2 - 2) - 3} \\ &= \mathbf{0 - 3} \\ &= \mathbf{- 3} \end{aligned}$$

Si restamos muchas veces el mismo número, estaremos retrocediendo muchas posiciones a la izquierda de la recta numérica, por ejemplo:

$$-3-3-3-3-3 = -15$$

En la escuela hemos aprendido que sumar o restar muchas veces el mismo número corresponde a una multiplicación del número por el número de veces que lo sumamos. En el ejemplo anterior

$$-3-3-3-3-3 = (-3) \times 5$$

Entonces:

$$(-3) \times 5 = -15$$

Con esto observamos que, ***si multiplicamos un número negativo por uno positivo, el resultado es un número negativo.***

La multiplicación de dos números negativos es un poco diferente.

Recuerda que el negativo de un número es el número posicionado a la misma distancia del **0** pero del lado contrario del cero, por ejemplo, el negativo de *-2* es el número *2* pues ambos se ubican a la misma distancia del número **0** y en posiciones contrarias.

Tomar el negativo del número **-2**, que podemos representar como **-(-2)**, corresponde al número posicionado a la misma distancia del 0 de lo que está -2, pero del lado opuesto: el único que cumple esto es el número **2**. Entonces

$$-(-2) = 2$$

Así que la multiplicación de dos números negativos, por ejemplo

$$(-2) \times (-3)$$

la podemos representar también como

$$-(2) \times (-3)$$

que es el negativo del número

$$(2) \times (-3) = -6$$

es decir *6*. Entonces

$$(-2) \times (-3) = 6$$

En resumen, ***la multiplicación de dos números negativos da como resultado un número positivo.***

¡Ahora sí hablemos de las fracciones!

Un problema que no se puede resolver únicamente usando números enteros es el de repartir o dividir objetos en partes iguales, pues como ya vimos, las divisiones no siempre dan como resultado un número entero, por eso surgieron las fracciones y para poder hacer todas las operaciones de números con las fracciones se crearon **los números racionales.**

Los racionales son todos los números que se pueden escribir como la división de un número entero entre un número natural; sumar y restar dos de ellos es sencillo pues ya lo sabemos hacer con las fracciones. La manera de multiplicar números racionales es la siguiente: la fracción que resulta tiene como numerador el producto de los numeradores de las fracciones que se están multiplicando y como denominador la multiplicación de los denominadores.

Ejemplo: $$\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{2\times 5}{3\times 8} = \frac{10}{24}$$

La división de números racionales es un poco diferente y hay que recordar dos cosas importantes para realizarlo correctamente:

1. Cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número:

$$1221 \times 1 = 1221$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$3 \times 1 = 3$$
$$-1 \times 1 = -1$$

2. Cualquier número, distinto de cero, dividido entre sí mismo da como resultado 1.

Un número es ***inverso multiplicativo*** de otro número si al multiplicarlos el resultado es 1. Todos los números, excepto el número 0, tienen un *único* inverso multiplicativo, esto quiere decir que no puede haber dos números diferentes que sean inversos multiplicativos del mismo número.

Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es

$$\frac{1}{3}$$

porque

$$3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

y no hay ningún otro número diferente a

$$\frac{1}{3}$$

que al multiplicarlo por 3 de como resultado 1. Así mismo, el inverso multiplicativo del número

$$\frac{1}{3} \text{ es } \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

Observa que

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} \textbf{ debe ser igual a 3}$$

porque ya vimos que

$$3 \text{ y } \frac{1}{3} \textbf{ son inversos multiplicativos.}$$

La fracción de fracciones

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

es la división de dos fracciones. Esta fracción también se escribe como:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} \times \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

Hay que observar que

$$\frac{1}{3} \text{ y } \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

son inversos multiplicativos uno del otro. Entonces

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times 3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{1}$$

La regla anterior nos permite hacer divisiones de fracciones. Fíjate, si ahora queremos resolver la fracción

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}}$$

debemos notar que estamos multiplicando

$$\frac{7}{2}$$

por el inverso multiplicativo de

$$\frac{2}{5}$$

esto porque

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{\frac{2}{5}}$$

El inverso de

$$\frac{2}{5} \text{ es } \frac{5}{2}$$

esto significa que

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 2} = \frac{35}{4}$$

En resumen, la división de dos fracciones es una multiplicación de la fracción que está en el numerador por el inverso multiplicativo de la fracción que está en el denominador.

Regla del sándwich

Tiene este nombre gracioso para que la recordemos fácilmente.
Si tienes una división de fracciones, como ya vimos podemos escribirla como una fracción de fracciones:

$$\frac{7}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}}$$

Ahora multipliquemos el número que quedó hasta arriba por el que está hasta abajo (las tapas del sándwich), y ese resultado hay que ponerlo como numerador de nuestra nueva fracción. Por otro lado, para poner el denominador, escribimos el resultado de la multiplicación de los números de en medio (el relleno del sándwich):

$$\frac{7}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{7 \times 5}{2 \times 2} = \frac{35}{4}$$

Problema

¿Qué fracción es más grande

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

Solución

Fíjate que la fracción

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \ \textbf{es igual a} \ \frac{1}{2}$$

por el inverso multiplxicativo de 3, es decir

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Por otro lado la fracción

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Usando lo que sabemos de las fracciones equivalentes tenemos que

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

Entonces

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} \ \textbf{es mayor que} \ \frac{\frac{1}{2}}{3}$$

Problema

En la cafetería de mi escuela vendieron un chocolate con leche que me gustó mucho. Recuerdo que un día que pasaba por ahí vi un letrero pequeño que anunciaba la siguiente promoción:

¡Sólo el día de hoy!

La primer taza de chocolate con leche que usted compre cuesta \$12.°°

La siguiente taza de chocolate que usted compre costará la mitad que la anterior.

Terminé comprando 4 tacitas de chocolate ese día. ¿Sabes cuánto gasté ese día?
Es muy sencillo, fíjate:

Solución

En la primera taza gasté 12 pesos.

Luego, como la segunda costaba la mitad de la anterior, entonces gasté

$$\frac{12}{2} = 6$$

pesos en ella pues al realizar la división 12 entre 2 el resultado es 6 exactamente.

En la tercera gasté la mitad de la anterior, es decir la mitad de

$$\frac{12}{2}$$

que es la fracción

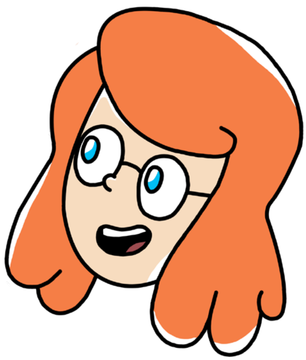
$$\frac{\frac{12}{2}}{2} = \frac{6}{2} = \text{3 pesos}$$

Finalmente, la cuarta me costó la mitad de lo que gasté en la tercera, es decir

$$\frac{\frac{\frac{12}{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2} = \text{1.5 pesos}$$

Así que en total gasté

$$12+6+3+1.5= 22.5 \text{ pesos}$$



Exponentes

En matemáticas nos gusta simplificar las cosas tanto como sea posible. Por ejemplo, en lugar de escribir

$$3 \times 3 \quad \text{escribimos} \quad \underbrace{3}_{\text{base}}{}^{2} \leftarrow \text{exponente}$$

al número *3* lo llamamos base y al *2* exponente.

El exponente nos dice cuántas veces multiplicamos a la base por sí misma. Como

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

también es común decir que 9 es el cuadrado de 3. Cuando no se indica el exponente sobre el número significa que su exponente es 1.
Fíjate que lo anterior nos ayuda a hacer nuestras expresiones más simples, pues en lugar de escribir, por ejemplo,

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad \textbf{escribimos} \qquad 32 = 2^5$$

Hay tres reglas muy importantes para hacer operaciones con exponentes, verás que son realmente muy sencillas:

1. La suma de exponentes. Cuando multiplicamos dos números con la misma base sus exponentes se suman. Por ejemplo:

$$3 \times 3 = 3^{1+1} = 3^2 \qquad \textbf{y} \qquad 3^7 \times 3^2 = 3^{7+2} = 3^9$$

2. La multiplicación de exponentes. Al elevar un número a cierta potencia, sus exponentes se multiplican. Por ejemplo:

$$(3^2)^3$$

significa tomar el producto de 3^2 por sí mismo tres veces, es decir

$$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \qquad \textbf{que es} \qquad 3^{2+2+2} = 3^{2\times 3} = 3^6$$

Así que esto se puede resumir en

$$(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6$$

3. Los exponentes negativos. Un exponente negativo nos indica el inverso multiplicativo del número que está en la base. Por ejemplo:

$$3^{-1} \quad \textbf{es el número} \quad \frac{1}{3} \quad \textbf{que es el inverso multiplicativo de 3}$$

Ejercicios

1. ¿Cuál es la mitad de 2^{2017}?

Solución

Tomar la mitad de un número significa dividirlo entre dos, es decir

$$\frac{2^{2017}}{2}$$

Este número lo podemos escribir también como

$$\frac{2^{2017}}{1} \times \frac{1}{2}$$

Por las leyes de exponentes sabemos que

$$\frac{1}{2} = 2^{2-1}$$

y con ello

$$\frac{2^{2017}}{2} = 2^{2017} \times 2^{2-1} = 2^{2017-1} = 2^{2016}$$

La mitad de 2^{2017} es 2^{2016}

2^0 2^1 2^2 2^3

2. Simplifica las siguientes fracciones:

a)
$$\frac{\left(1+\frac{3+9}{6}\right)^0}{5-\frac{12}{\frac{1}{2}}}$$

Solución

Recordemos ***que cualquier número elevado a la potencia cero es igual a uno,*** entonces

$$\left(1+\frac{3+9}{6}\right)^0 = 1$$

Por otro lado,

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} \text{ es igual } \frac{12}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{24}{1}$$

Luego

$$5-24=-19$$

en la recta numérica. Por lo anterior,

$$\frac{\left(1+\frac{3+9}{6}\right)^0}{5-\frac{12}{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

es un número racional y negativo.

b)

$$\frac{3}{\frac{1}{2}+2}-1$$

Solución

Para convertir nuestro ejercicio en uno que ya conocemos vamos a resolverlo por partes. Sabemos que podemos escribir 2 como la división

$$\frac{2}{1}$$

entonces

$$\frac{1}{2}+2 \quad \text{es} \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{1}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{2} \quad \text{que es igual a} \quad \frac{5}{2}$$

Así que

$$\frac{3}{\frac{1}{2}+2}=\frac{3}{\frac{5}{2}}$$

Ahora escribimos 3 como

$$\frac{3}{1}$$

por lo que la fracción

$$\frac{3}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{2}}$$

Como hemos visto, la fracción

$$\frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{1}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

Finalmente,

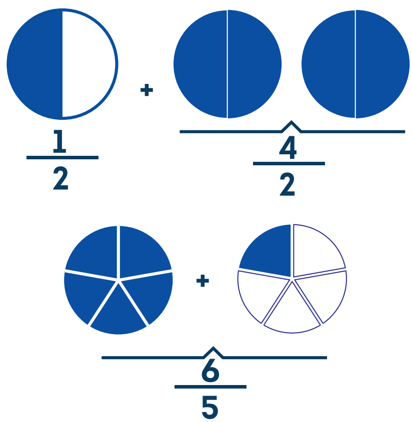
$$\frac{3}{\frac{1}{2}+2}-1=\frac{6}{5}-1$$

que es equivalente a la fracción

$$\frac{6}{5}-\frac{5}{5}=\frac{1}{5}$$

Concluimos que

$$\frac{3}{\frac{1}{2}+2}-1=\frac{1}{5}$$



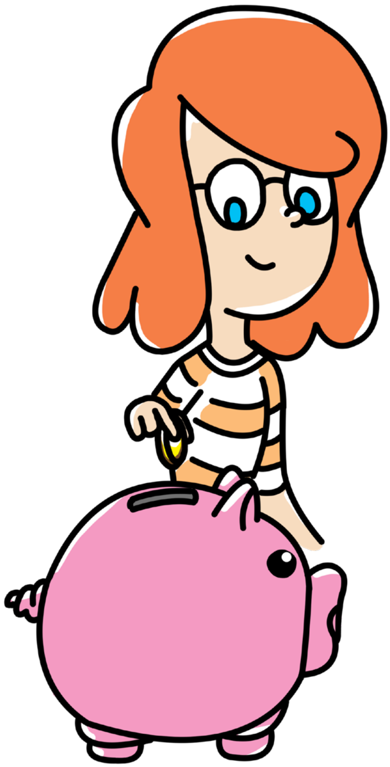
4. Álgebra

Variables

En problemas de matemáticas nos piden que descubramos cuál es el valor de una cantidad desconocida o que utilicemos ese valor desconocido de alguna manera. Fue con este tipo de problemas que se planteó la idea de utilizar variables. Podemos imaginarnos a las variables como una máscara que se ponen los números encima, de manera que aunque no podamos saber qué número está detrás de esa máscara, sabemos que siempre es el mismo número. Por simplicidad las máscaras que utilizarán los números son las *letras*.

Problema:

A mi amiga Miriam le gusta mucho ahorrar su dinero. Durante la semana guarda todas las monedas de $5 pesos que puede dentro de su alcancía. Si acaba de iniciar y al final de esta semana logró ahorrar $150 pesos, ¿cuántas monedas hay dentro de su alcancía?



Solución:

En este problema, el número que desconocemos es la cantidad de monedas de $5 pesos dentro de la alcancía, así que este es el número que es una *variable* y lo identificaremos con una *letra*. Diremos que el número de monedas es X. Como cada moneda es de $5 pesos, sabemos que la cantidad total de dinero ahorrado es la cantidad de monedas multiplicado por 5, es decir $5 \times X = 150$.

A esta última expresión se le conoce como *ecuación*, y el único objetivo de ésta es descubrir el valor escondido detrás de la *X*. Cuando estás trabajando con una ecuación, lo único que debes tener en mente es que para mantener la igualdad debes hacer las mismas operaciones a la derecha e izquierda del signo "=". Por ejemplo podríamos decidir multiplicar por *2* la expresión a la izquierda de "=", pero si queremos que esas expresiones sigan siendo iguales, tendremos que multiplicar por *2* también a la expresión de la derecha.

$$2 \times 5 \times X = 2 \times 150$$
$$10 \times X = 300$$

Hemos mantenido la igualdad, pero con esta operación no estamos más cerca de encontrar la identidad de *X*, intentemos otra operación.

Veamos que en la ecuación $5 \times X = 150$, el 5 nos está estorbando para tener a la *X* sola de un lado de la ecuación, lo que nos permitiría descubrir la identidad de *X*. Así que nuestro nuevo objetivo es quitar al 5 del lado de *X*. Para hacer esto recurriremos a los inversos multiplicativos de los que hablamos antes.

Veamos qué pasa al multiplicar por

$$\frac{1}{5}$$

que es el *inverso multiplicativo* de 5, en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{5} \times 5 \times X = \frac{1}{5} \times 150$$

$$\frac{5}{5} \times X = \frac{150}{5}$$

$$1 \times X = 30$$

$$X = 30$$

En la última parte hemos aprovechado el hecho de que *cualquier número multiplicado por 1 es el mismo número*. Hemos descubierto que el número que se escondía detrás de *X* era 30, así que la cantidad de monedas en la alcancía es 30.

Problema:
Mi abuelita tiene 70 años. Mi papá tiene la mitad de la edad que mi abuelita tuvo hace dos años. ¿Qué edad tiene mi papá?

Solución:
La cantidad desconocida en este problema es la edad de mi papá. A esta edad la llamaremos *A* (como puedes ver, realmente podemos elegir cualquier letra para ser la variable). De nuevo sabemos que *A* es igual a la mitad de la edad de mi abuelita hace dos años. De manera que la ecuación para descubrir cuánto vale *A* es:

$$A = \frac{1}{2} \times (70 - 2)$$

Observa que en esta ocasión no hay ningún número estorbando al lado de *A*, en el lado izquierdo del signo "=". Sólo nos queda hacer la operación de la derecha, cuidando de hacerla en orden. Recuerda que los paréntesis indican que operación se debe realizar primero. Así que

$$A = \frac{1}{2} \times (70-2) = \frac{1}{2} \times 68 = \frac{68}{2} = 34$$

De manera que mi papá tiene **34 años.**

Operaciones con variables

Como ya dijimos antes, las variables representan números. Esto nos dice que todas las leyes que se cumplen para los números deben cumplirse para las variables también. A la hora de tener que hacer operaciones con ellas se harán de la misma manera que se haría con números que conocemos, siempre cuidando de dejar en claro cuál es la información que desconocemos.

Problema:
Paulina plantó un árbol de cedro de medio metro en el parque. Desde entonces, el árbol ha crecido la misma cantidad año con año. A los 7 años de haberse plantado el árbol mide 11 metros de altura. ¿Qué altura tenía el árbol a los 4 años de haberse plantado?

Solución:
Como no conocemos la altura que el árbol creció cada año, este es el valor al que llamaremos variable y le asignaremos la letra *h*. En términos de *h* sabemos que la altura del árbol a los 7 años debería ser

$$h + h + h + h + h + h + h + \frac{1}{2}$$

ya que al principio medía $\frac{1}{2}$

de metro y luego creció *h* en cada uno de los 7 años. Como *h* es un número, aunque desconocido por nosotros, sabemos que sumar h siete veces es lo mismo que multiplicar a h por 7. Así que

$$h+h+h+h+h+h+h+\frac{1}{2} = 7\times h + \frac{1}{2}$$

Y en el problema nos dicen que la altura del árbol a los 7 años es 11 metros, así que la ecuación para encontrar el valor de h es:

$$7\times h + \frac{1}{2} = 11$$

$$7 \times h + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 11 - \frac{1}{2}$$

$$7 \times h = \frac{11}{1} - \frac{1}{2}$$

$$7 \times h = \frac{22}{2} - \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\frac{1}{7} \times 7 \times h = \frac{1}{7} \times \frac{21}{2}$$

$$\frac{7}{7} \times h = \frac{21}{7\times 2}$$

$$1 \times h = \frac{7\times 3}{7\times 2}$$

$$h = \frac{3}{2}$$

Ya tenemos que

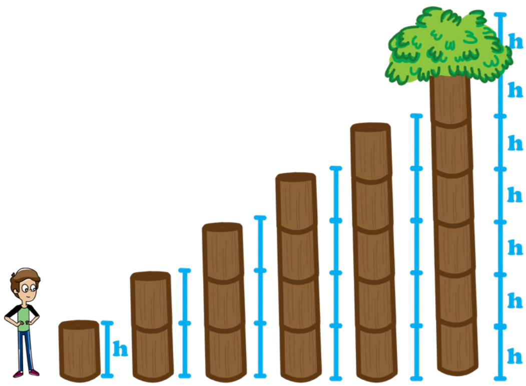
$$h = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ metros}$$

metros, así que el árbol crece 1.5 metros cada año. Pero en esta ocasión no nos preguntan este valor directamente, sino que hay que utilizar este valor para encontrar la respuesta del problema. Nos preguntan cuál era la altura del árbol después de 4 años de ser plantado. La respuesta a eso es:

$$h+h+h+h+\frac{1}{2} = 1.5+1.5+1.5+1.5+0.5$$

$$= 6.5$$

Por lo cual, el árbol mide 6.5 metros después de 4 años.



Suma de Gauss

Hace mucho tiempo, cuando el matemático Gauss estudiaba la educación primaria como tú, su profesora les escribió el siguiente ejercicio en el pizarrón: *Sumar 1+2+3+4+...+100. (los 3 puntos "..." significan que debemos continuar sumando todos los números, uno por uno hasta llegar al 100, los utilizamos para abreviar y no tener que escribir los cien números)*
Gauss fue el primero en entregar el resultado. En lugar de sumar una por una las cantidades, él usó sus habilidades en matemáticas como te voy a explicar; sumamos dos veces las cantidades que queremos en el siguiente orden:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ + \; 100 + 99 + 98 + \dots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 100 \times 101 \end{array}$$

Entonces obtenemos una suma de números iguales; en este caso 100 veces el número 101. Además sabemos que sumar dos veces es el doble de la suma que queríamos encontrar originalmente, así que basta tomar la mitad de 100×101 para obtener lo que queríamos:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{100}{2} \times 101 = 50 \times 101 = 5050$$

Si ahora tomamos un número natural n y queremos sumar todos los números naturales menores o iguales a él: $1 + 2 + 3 + \dots + n$

Podemos usar el truco que aprendimos de la misma manera. Si sumamos dos veces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ + \; n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = (n+1) \times n \end{array}$$

Entonces la suma que buscamos es la mitad de la anterior, así

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Esta fórmula se conoce como la *fórmula de Gauss.*

Ahora podemos hacer cualquier suma de números naturales consecutivos que queramos. Fíjate, si queremos calcular la suma de todos los números naturales menores o iguales a **2017** simplemente usamos la fórmula de Gauss. En este caso **n= 2017 y n+1= 2017+1= 2018**

Por la fórmula de Gauss:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2017 = \frac{2017 \times 2018}{2} = 2035153$$

Ejercicio:
Calcula la suma de los números 544+545+...+1999

Solución:
Cualquier número ***n*** más cero es igual al número ***n***, entonces:

$$544+545+\ldots+1999=0+544+545+\ldots+1999$$

El número 0 lo podemos escribir de muchas maneras, una muy útil es observando que para cualquier número **a** se cumple que **a-a=0**. En nuestro caso, si tomamos **a=1+2+...+543** entonces:

$$0=a-a=1+2+\ldots+543-(1+2+\ldots+543)$$

Usando esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} 544+545+\ldots+1999 &= (1+2+\ldots+543)+544+\ldots+1999-(1+2+\ldots+543) \\ &= (1+2+\ldots+543+544+\ldots+1999)-(1+2+\ldots+543) \end{aligned}$$

Por la fórmula de Gauss sabemos calcular las sumas

$$1+2+\ldots+543+544+\ldots+1999 = \frac{1999\times2000}{2} = 1999000$$

y

$$1+2+\ldots+543 = \frac{543\times544}{2} = 147696$$

Así que ya podemos calcular la cantidad que estamos buscando:

$$\begin{aligned} 544+545+\ldots+1999 &= (1+2+\ldots+543+544+\ldots+1999)-(1+2+\ldots+543) \\ &= (1999000)-(147696) \\ &= 1851304 \end{aligned}$$

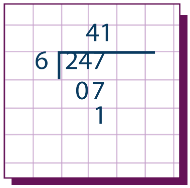
5. Teoría de Números

¿Qué son los divisores?

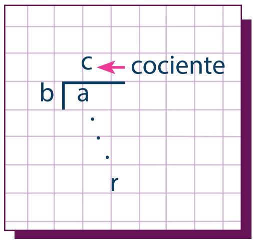
Cuando comencé el cuarto año de primaria me enseñaron a hacer operaciones como multiplicar y dividir números de varios dígitos. Al principio pensé que las multiplicaciones eran mis operaciones favoritas y casi no me gustaba dividir. Luego me di cuenta de que había muchas cosas que podía hacer con las divisiones.

Por ejemplo, podía saber rápidamente cómo separarnos en equipos para hacer un torneo de canicas y cuántas veces podíamos jugar durante el receso. Todo esto me ayudó a realizar divisiones de números grandes cada vez más rápido y con el tiempo las divisiones se volvieron mis operaciones favoritas. Pero claro, algunas divisiones seguían siendo más difíciles que otras.

En ocasiones cuando hacemos una división el número que se obtiene no es un número *exacto*, para obtener el resultado es necesario seguir la operación utilizando números decimales. Este es el caso de las divisiones donde se obtiene un número que llamamos **resto** o **residuo** que es diferente *a cero*, como en el ejemplo donde el *residuo es* 1.



En general cuando tenemos dos números enteros a y b, donde a es mayor que b, al hacer la operación a entre b, realizamos una serie de pasos que llevan al siguiente esquema.



En este esquema los números c y r son números enteros y juntos cumplen la siguiente igualdad.

$$a = c \times b + r$$

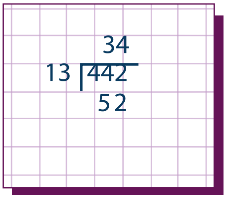
Un ejemplo de esto es cuando hacemos la división 247 entre 6. Ya que efectivamente.

$$\mathbf{247 = 6 \times 41 + 1}$$

Estas divisiones me parecían más difíciles que aquellas que al final resultaban tener como residuo el 0. Ya que, en éstas, como

r = 0 **la igualdad** **a = c × b + r** puede volver a escribirse así **a = c × b**

Esto nos dice que el resultado de dividir a entre b es igual a un número entero *c*. A estas divisiones se les conoce como *divisiones exactas,* pues el resultado que se obtiene es un número entero.



Los números enteros tienen propiedades tan interesantes que hay toda una rama de las matemáticas que busca conocer más sobre ellos. Esta rama se conoce como la **Teoría de Números.**

Te sorprenderías ahora de saber que las divisiones exactas además de ser las más sencillas están relacionadas con el concepto más importante sobre el cual se basa toda la Teoría de Números. Este concepto tan importante es el de **divisibilidad**.

El objetivo de la divisibilidad no es determinar el resultado de las divisiones, si no identificar cuándo la división entre dos números enteros es exacta, es decir cuándo el resultado es también un número entero y que el residuo sea cero.

Para distinguir a las divisiones exactas de aquellas que no lo son, a partir de ahora diremos que ***b*** divide a ***a*** solamente si la división ***a* entre *b*** es exacta y denotaremos esto como **b|a.** De lo contrario diremos que ***b*** no divide a ***a*.**

En el primer ejemplo calculamos 2476. Recordemos que

$$247 = 6 \times 41 + 1$$

por lo que esta división no es exacta y por esta razón decimos que **6 no divide a 247.** Por otro lado, decimos que **13 sí divide a 247** ya que

$$247 = 13 \times 19$$

y el residuo es igual a 0.

En resumen, será lo mismo decir que **el número** b **divide al número** a **si existe un número entero** c **para el cual**
$a = b \times c$. Y aunque normalmente decimos que ***b*** divide a ***a***, existen otras maneras de decir lo mismo. Estas son algunas expresiones equivalentes:

b es un divisor de ***a.***
b es un factor de ***a.***
a es divisible por ***b.***
a es un múltiplo de ***b.***

Ejemplo 1
Separando canicas.

Un día de escuela Miguel y yo contábamos nuestras canicas durante el receso. Recuerdo bien que Miguel tenía 21 canicas y yo 18 y jugamos a ver quién podía separar de más formas distintas sus canicas en grupos de la misma cantidad. Comenzó Miguel separando sus 21 canicas.

- Primero formó 21 grupos de una sola canica.
- Luego formó 7 grupos de 3 canicas cada uno.
- Inmediatamente después pensó que si podía hacer esto también podría organizar sus canicas para formar 3 grupos con 7 canicas cada uno.
- Al final se dio cuenta de que le quedaba formar un solo grupo con las 21 canicas.

Juntos buscamos los divisores de 18 que era la cantidad de canicas que yo tenía y encontramos todos estos números.

Divisores del número 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Esta fue la primera vez que pensé que los números enteros y los divisores tenían algo misterioso. Aunque yo tenía menos canicas que Miguel, mi número de canicas tenía más divisores que el suyo. Fue entonces cuando comencé a investigar sobre los números enteros y al principio tenía muchas preguntas como, ¿se puede saber cuántos divisores tiene un número?, entre más grande es un número ¿tiene más o menos divisores? o si el número es muy grande ¿cómo hago para encontrar qué números lo dividen?
Primero hice varios ejemplos.

Divisores del número 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.
Divisores del número 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.
Divisores del número 100: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100.

Después de hacer algunos ejemplos como estos me di cuenta de que poco tenía que ver el tamaño del número con su cantidad de divisores, pues 18 tiene más divisores que 21, y 30 tiene menos divisores que 48. ¿Pero esto qué sentido tiene? La respuesta la descubrí cuando aprendí a encontrar los divisores de números más grandes como 50592 o 260795.

Como puedes imaginarte sería muy cansado hacer cada una de las divisiones de 505922, 505923, 505924, 05925, 505926, etc., para encontrar todos los divisores de un número tan grande, pero afortunadamente nada de esto es necesario. Algo que aprendí de las matemáticas es que son útiles para simplificar problemas difíciles. Usando nuestra creatividad podemos encontrar soluciones a cosas que antes nos parecerían imposibles y el problema de los divisores no es una excepción. Pero antes voy a mostrarte algunos trucos que te servirán para resolver este problema.

Criterios de Divisibilidad

Para encontrar divisores de un número hay reglas en las matemáticas que nos ayudan a determinar si un número es divisor de otro sin realizar la división. Estas reglas se conocen como **Criterios de Divisibilidad.**

Criterio	Ejemplo
Criterio de divisibilidad del número 2. Un entero *a* es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.	96 es divisible entre 2.
Criterio de divisibilidad del número 3. Un entero *a* es divisible entre 3 si la suma de sus cifras es divisible entre 3.	7230 es divisible entre 3. Ya que 7+2+3+0=12 es divisible entre 3.
Criterio de divisibilidad del número 4. Un entero *a* es divisible entre 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es divisible entre 4.	1924 es divisible entre 4 porque 24 lo es.
Criterio de divisibilidad del número 5. Un entero *a* es divisible entre 5 si termina en 5 o 0.	875 es divisible entre 5.
Criterio de divisibilidad del número 6. Un entero *a* es divisible entre 6 si es divisible entre 2 y entre 3.	924 es divisible entre 6.
Criterio de divisibilidad del número 7. Un entero *a* es divisible entre 7 si la diferencia entre el número formado por sus cifras excluyendo las unidades y el doble de la cifra de las unidades es múltiplo de 7.	406 es divisible entre 7 pues 40-(2×6)=28 es divisible entre 7.
Criterio de divisibilidad del número 8. Un entero *a* es divisible entre 8 si el número formado por sus tres últimas cifras es divisible entre 8.	9432 es divisible entre 8 porque 432 es divisible entre 8.
Criterio de divisibilidad del número 9. Un entero *a* es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es divisible entre 9.	4527 es divisible entre 9 porque 4+5+2+7=18 es divisible entre 9.
Criterio de divisibilidad del número 10. Un entero *a* es divisible entre 10 si termina en 0.	3820 es divisible entre 10.
Criterio de divisibilidad del número 11. Un entero *a* es divisible entre 11 si la diferencia entre la suma de sus cifras en posición par menos la suma de sus cifras en posición impar es cero o es un número divisible entre 11.	7062 es divisible entre 11 porque (7+6)-(0+2)=11

Recuerda que el número 0 es divisible entre cualquier número ***a***, ya que **0×a**=0 y el residuo de esta división también es 0. También puedes notar que 0 = 0×a para cualquier número ***a***, entonces **a|0** como habíamos visto anteriormente. Tener presente esto es muy útil principalmente en los criterios de divisibilidad de los números del 4 y del 8, ya que así sabremos que un número que termina en 00 es siempre divisible entre 4, y uno que termina en 000 también es divisible entre 8.

Ejemplo 2

¿El número 23562 es divisible entre 4, 7 y 11?

Solución:

Primero veamos que el número formado por las últimas dos cifras del número es 62. Al hacer la división 62 entre 4 observamos que 62 no es divisible entre 4 y por el criterio del 4 sabemos que el número 23562 tampoco lo es.

Para saber si el número es divisible entre 7, tomemos el número que se forma al excluir las unidades que es 2356 y restemos a este el doble de las unidades que es 4, obteniendo 2356-4=2352, que no sabemos aún si es divisible entre 7, por lo que podemos repetir este proceso nuevamente con el número 2352. Aplicando la regla a 2352 obtenemos el número 235-4=231. Repetimos una vez más el proceso para el número 231 y ahora resulta 23-2=21. Como el número 21 sí es divisible entre 7 también lo es el número 23562.

Ahora utilicemos el criterio del 11, la suma de sus cifras en posición impar es 2+5+2=9 y la suma de sus cifras en posición par es 2+6=9. La diferencia de las sumas es 9-9=0 que es divisible entre 11, por lo que el número 23562 también lo es.

Ejemplo 3

Hace un tiempo quería darles una sorpresa a mis amigos. Fui a la tienda a buscar canicas y me dijeron que solo se vendían en bolsitas de 6. Quería comprar la menor cantidad de bolsitas que fueran suficientes para repartir todas las canicas entre mis 3 amigos y yo, y que a cada quien le tocaran al menos 25 canicas. ¿Cuántas bolsitas debía comprar?

Solución:

Llamemos **N** al número de canicas que debía comprar. Como cada bolsita tiene 6 canicas entonces **N** debe ser divisible entre 6. Además debe ser divisible entre 4 para que podamos repartir las canicas en 4 partes iguales. Como a cada quien le deben tocar al menos 25 canicas entonces **N** tiene que ser un número mayor que 4×25=100. Comenzaremos preguntándonos si **N** puede ser un número entre 100 y 200. Así **N** es un número de tres cifras que comienza con 1.

N=_1_ _B_ _C_

Como el número debe cumplir el criterio del 6, debe cumplir también el criterio del 2 y del 3. Y como también debe cumplir el criterio del 4, el número BC debe ser un múltiplo de 4. Ya que queremos comprar la menor cantidad de bolsitas que sean necesarias, podemos comenzar intentando colocar en el lugar de BC los múltiplos de 4 más pequeños hasta encontrar un N que cumpla además el criterio del 6.

1. Primero intentemos con el primer múltiplo de
   4 que es 4×1= 04 N=_1_ _0_ _4_
   Veamos que no puedo comprar esta cantidad de canicas pues 1+0+4= 5 no es divisible entre 3 entonces no cumple el criterio del 6.

2. Ahora intentemos con el siguiente múltiplo que es
   4×2=08 N=_1_ _0_ _8_

Con este número tenemos que 1+0+8=9 que es divisible entre 3. Como además termina en número par el número N cumple el criterio del 2, del 3 y por lo tanto también el del 6. Entonces N=108 es la cantidad de canicas que necesito, por lo que debo comprar 108, es decir 18 bolsitas.

Las reglas de divisibilidad sirven para resolver muchos problemas de divisiones, pero son apenas las primeras de muchas herramientas que se conocen para encontrar los divisores de un número. Para que puedas deducir las siguientes reglas de divisibilidad antes debemos recordar un concepto muy importante en esta área de las matemáticas: los números primos.

Factorización en primos

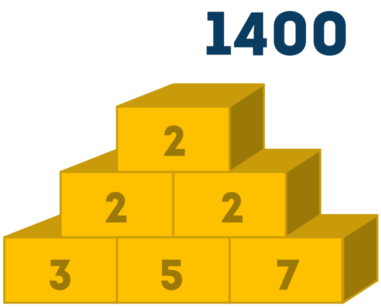
Los números primos son unos números especiales que se caracterizan por tener solo dos divisores positivos: 1 y *el mismo número*, con excepción del número 1 que no se considera primo. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Estos números son muy conocidos por una propiedad muy interesante de los números enteros y que es tan importante que se considera fundamental en las matemáticas. Esta propiedad se conoce como el **Teorema Fundamental de la Aritmética** y dice que: ***Todos los números enteros que sean mayores a 1 pueden obtenerse de manera única como la multiplicación de números primos.***

Ejemplo

12= 2 × 2 × 3
35= 5 × 7
92= 2 × 41
100= 2 × 2 × 5 × 5

A esta forma de escribir estos números se le llama **factorización en primos.** Para ver qué tan importante es esta propiedad sobre los números, te ayudará pensar que los números primos son piezas que no se pueden partir y que con ellas se pueden formar cualquier número entero por medio de la multiplicación. Lo más interesante de estas piezas es que sólo existe una manera de construir cada número a partir de ellas, excepto por el orden en el que acomodemos.



¿El 1400 se puede cambiar por 840? o ¿el 3 por un 5?

Por ejemplo, el número 24 puede obtenerse como multiplicación de números de muchas formas distintas, 1×24, 2×12, 3×8 o 4×6, pero utilizando números primos solo hay una forma de que resulte el número 24 y esta es 2×2×2×3.

A todos aquellos enteros mayores a 1 que no son números primos los llamamos números **compuestos;** se dicen así pues cualquier número que no sea primo está compuesto por al menos dos números primos gracias a la propiedad anterior. Por ejemplo 8, 15 y 36 son números compuestos.

Hay muchas maneras de expresar la operación de la multiplicación, el que hemos usado hasta este momento es ***X,*** *pero también podemos usar los siguientes* ****, •, (), [], {}.***

La factorización en primos es otra de las herramientas que nos ayudará a decidir si un número es divisible entre otro sin necesidad de hacer muchas operaciones. Esta herramienta es a veces más útil que los criterios de divisibilidad y es la clave para saber si un número es divisible entre cualquier otro número mayor a 11.

Por ejemplo, observemos la factorización en primos del número 156.

$$156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

En primer lugar veamos que cada número primo en la factorización debe ser un divisor del número 156. Ya que

$$\begin{aligned} 156 &= 2 * (2\cdot 3\cdot 13) = 3 * (2\cdot 2\cdot 13) \\ &= 13 * (2\cdot 2\cdot 3) \end{aligned}$$

Es decir, 2 es un divisor de 156 ya que al multiplicar todos los demás números que aparecen en la factorización se forma un número entero 2•3•13= 78 tal que 156= 2*78.

Pero esto mismo sucede con los números 2•2=4, 2•3=6, 2•2•3=12, 2•13=26, 3•13=39 y 2•3•13=78, por lo que todos estos también son divisores de 156. Entonces los divisores del número 156 son:

1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 78 y 156

Observa que aunque 2 y 4 son divisores de 156, el número 8 no está entre sus divisores. Esto es porque el 156 solo se puede dividir entre 2 dos veces; también podemos observar que al dividir el número 156 entre 8 se obtiene el mismo resultado que al dividir el número 39 entre 2. Esto es porque las fracciones son equivalentes

$$\frac{156}{8} = \frac{2\cdot2\cdot3\cdot13}{2\cdot2\cdot2} = \frac{3\cdot13}{} = \frac{39}{2}$$

Claramente el número 39 no es divisible entre 2 pues la cifra de sus unidades es 9 y no un número par, por lo que 156 tampoco es divisible entre 8. Esto nos dice que para que un número sea divisible entre 8 es necesario que sea posible dividirlo entre 2 al menos tres veces sin obtener números decimales.

En general si conocemos la factorización en primos de dos números a y b podemos ver que a divide b si en la factorización de b aparecen todos los factores primos de a en algún orden, elevados a una potencia mayor, o acompañados de más factores primos. Por ejemplo:

45|180 ya que $180=2^2*3^2*5$ y en esta factorización aparecen todos los factores primos de 45 que son 3 y 5, lo que podemos ver en su factorización $45 = 3^2*5$

Cuando esto sucede, en la factorización de **b** se pueden agrupar los factores que corresponden a la factorización de **a,** de modo que el resto de factores que no se han agrupado forman un número entero c que cumple **b=a*c.** En el ejemplo anterior lo podemos ver como 180=45*4
Ahora te mostrare como puedes calcular la factorización en primos de números de varios dígitos. La manera más sencilla de encontrar los factores primos de un número es intentar dividirlo entre los números primos más pequeños e ir intentando en orden ascendente hasta que ya no se pueda continuar dividiendo.

Ejemplo 4
Encuentra la factorización en primos del número 1092.

Solución:
Comenzamos preguntándonos si 1092 lo podemos dividir entre 2. Como la cifra de las unidades es par sabemos que sí y haciendo la división tenemos que:

$$1092 \div 2 = 546$$

Continuamos ahora con el número 546. Por el criterio de divisibilidad del 2 nuevamente podemos dividir a este número entre 2 y obtenemos que:

546÷2 =273

Luego observamos que 273 no puede dividirse nuevamente entre 2 pues la cifra de sus unidades no es un número par, entonces busquemos dividirlo por el siguiente número primo mayor a 2 que es el 3 y utilizando el criterio de divisibilidad del 3 observemos que la suma de sus cifras es 2+7+3=12, entonces el número 273 sí es divisible entre 3 y al hacer la división obtenemos que:

273÷ 3 =91

Continuando de este modo, observamos que el número 91 no puede ser dividido entre 3 pues 9+1=10 y no es divisible entre 3, tampoco lo es entre el siguiente número primo que es 5, pues la cifra de sus unidades es 1, pero sí podemos dividirlo entre 7 y obtenemos que:

91÷ 7 = 13

Por último el número 13 es un número primo y solo puede dividirse entre 1 y 13 y 13÷13=1.

Podemos ir guardando la información anterior en un esquema como el siguiente, mismo que al terminar nos indica cuales son los divisores primos del número y cuántas veces es posible dividir entre ellos.

El procedimiento termina cuando escribimos finalmente el número 1 y el resultado de la factorización es la multiplicación de todos los números primos que sí eran divisores. Entonces, 1092 = 2*2*3*7*13

1092	**2**
546	**2**
273	**3**
91	**7**
11	**11**
1	

¿Los dos números 11 de abajo se pueden cambiar por 13?

¿Cuántos divisores?

Cuando aprendí a calcular la factorización en primos de cualquier número que no fuera demasiado grande me di cuenta de que ya podía conocer exactamente cuántos divisores tenía y cuáles eran éstos.

Recuerda que un número a es divisor de b si todos sus factores primos aparecen en la factorización de b. Por ejemplo, para listar todos los divisores del número $90=2\cdot3\cdot3\cdot5=2^1\cdot3^2\cdot5^1$ podemos ir escribiendo todas las combinaciones que se pueden formar con la multiplicación de sus factores primos. La lista quedaría así:

2, 3, 5, 2×3, 3×3, 2×5, 3×5, 2×3×3, 2×3×5, 3×3×5 y 2×3×3×5

También sabemos que el *1* divide a todos los números, por lo que también lo agregamos, y entonces los divisores del número 90 son:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90.

¿Cómo sabemos que hemos listado correctamente todos los divisores?

Observa que tenemos para escoger un factor 2, dos factores 3 y un factor 5, y un divisor debe tener solo a estos números primos elevados a una potencia menor que la que aparece en el número 90.

Entonces el factor 2 puede aparecer en el divisor como 2^0 o 2^1 (**2** opciones); el factor 3 puede aparecer como 3^0, 3^1 o 3^2 (**2** opciones); y el factor 5 puede aparecer como 5^0 o 5^1. Utilizando el principio multiplicativo, *que puedes revisar en la sección de combinatoria*, sabemos hay $3\times2\times2 = 12$ formas distintas de conformar un número con estos posibles factores, es decir que el número 90 tiene exactamente 12 divisores.

En general si un número a tiene la siguiente factorización en primos,

$$a= (p_1)^1 \cdot (p_2)^2 \cdot \ldots \cdot (p_k)^k$$

Donde p_1, p_2, ..., p_k son números primos y 1, 2, 3,... , k son números enteros positivos, entonces por el principio multiplicativo el número a tiene divisores positivos. $(1+1)(2+1)(3+1)\ldots(k+1)$

Ejemplo 5.
¿Cuántos divisores tiene el número 540?

Solución:
Comencemos calculando la factorización en primos de este número. Entonces, debemos ir dividiendo el número 540 entre los números primos más pequeños que sea posible hasta llegar al número 1.

El resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{540} & \mathbf{2} \\ \mathbf{270} & \mathbf{2} \\ \mathbf{135} & \mathbf{3} \\ \mathbf{45} & \mathbf{3} \\ \mathbf{15} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

Por lo tanto, la factorización de 540 es $2\times2\times3\times3\times3\times5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$. Los números primos que aparecen en esta factorización son 2, 3 y 5, y en este caso las potencias a las que están elevados son 2, 3 y 1 respectivamente, entonces el número de divisores de 540, por el principio multiplicativo, es igual a $(2+1)(3+1)(1+1)=24$

Ejercicios

1. Encuentra la factorización en primos del número 2275.
2. En un campamento de verano 108 niños van a separarse en grupos de forma que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas maneras puede hacerse la separación si cada grupo debe de tener más de 5 pero menos de 20 niños?
3. ¿Cuántos divisores tiene el número 1404?
4. ¿Cuántos divisores pares tiene el número 924?
5. ¿Cuántos divisores de 2250 no son múltiplos de 3?

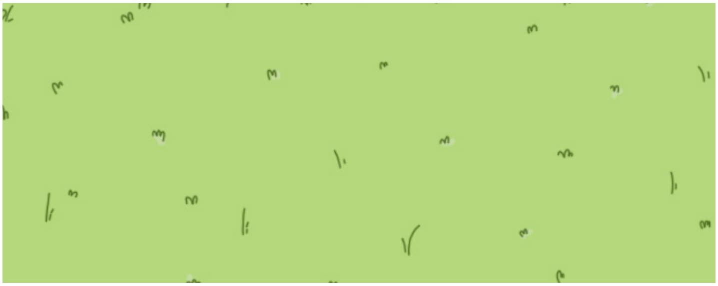
Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

En mi clase de matemáticas, el profesor encargó de tarea diseñar una cerca de estacas alrededor del jardín de la escuela, para proteger los árboles y las plantas con flores.

El jardín tenía forma rectangular y medía 2.8 metros de ancho por 6.3 metros de largo. En cuanto obtuve estas medidas comencé a pensar en la cerca de estacas y como construirla. Sabía que debía haber una estaca en cada esquina del jardín y que lo mejor era que todas las estacas estuvieran separadas por la misma distancia.

6.3 metros

2.8 metros



Al principio pensé que sin importar cuántas estacas tuviera iba a poder cercar todo el jardín de alguna manera, pero luego observé que si quería que las estacas estuvieran a la misma distancia entonces necesitaba más para los lados largos del jardín que para los lados cortos y que si tenía muy pocas tal vez no podría separarlas para que todas estuvieran a la misma distancia. Me di cuenta de que la distancia entre estaca y estaca debía ser un divisor de las medidas del jardín, pues así podría dividir el lado largo de 630 centímetros y el lado corto de 280 centímetros en segmentos del mismo tamaño.

Como este era un problema de divisores procedí a calcular la factorización en primos de los números 280 y 630, obteniendo lo siguiente:

$$280 = 2^3 \times 5 \times 7 \qquad 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

La distancia que debía escoger debía ser un divisor de estos dos números. Esta podría ser 2, 5, 6, 7, 10, etc., porque estos números dividen tanto a 280 como a 630, pero si yo quería utilizar la menor cantidad de estacas posible debía encontrar el número más grande que dividiera a ambos, para así separar las estacas la mayor distancia posible.

Observé que el divisor más grande de ambos debía ser un múltiplo de 2, pero no podría ser múltiplo de 2^2 pues ya no sería un divisor de 630. Este divisor podía también ser múltiplo de 5 y 7, pero no de 3 ni a ningún otro número primo pues ya no sería un divisor de 280. Entonces, la distancia que debía escoger entre cada estaca era justamente el producto de estos números:

$$d = 2\times5\times7 = 70 \text{ centímetros}$$

Entonces, las estacas van a dividir el ancho en $280\div70=4$ partes iguales de 70 centímetros cada una, por lo que en cada lado corto del jardín debía poner 3 estacas entre las estacas de las esquinas. En el lado largo, las estacas dividirán al lado en $630\div70 = 9$ partes iguales, entonces necesito poner 8 estacas en cada lado largo entre las estacas de las esquinas.

Por lo tanto, voy a necesitar $4+3+3+8+8=29$ estacas en total para cercar todo el jardín.

El número 70 es el número más grande que es un divisor de 280 y 630 a la vez y es llamado el **Máximo Común Divisor** de 280 y 630.

El **Máximo Común Divisor** de dos números **a** y **b** como su nombre lo dice es el mayor número que divide a ambos y se denota por **MCD (a, b)**. Este número es muy fácil de calcular cuando se conoce la factorización en primos de a y b, pues equivale a la multiplicación de todos los números primos que aparecen en ambas factorizaciones elevados a la menor potencia con la que aparecen en éstas.

Ejemplo 6.
Calcula el MCD (24, 36).

Solución:
Una manera sencilla de encontrar el Máximo Común Divisor es escribiendo todos los divisores de los números:

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, **12,** 24.
Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, **12,** 18, 36.

De modo que el máximo común divisor de 24 y 36 es 12.

Ejemplo 7.
Calcula el MCD (112, 84).

Solución:
Otra manera de encontrar el Máximo Común Divisor de dos números como estos es por medio de sus factorizaciones en primos.

$$112=2\times2\times2\times2\times7$$
$$84=2\times2\times3\times7$$

Los números primos que dividen tanto a 112 como a 84 son el 2 y el 7, entonces el máximo común divisor debe ser un múltiplo de estos factores. Busquemos ahora cuál es la máxima potencia de dos y la máxima potencia de siete que divide a 24 y 36. Para esto te recomiendo escribir las factorizaciones utilizando exponentes en los casos donde un primo se multiplica más de una vez.

$$112=2^{4\,4} \cdot 7$$
$$84=2^{2} \cdot 3 \cdot 7$$

La máxima potencia de un primo que divide a dos números coincide con el número primo elevado al menor exponente al que se encuentra elevado en las dos factorizaciones. En este caso la menor potencia de 2 aparece en la factorización de 84 y es 2^2. Y la menor potencia de 7 aparece también en la factorización de 84 y es 7^1, entonces el resultado será la multiplicación de estos números.

$$\text{MCD } (112, 84)=2^{2} \cdot 7=28$$

Cuando vi que el máximo común divisor podía ayudarme a resolver problemas sencillos como el de las estacas del jardín, me puse a investigar un poco más sobre los divisores de dos números y encontré los siguientes problemas.

Ejemplo 8.
En una chocolatería preparan 28 chocolates amargos, 32 bombones y 24 chocolatines con leche. El dueño quiere organizar los 84 dulces en bolsitas que tengan la misma cantidad de chocolates amargos, chocolatines y bombones.

¿Cuántos dulces de cada tipo debe poner en una bolsita para formar la menor cantidad de bolsitas posible?

Solución:

Observé que, para acomodar todos los dulces en bolsitas, la cantidad de chocolatines, chocolates amargos y bombones en cada bolsa debía ser un divisor de 24, 28 y 32. Más aún, este número debía ser el divisor más grande que sea posible hallar entre los divisores de 24, 28 y 32, para así formar la menor cantidad de bolsitas posible. Escribí entonces una lista de los divisores de estos números.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Divisores de 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28.
Divisores de 32: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Encontré en este caso que el más grande divisor común de 24, 28 y 32 es el número 4. Entonces, cada bolsita debería tener 4 chocolatines, 4 bombones y 4 chocolates amargos.

Recuerda que el **Máximo Común Divisor** de los números 24, 28 y 32, se encuentra de una manera sencilla a partir de la factorización en primos de estos tres números.

$$24=2^3*3$$
$$28=2^2*7$$
$$32=2^{5}4$$

Sólo bastará con calcular la multiplicación de todos los factores primos que aparecen en las tres factorizaciones a la vez y elevados a la menor potencia a la que se encuentran elevados. En este caso el factor primo en común es el 2 y la menor potencia a la que se encuentra elevado es en la factorización de 28 y el factor es 2^2. Entonces el número obtenido es el mismo que antes

$$\text{MCD }(24, 28, 32) = 2^2 = 4$$

Esta es una forma para encontrar el MCD de cualquier cantidad de números después de conocer la factorización en primos de estos. Existe también un número que se relaciona con el **Máximo Común Divisor**, que se conoce como el **Mínimo Común Múltiplo**. Para dos números **a** y **b** como su nombre lo dice, el **Mínimo Común Múltiplo**, es el número más chico que es a la vez un múltiplo de **a** y de **b** y normalmente lo denotamos por **mcm(a, b)**. Por ejemplo, para 24 y 36 las factorizaciones en primos son:

$$24=2\times2\times2\times3 \qquad 36= 2\times2\times3\times3$$

Recordemos que un número **c** es múltiplo de **a** si en la factorización de **c** aparecen al menos todos los factores que aparecen en la factorización de **a**. Entonces, un número será múltiplo de 24 y 36 si contiene en su factorización al factor 2 al menos elevado a la 3 y al factor 3 al menos elevado a la 2, pues de este modo será un múltiplo de $2^2\times3^2$ y también de $2^3\times3$. Es decir, un múltiplo común de 24 y 36 será un múltiplo también de $2^3\times3^2= 72$, por ejemplo lo son 72, 144, 216, etc. De modo que el Mínimo Común Múltiplo de estos números es: mcm (24,36)=72.

El mínimo común múltiplo de dos o más números se puede calcular en general de esta forma si conocemos la factorización en primos de los números, y es común utilizarlo para resolver problemas relacionados con la frecuencia con la que se realiza una cierta actividad o situaciones donde se debe separar en partes iguales.

Ejemplo 9:
Calcula el mcm (15, 65).

Solución:
Para calcular el mcm es necesario encontrar la factorización en primos de ambos números. La factorización de estos números es:

$$15=3\times5 \text{ y } 65=5\times13$$

El mínimo común múltiplo debe contener a estos números en su factorización entonces mcm (15, 65) debe ser un múltiplo de 3, 5 y 13. Como todos estos primos están elevados a la potencia 1 entonces el resultado es:

$$\text{mcm }(15, 65) = 3\times5\times13=195.$$

En general, esta forma de calcular el mcm es muy sencilla, al igual que calcular el MCD, en ambos procedimientos la parte clave es calcular la factorización en primos de los números que vamos a utilizar y escoger correctamente las potencias a las que deben estar elevadas los factores primos.

Ejemplo 10.
Lucy y yo llevamos semanas esperando el estreno de la película "Triunfos Jerezanos". Pocos días antes de la función un canal de radio comenzó a regalar entradas a las personas que se comunicaran a la radio y respondan una sencilla pregunta. El locutor regala un cupón de palomitas cada 5 llamadas, un cupón de dulcería cada 6 llamadas y un pase doble para la función cada 12 llamadas que recibe. Cuando Lucy llamó a la radio el locutor le dijo que ¡habíamos ganado los tres premios! y que éramos las primeras personas en ganar los tres cupones a la vez. Su única pregunta fue ¿cuántas llamadas había recibido el locutor hasta el momento?

Solución:
Como habíamos ganado los tres cupones el número de nuestra llamada debía ser un múltiplo de 5, 6 y 12. Por ejemplo, podría ser la llamada número

$$5\times6\times12= 360$$

Pero el locutor dijo que nosotros éramos los primeros en recibir los 3 cupones a la vez, por lo que nuestra llamada no solo era cualquier múltiplo de 5, 6, y 12 si no el mínimo común múltiplo de estos números.

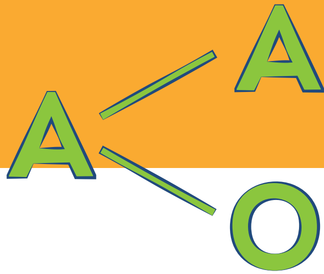
El número 5 ya es un número primo, $6=2\cdot3$ y $12=2^2\times3$, entonces el mínimo común múltiplo de estos números debe ser el producto de 5, 3 y 2^2, qué son las mayores potencias de primos que aparecen en estas factorizaciones. Entonces, el mcm $(5, 6, 12) = 2^2\cdot3\cdot5=60$.

Por lo que antes de nosotros habían llamado 59 personas.

Ejercicios:

1. Encuentra el MCD de los números 665 y 455.
2. Encuentra el mcm de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
3. Tengo una bolsa llena de canicas de color rojo y azul. Las canicas rojas las compré en bolsitas de 6 canicas cada una y las canicas de color azul las compré en bolsas de 8 canicas cada una. Si tengo la misma cantidad de canicas azules que rojas, ¿cuál es el mínimo número de canicas que puedo tener?
4. Mane, Lili y yo visitamos a nuestra abuelita de la siguiente forma: yo paso a visitarla cada 12 días, Mane la visita cada 5 días y Lili la visita cada 15 días. Si hoy estamos todos en la casa de nuestra abuelita, ¿cuántos días pasarán para que estemos reunidos de nuevo?
5. En un concurso de matemáticas participan 135 niñas y 96 niños. Se quieren formar filas del mismo tamaño de modo que todos los participantes estén en una fila y que niños y niñas estén formados en filas distintas. ¿Cuál es el mayor número de estudiantes que puede haber en una fila?

6. Combinatoria



Aprendiendo a ser ordenado

Cada año en mi escuela se organiza un concurso de cuento por el mes patrio y este año cuatro niños participaron, pero sólo dos de ellos serán premiados, **¿de cuántas maneras se pueden elegir a dos ganadores en una competencia donde participan cuatro alumnos?** Andrés, Brenda, Clara y Damián fueron los participantes en esta ocasión. Voy a usar sus iniciales para mostrar las posibles parejas de ganadores:

{*A*,*B*},{*A*,*C*},{*A*,*D*},{*B*,*C*},{*B*,*D*} y {*C*,*D*}

¿Cómo sé que son las únicas maneras? Hagámoslo siguiendo un orden: escribamos todos los que pueden hacer pareja con *A*, que serían *B*, *C* y *D*. Luego escribamos los que pueden hacer pareja con *B* pero que no sea A porque ya hicimos esa pareja, sería con *C* y con *D*. Por último, veamos qué parejas se pueden formar con *C* que no incluyan ni a *A* ni a *B*, sólo puede ser *D*. Ya acabamos porque *D* ha hecho pareja con todos los posibles. **En total existen 6 posibles parejas ganadoras.**
Por ejemplo, ¿de cuántas formas podemos acomodar las letras de la palabra MATE? Empezaríamos a hacer una lista como la que sigue:

MATE, AEMT, AMTE, TMEA,
ETAM, ATEM, TAME, ETMA,
TEAM, EATM, TMAE, EAMT,
EMTA, TEMA, MEAT, AMET,
ATME, MAET, MTEA, META,
EMAT, TAEM, MTAE, AETM.

Después veremos cómo resolver esto sin escribir ni una sola de las combinaciones. Pero por lo pronto, pensemos si ya escribimos todas. La solución está en escribir ordenadamente desde el principio todas las combinaciones. Pongamos en cada columna palabras que inicien con una letra en particular. Usaremos el orden alfabético para que sea más claro:

AEMT, EAMT, MAET, TAEM,
AETM, EATM, MATE, TAME,
AMET, EMAT, MEAT, TEAM,
AMTE, EMTA, META, TEMA,
ATEM, ETAM, MTAE, TMAE,
ATME, ETMA, MTEA, TMEA.

Observa que, en cada columna, la segunda letra la repetimos dos veces seguidas para que fuera más sencillo. Esta fue una forma de seguir un orden, pero hay otras más, lo importante es que tengas claro qué camino seguirás.

Ejemplo 1.
¿Cuántos números hay escritos a continuación?

$$0,1,2,\ldots,998,999$$

Observa que los puntos entre el 2 y el 998 en este caso indican que seguimos escribiendo todos los números consecutivos.

Solución:
Parece un ejercicio muy sencillo, pero nos ayudará en otros que veremos después. Para encontrar la respuesta podemos pensar en números pequeños en la lista

$$0,1,2,3,4,5,6$$

Hay 7 números en total, del 1 al 6 son seis y el 0 es otro más. Si repetimos lo mismo para la lista de nuestro ejercicio: tenemos 999 números del 1 al 999, más el 0, la respuesta es que son **mil números en total.**

Siempre que veamos una lista de esta forma podemos emplear el siguiente truco: *resta el último número menos el primero y a esa cantidad súmale* 1.

Esto funciona porque al restar dos números obtenemos "cuántos me faltan para llegar" al más grande. Luego le sumamos 1 porque debemos considerar el primer número ya que también está escrito. No importa en qué número comencemos ni terminemos, mientras se trate de listas de números consecutivos.

Ejemplo 2.
¿Cuántos números están escritos a continuación?

$$142,144,145,\ldots,251,252,253.$$

Solución:
Vamos a usar el truco: restamos el último número menos el primero y tenemos la operación 253-142=111. Ahora, a esta cantidad le sumamos 1, y nos queda 112: **Hay un total de** 112 **números.** Observemos que con este truco también podemos resolver el ejercicio del ejemplo 1. Restamos el último número menos el primero: 999-0=999. Luego le sumamos 1 a esa cantidad: 999+1=1000. Obtuvimos la misma respuesta que antes.

Ejemplo 3.
¿Cuántos múltiplos de 3 hay entre el 1 y 100?

*Recordemos que un número **a,** es múltiplo de otro número **b** si existe un tercer número c para el cual **a= b· c.***

Solución:
Una estrategia es empezar a escribir las cosas que queremos contar, pero asegúrate de no escribir demasiadas como para confundirte. Enlistemos los primeros múltiplos de 3:

$$3\times1=3,\ 3\times2=6,\ 3\times3=9$$

Así podríamos continuar hasta que los múltiplos alcancen 100 o un poco antes. Vamos con multiplicaciones fáciles: $3\times10=30$. El triple del número anterior sería $(3\times10)\times3=90$, así que seguimos abajo de 100, enlistemos a partir de aquí:

$$3\times30=90, 3\times31=93, 3\times32=96, 3\times33=99$$

Pero, $3\times34=102$, ya se pasa de 100. Entonces enlistamos los múltiplos: 3,6,9,...,93,96,99. Pero ¿cuántos son? A cada múltiplo le podemos asociar ese número por el cual multiplicamos al 3:

$$\{1,2,3,\ldots,31,32,33\} \leftrightarrow \{3,6,9,\ldots,93,96,99\}$$

La ventaja de observar esto es que el primer conjunto de números son números consecutivos, entonces sabemos cuántos son. Tenemos 33 **múltiplos entre el** 1 **y el** 100.

Principio aditivo

Ahora veremos una herramienta muy utilizada en algunos ejercicios y retos matemáticos que se llama *principio aditivo*, porque es usado en casos donde debemos sumar varios resultados para obtener un resultado final.

Ejemplo 4.
En un concurso de cuento participaron mis compañeros Andrés, Brenda, Clara y Damián. Si se da premio de primer y segundo lugar ¿de cuántas maneras se pueden elegir los alumnos que ganen estos premios?

Aunque parezca obvio, cuando vamos a contar es importante tener en cuenta que, si Andrés gana el primer lugar y Brenda el segundo, es distinto a que gane Brenda el primero y Andrés segundo.

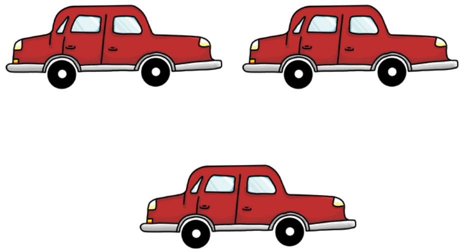
Solución:
En la sección *Aprendiendo a ser ordenado* vimos que podemos formar 6 parejas de ganadores. Sin embargo, ahí sólo escribimos una vez la pareja $\{A,B\}$ porque no nos importaba quién quedaba en primer lugar. En este ejercicio debemos considerar cada una de las parejas de nuevo, donde el ganador fue el otro competidor, el que habíamos pensado que quedó en 2°: {*A* primer lugar, *B* segundo lugar} ya no es lo mismo que {*A* segundo lugar, *B* primer lugar}. Por lo tanto son otras 6 maneras:

$$\{B,A\}, \{C,A\}, \{D,A\}, \{C,B\}, \{D,B\} \text{ y } \{D,C\}$$

Entonces, existen 6 maneras que calculamos en la sección anterior y 6 más que encontramos esta vez. Sumamos ambas cantidades y tenemos que **existen** 12 **maneras de elegir ganadores de primer y segundo lugar.**

Ejemplo 5.
En mi escuela había muchos juguetes en el salón que donaron los papás. Recuerdo que había mucho de dónde elegir para jugar en el recreo: 12 muñecas, 15 carritos, 11 muñecos de acción y 4 juegos de cocinita. Pero también éramos muchos alumnos, entonces debíamos **elegir sólo un juguete cada quién.** Me di cuenta de que podía saber **cuántas opciones tenía para elegir juguete.**

Solución:
Antes de resolver de cuántos juguetes podía elegir, pensé en qué pasaría si tuviera menos opciones: 2 muñecas y 3 carritos. Como sólo podría elegir una cosa para jugar, las 2 muñecas que había nos dan 2 opciones, y de la misma forma, los 3 carritos, nos dan 3 opciones **más.**



En este caso podemos contar los objetos hasta cinco, es muy sencillo. Hay cinco opciones. Lo que estamos haciendo al contar cada una de dichas opciones, esto es sumar las opciones que nos da el primer conjunto de cosas (las muñecas) con las opciones que nos da el segundo grupo de cosas (los carritos). Si hubiera más grupos sumaríamos las opciones que nos aportan esos grupos también. Estamos pensando que hay que tomar **una cosa o la otra.** Un atajo para resolver este tipo de ejercicios sería pensar que, para hacer nuestro cálculo matemático, en lugar de escribir "o" escribiremos el signo "+":

2 muñecas o 3 carritos.
2 muñecas + 3 carritos.

Ahora pasemos a nuestro caso:

12 muñecas o 15 carritos o 11 muñecos de acción o 4 juegos de cocina.
12 muñecas + 15 carritos + 11 muñecos de acción + 4 juegos de cocina.

Resolvemos esta suma y descubrimos que **nuestro total de opciones son 42 juguetes.**

Utilizando el atajo que mencionamos parece muy fácil, pero hay que ser cuidadosos con cuáles son los distintos grupos de cosas entre los que podemos elegir.

Ejemplo 6.
La semana pasada fui al tianguis con mi papá. Tenían las siguientes verduras: 4 lechugas, 3 cebollas y 6 zanahorias. Y tenían estas frutas: 2 manzanas, 6 duraznos, 4 mandarinas y 2 plátanos. Mi papá tuvo las siguientes dudas:

1) ¿Cuántas verduras podemos comprar?

Solución:
Muy parecido a lo que hicimos en el primer ejemplo, escribamos nuestras opciones.

4 lechugas o 3 cebollas o 6 zanahorias.
4 lechugas + 3 cebollas + 6 zanahorias.

Así que en total podíamos comprar 13 verduras.

2) ¿Cuántas frutas distintas podemos comprar?

Solución:
Aquí debemos poner atención en la pregunta. No es igual a la anterior, ahora nos están preguntando cuántos tipos de fruta podemos comprar, que no es lo mismo cuántas frutas podemos comprar. Ya no debemos pensar en cuántas frutas hay de cada tipo, más bien sólo hay que observar las diferentes frutas que mencioné: Manzanas, duraznos, mandarinas y plátanos. Entonces teníamos 4 frutas distintas para elegir.

3) Entre frutas y verduras ¿cuántos artículos podemos comprar?

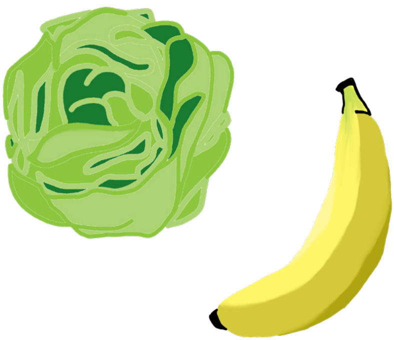
Solución: Nuevamente regresamos a la pregunta de cuántos puedo comprar del total. Ya no se trata de artículos distintos, debemos de contar el total de cosas. Las verduras ya las contamos en 1, sabemos que son 13. Contemos las frutas como hemos hecho antes:

2 manzanas o 6 duraznos o 4 mandarinas o 2 plátanos.
2 manzanas + 6 duraznos + 4 mandarinas + 2 plátanos.

Esta suma da como resultado 14 frutas. Por último, vamos a sumar las cantidades totales pues podemos elegir cualquier fruta o verdura:

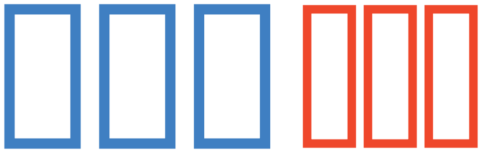
13 verduras o 14 frutas.
13 verduras + 14 frutas

En total podíamos comprar 27 artículos.

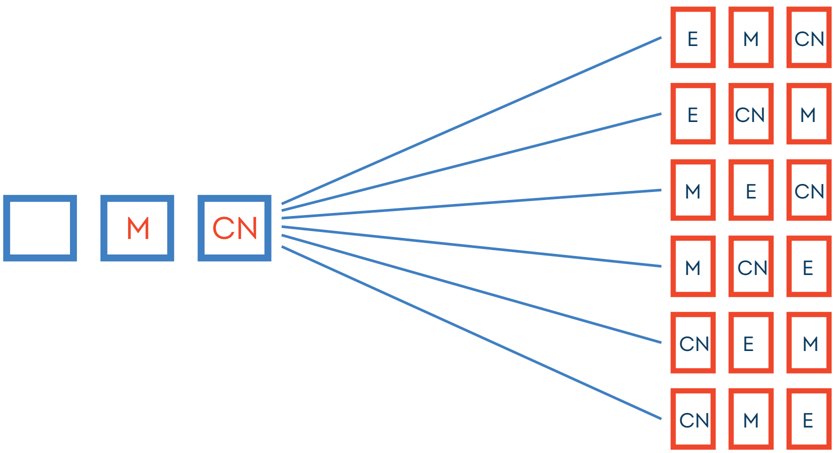


Principio multiplicativo

A veces mi mochila se siente pesada y es difícil de cargar por todo lo que llevamos. En mi escuela me piden: libro y libreta de español, matemáticas y ciencias naturales. En total debo meter 6 cosas. Como me gusta ser ordenado, después de varios días de ordenar mi mochila me di cuenta que hay diferentes maneras de hacerlo, entonces me surgió la duda: ¿De cuántas formas puedo acomodar mis libros y libretas en la mochila? Empecé acomodando todos los libros juntos y luego las libretas así:



Ahora decidí dejar los libros en un solo orden: español, matemáticas y ciencias naturales. Y acomodé las libretas de todas las formas que encontré. Para cada una de las 6 formas en que acomodé las libretas tendría que ordenar los libros, ¡son otras 6 formas!



En total hay 36 maneras de acomodar mis cosas cuando pongo los libros antes que las libretas. En este momento me di cuenta que seguir acomodando así me iba a tomar demasiado tiempo pues faltan acomodos con dos libretas juntas y luego libros, o todo intercalado y muchos más. Parece que la cantidad de maneras en que puedo acomodar ¡es enorme!
Usemos aquel truco que me gusta tanto, hagamos el mismo ejercicio con menos opciones. ¿Qué tal si sólo tuviera clases de español y matemáticas? Si sólo tengo 2 libros y 2 libretas, ¿de cuántas formas puedo acomodar mis cosas?

Ahora sí me animé a pensar en todas las maneras, no sólo poniendo los libros primero. Imaginemos mi mochila como si tuviera cuatro espacios. Podemos empezar pensando ¿cuántas opciones tengo para poner en el primer espacio? Tenemos 4 opciones: libreta de español, libreta de matemáticas, libro de español y libro de matemáticas. Ahora empieza algo más interesante:

Cuando pongo la libreta de español en el primer espacio me quedan tres opciones para el segundo espacio. Pero ocurre lo mismo si tuviera la libreta de mate en el primer espacio, me quedan tres opciones para el segundo. Y así para cualquier cosa que coloque en el primer espacio. Entonces para cada manera en que haya acomodado los primeros dos objetos, me quedan dos opciones para el tercer espacio y luego me quedará una opción para el último espacio. Podemos pensar esto de dos formas:

1. Diagrama de árbol: 4 opciones, porcada una de éstas, 3 opciones, a su vez, por cada una de ésas, 2 opciones y por último 1.

2. En esta ocasión queremos acomodar alguno de **4 objetos primero y alguno de 3 artículos escolares en segundo lugar.** Entonces por cada una de las primeras **4** opciones tenemos tres. En total sumariamos el **3** cuatro veces, o lo que es igual: **3×4=12**. Ahora, para cada una de esas **12** opciones queremos acomodar **también alguno de 2 objetos en tercer lugar.** Entonces sumamos las **12** opciones que nos da un objeto más las **12** que nos da otro. O bien: **2×12=24**. Por último, sólo nos queda acomodar **1 artículo escolar, el que nos falta.** Como sólo hay una opción para cada una de las 24 que tenemos, nada más contamos una vez esos 24 acomodos. Podemos resumir todo lo que hemos hecho en la siguiente multiplicación.

×4 opciones primero ×3 después ×2 opciones después ×1 opción por último. Así que **hay** 24 **formas de acomodar estos** 4 **útiles en mi mochila.**

Esta estrategia para resolver algunos problemas de "cuántas maneras" o "cuántas posibilidades", se llama principio multiplicativo. Digamos que quieres realizar dos acciones y que ambas ocurran al mismo tiempo (en nuestro ejemplo la primera acción sería poner el primer libro y la segunda sería poner otro libro más). Si por cada n opciones de hacer lo primero, tienes otras k para realizar la segunda cosa, entonces en total tienes $n \times k$ maneras de hacer ambas acciones al mismo tiempo.

Para no confundir este principio con el de la sección anterior, notemos que en el principio aditivo solo debes de tomar una decisión de todas tus opciones. En el multiplicativo, debes tomar varias decisiones, una opción por cada una de las decisiones que te tocan. En lugar de pensar que queremos una fruta o la otra, estaríamos pensando que queremos elegir de un tipo de fruta y de otra. En el caso de los útiles: Quiero meter un libro en el primer espacio y un segundo libro en el segundo espacio y un tercer libro en el tercer espacio y un último libro en el cuarto espacio. Son cuatro decisiones, no sólo una.

Observemos que el problema original con mis 6 libros y libretas que debo acomodar, lo podemos resolver usando este truco porque son varias decisiones que tenemos que hacer. Podemos decir que debemos acomodar: 6 opciones primero y 5 opciones después y 4 opciones en tercer lugar y 3 opciones después y 2 opciones en quinto lugar y 1 opción por último. Todo al mismo tiempo, entonces multiplicaremos estas cantidades:

$6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ opciones en total. ¡Hay 720 formas de acomodar mis libros!

Ese número tan grande nos dice lo genial que es el principio multiplicativo. Necesitaríamos un papel enorme si quisiéramos resolver este ejercicio que parecía pequeño, usando diagramas de árbol.

Antes de platicar de algo más, veamos aquel ejemplo en el que queríamos escribir de todas las maneras posibles la palabra MATE. Esta vez no las escribiremos sólo contemos usando nuestro truco del principio multiplicativo.

Para la primer letra hay 4 opciones, puedo poner cualquiera de las letras M, A, T o E. Una vez elegida la primera, me quedan 3 opciones para la segunda letra, luego 2 opciones y por último 1 opción. Multiplicamos estos números y obtenemos que las distintas maneras en que podemos acomodar las letras son 24. La respuesta coincide con la que obtuvimos al escribir todos los acomodos.

Principio multiplicativo con menos opciones que espacios

En el acomodo de mis útiles tuve que meterlos todos a la mochila. Digamos que tenía la misma cantidad de espacios que libros y libretas. Hay ocasiones en las que queremos contar de cuántas formas ocurre algo, pero no utilizamos todos nuestros elementos.

Ejemplo 6.
¿Cuántos números hay entre 100 y 1000 que tengan dígitos impares distintos?

Los dígitos son números que se representan por una sola cifra: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9. Un número par es aquel que al dividirlo entre 2 no deja residuo y un número impar es el que no cumple lo anterior. Entonces los dígitos impares son 1,3,5,7 y 9

Solución:
Observa que, del ejercicio estamos buscando obtener lo siguiente:

1. Queremos números de tres dígitos.
2. Los dígitos que podemos usar son: 1,3,5,7 y 9.
3. No debemos repetir dígitos en un mismo número, por ejemplo el 377 NO es un número de los que queremos contar.

Ya que tenemos claro lo que queremos encontrar, pensemos en las opciones que tenemos para cada uno de los 'espacios' del número: Centenas, decenas y unidades. Los dígitos que podemos utilizar son cinco, entonces para "armar" un número tenemos cinco posibles dígitos para las centenas. Por cada una de estas posibilidades tenemos 4 opciones para las decenas, no 5 porque el dígito que usemos para las centenas no lo podemos repetir. Entonces tendremos $5 \times 4 = 20$ posibilidades para las primeras dos cifras del número. Por último, cada una de esas 20 posibilidades tiene 3 opciones para las unidades: podemos utilizar alguno de los 3 dígitos que no hemos usado para que no se repitan. Así que existen $20 \times 3 = 60$ números distintos que cumplen lo que nos pide el ejemplo.

Principios aditivo y multiplicativo

Ejemplo 7.
Entre 3 amigos y yo nos vamos a comprar 4 objetos iguales y de diferente color, que son 4 sacapuntas, 4 pulseras y 4 plumones. ¿Cuántas opciones tenemos para elegir 4 objetos del mismo tipo? Observa que es distinto que yo tenga el sacapuntas de color rojo a que lo tenga alguno de mis amigos.

Solución:
Al comprar sacapuntas podemos usar el principio multiplicativo para contar de cuántas formas nos repartiríamos los sacapuntas: Yo tengo 4 opciones de sacapuntas, otro amigo tendría sólo 3 opciones, el siguiente sólo tiene 2 opciones para elegir y 1 último sacapuntas para mi amigo que falta. Entonces tendremos 24 maneras diferentes en las que nos podríamos repartir los sacapuntas pues $4\times3\times2\times1=24$. Habría 24 maneras diferentes también con las pulseras y plumones.

Ahora veamos que no podemos elegir cosas diferentes, todos queremos tener el mismo objeto, sólo de diferente color. Entonces tenemos 24 opciones si compramos sacapuntas, otras 24 opciones si compramos pulseras y 24 si compramos plumones. Son opciones por separado así que ahora podemos usar el principio aditivo: $24+24+24=72$. En total tenemos **72 posibilidades para comprar los artículos** con las condiciones que queremos.

En el ejemplo anterior utilizamos el principio multiplicativo para saber de cuántas formas podríamos repartir objetos del mismo tipo, y luego usamos el principio aditivo para encontrar la cantidad total de posibilidades porque queríamos llevar sacapuntas o pulseras o plumones.

Principio de palomares

En el festival del día del niño de mi escuela había un puesto en el que daban premios si resolvíamos el siguiente acertijo:

Ejemplo 8.
En una canasta había 8 guantes azules y 8 guantes naranjas. Los guantes eran de la misma forma, cualquiera se podía usar en la mano derecha o en la mano izquierda. El maestro que estaba en el puesto nos dijo: Voy a sacar guantes de la canasta sin ver. ¿Cuál es la cantidad más pequeña de guantes que debo sacar para asegurarme de obtener un par de guantes del mismo color? Da igual si son dos guantes naranjas o dos guantes azules.

Observemos dos cosas:

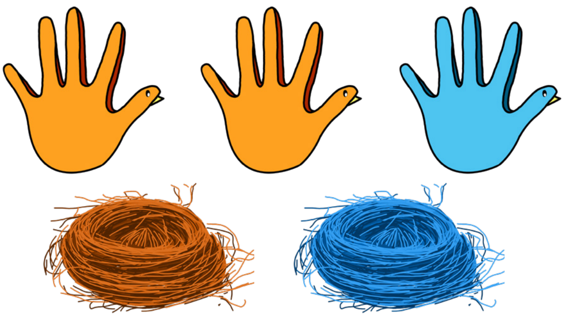
1. La pregunta indica que debemos **estar seguros** de que ya tenemos un par. Podría ocurrir que los primeros dos guantes que saquemos sean azules. Habríamos tenido suerte, pero no sabemos si esto va a ocurrir.
2. Si sacamos muchos guantes, por ejemplo los 16 guantes, es claro que ya tendríamos un par. Por eso nos pregunta por **la mínima cantidad** de guantes, para que el acertijo sea más interesante.

Hagamos un ejemplo de lo que pudiera pasar cuando tome los guantes el profesor. El primer guante sería **naranja** y el segundo guante sería azul. Si el tercer guante sale de color naranja, entonces ya tendríamos un par porque el primer guante que salió también era naranja y si sale un guante azul también tendríamos un par porque el segundo guante que había salido fue azul. Entonces no importa qué color salga, tendremos un par.

Así resulta que **tres guantes nos garantizan que obtenemos un par** cuando el primero que salió fue naranja.

Si el primer guante que sale es azul, tendríamos algo parecido a lo anterior. Aún con mala suerte después de tres guantes estaremos seguros de que tenemos un par.

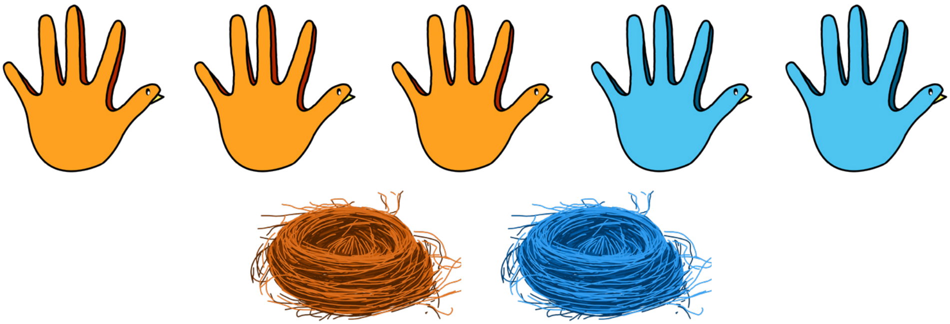
Detrás de este pequeño acertijo, hay un concepto sencillo, pero también muy útil: El *principio de casillas* o *principio de palomares.* Un palomar es un nido de paloma. El principio básicamente nos dice que, *si vamos a poner palomas en palomares y tenemos más palomas que palomares,* entonces alguno de los palomares tendrá más de una paloma. Es una idea simple y es claro que así ocurre, pero verás lo poderosa que es esta herramienta con algunos ejemplos más.
En el ejercicio de antes nuestras palomas serían los guantes y nuestros palomares serían los colores azul y naranja. Si tenemos tres palomas y dos palomares, al menos dos de las palomas (guantes) estarán en el mismo palomar (serán del mismo color). Por eso la respuesta es tres guantes.



Cuando le dije la respuesta a mi profesor me entregó un rompecabezas como premio, aunque me dijo que podía arriesgar ese premio para obtener otro mejor, como un juego de mesa. Resolvería dos acertijos más. Acepté y el primer acertijo era el siguiente:

Ejemplo 9.
¿Qué tal si ahora quiero conseguir dos pares? ¿Cuál es la mínima cantidad de guantes que debo sacar para obtener dos pares de guantes?

Veamos que esta vez necesito al menos 4 guantes pues queremos tener dos pares. Sin embargo, 4 guantes no son suficientes porque podríamos tener 3 de un color y 1 de otro. Veamos si nos bastan 5 guantes. Apliquemos nuestra nueva herramienta: Otra vez nuestras palomas serán los guantes y nuestros nidos serán los colores.



Observemos que el principio de palomares nos dice que hay al menos tres palomas en uno de los nidos, ahora pensemos en dos casos:

1. Que uno de los nidos tenga 4 ó 5 palomas. En este caso, ya tendríamos dos pares de palomas en el mismo color de nido.
2. Que un nido tenga 3 palomas y otro 2. En este caso habría un par de palomas en el nido azul y un par de palomas en el nido naranja.

Por lo tanto, **si sacamos** 5 **guantes tendremos dos pares de guantes.** Como ningún número anterior es la respuesta correcta, entonces 5 es **la mínima cantidad** de guantes que debemos sacar. Le di mi respuesta al maestro y me proporcionó el último acertijo.

Ejemplo 10.
Ahora quiero que me digas cuántos guantes debo sacar de la cesta para asegurarme de que he sacado un guante de color naranja.
Después de lo que hemos resuelto creo que esto es más fácil. Tenemos 8 guantes

azules y 8 naranjas. Podría ocurrir que sacando un guante o dos, obtuviéramos un guante naranja. Pero debemos estar seguros. También podría pasar, por ejemplo que sacáramos 5 guantes azules seguidos. De hecho, podría ocurrir que sacáramos los 8 guantes azules de manera consecutiva. Pero después de esos 8 no importa qué guante tomemos será uno naranja.
Entonces **necesitamos sacar** 9 **guantes para asegurar que obtendremos al menos un guante naranja.** Respondí 9 y obtuve el juego de mesa que había prometido el profesor.
En este caso podemos tratar de utilizar el principio de palomares, pensando en que hay 8 palomares azules, por ejemplo, pero pensar directamente en los guantes es más sencillo. Aún así, cuando nos digan que buscamos la menor cantidad de hacer algo para obtener un objeto o un resultado, podemos pensar en este principio y nos podría resultar de mucha ayuda. También hay ocasiones en las que podríamos resolver situaciones que pregunten por "cuál es la mayor cantidad" de algo, pero veremos que también podría servirnos el principio de palomares.

Ahora veamos un ejemplo con números en el que además de usar el principio de palomares veremos una propiedad muy interesante que cumplen las listas de números consecutivos.

Ejemplo 11.
Considera el conjunto de los primeros 10 números enteros positivos:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

¿Cuál es la mayor cantidad de números que puedo tomar de este conjunto de manera que ninguna pareja de los números que saque sume 11?

Veamos algunas de las parejas de nuestros números que suman 11 (porque quisiéramos que no nos salieran). ¿Hay algún número en el conjunto que al sumarlo con 1 me dé 11? Sí, el 10. La pareja 1+10 es una pareja que suma 11. Sigamos preguntándonos, ahora para el 2. También hay un número que al sumarlo con 2 da 11: 2+9=11. Para el 3, el tercer número de atrás para adelante, el 8, suma 11.

Notemos que así podemos seguir:

$$\begin{gathered}1+10\\2+9\\3+8\\4+7\\5+6\end{gathered}$$

Estas son las parejas que suman 11. Pero la manera en la que lo estábamos pensando antes nos dice que esto ocurre siempre, para cualquier lista de números consecutivos. Por ejemplo, la siguiente lista de números del k al n: $\{k, k+1, k+2, \ldots, n-2, n-1, n\}$.

Si sumamos $k+n$ y el segundo número más el penúltimo: $k+1+n-1=k+n$, obtenemos el mismo resultado. ¿Qué tal si sumo el tercer número más el tercero de atrás hacia adelante? $k+2+n-2=k+n$, también es el mismo resultado. Como podemos ver los mismos números se suman y se restan, por eso estas parejas siempre suman $k+n$.

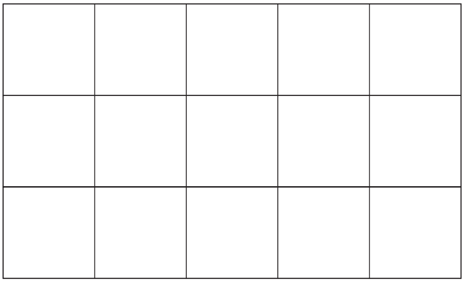
En nuestro ejemplo, qué tal si consideramos que tenemos 5 palomares, que representarán las 5 parejas de números que suman 11. En este caso los palomares tienen a sus palomas ya asignadas aunque no las metamos.

El palomar donde van el 1 y el 10, en el que van el 2 y el 9, en el que van el 3 y el 8, el del 4 y el 7, y por último el del 5 y el 6. Nuestras palomas serán los números del 1 al 10.

Observa que si en algún momento elegimos dos números que vayan en el mismo palomar, tendríamos una pareja que sumaría 11. Entonces, usaremos el principio de palomares tal como lo aprendimos: sólo podemos poner un máximo de 5 palomas en los palomares para que, de esa forma, no tomemos ninguna pareja que sume 11. Es decir, **la mayor cantidad de números que puedo tomar del conjunto sin que se forme una pareja es** 5.

7. Geometría

Recuerdo que, en la primaria, me enseñaron que el área de una figura era cuántos cuadritos de 1 cm × 1 cm cabían dentro de ella. Por ejemplo, para un rectángulo de base 5 cm y altura 3 cm el área es 15 cm^2 y se puede calcular contando cuadrito por cuadrito.



Mis maestros me enseñaron que había un truco para contar más rápido los cuadritos: multiplicar. Está es una idea muy simple, “cada renglón tiene el mismo número de cuadritos y entonces el total de cuadritos en el rectángulo es igual al número de cuadritos en cada renglón multiplicado por el número de renglones”. Estoy seguro que conoces está increíble idea por otro nombre, la famosa fórmula para calcular el área de un rectángulo

Área = Base × Altura

Lo genial de esta fórmula es que funciona para calcular el área de cualquier rectángulo de manera fácil y rápida. Si quisiéramos calcular el área de un rectángulo de base 200 cm y altura 100 cm, tardaríamos muchísimo tiempo contando cuadrito por cuadrito, pero nos tomaría sólo unos pocos segundos hacer la multiplicación 200×100=20000.
Quizá te has preguntado ¿de dónde salen las fórmulas para calcular el área de todas las demás figuras? y ¿por qué son importantes?
Te diré la respuesta: las fórmulas se obtienen de ideas que son fundamentales en

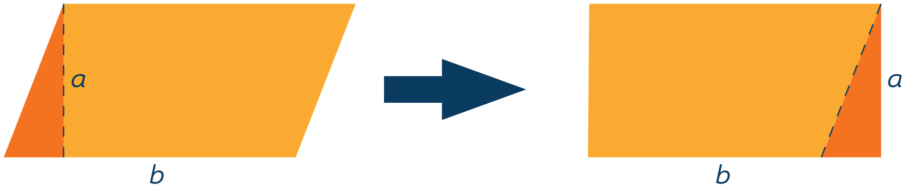
Fórmulas de Área					
Cuadrado		**l×l**	**Triángulo**		**b × a / 2**
Rectángulo		**b × a**	**Trapecio**		**(B + b) a / 2**
Paralelogramo		**b × a**	**Círculo**		πr^2

la geometría. Más allá de que en situaciones cotidianas es necesario saber el área de terrenos, piezas mecánicas y otras cosas, la importancia de estas ideas es que nos sirven para nuestro desarrollo intelectual, nos ayuda a ser lógicos, a razonar ordenadamente y a tener una mente preparada para el pensamiento y la crítica. Como estás leyendo esto, sospecho que te gustan tanto las matemáticas como a mí. Entonces, te voy a contar algunas de estas ideas, si bien, son fáciles de entender, te sorprenderá que te servirán para calcular el área de figuras muy complejas, y en algunos casos incluso sin tener todas las medidas de los lados de las figuras.

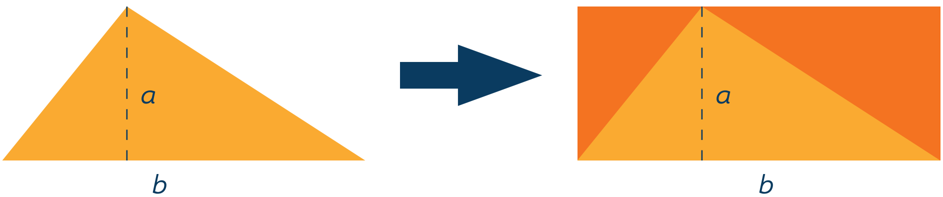
Cortar y pegar

Recuerda: Lo importante es conocer las ideas detrás de las fórmulas.

Una de las ideas principales para calcular áreas de manera simple es "cortar y pegar". Se trata de dividir la figura y reacomodar las piezas formando una figura más simple. Por ejemplo, el paralelogramo y el rectángulo. Como puedes ver en la tabla de áreas, el paralelogramo y el rectángulo tienen la misma área si tienen la misma base y la misma altura. Esto es porque con el paralelogramo podemos construir un rectángulo recortando y pegando un triángulo.



La idea de cortar y pegar también puede cambiar por copiar y pegar, por ejemplo, podemos ver que un triángulo tiene la mitad de área que un rectángulo con la misma base y altura, simplemente dividiendo el triángulo por su altura y duplicando los triángulos resultantes.

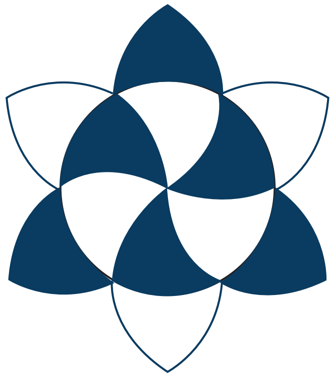


Como puedes ver, estas ideas coinciden con las fórmulas que están en la tabla.

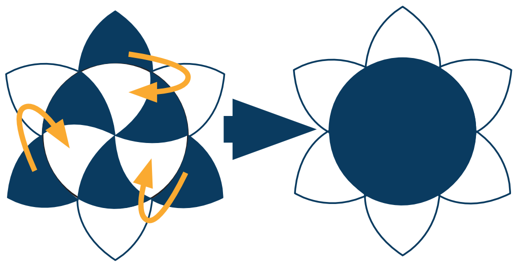
Ejercicio.
Usar estas ideas para deducir la fórmula del trapecio.

Ahora vamos con un ejemplo un poco más complicado. El paralelogramo de la siguiente figura tiene área 20 cm^2. ¿Puedes calcular cuánto mide el área azul?
Este es un problema difícil debido a que no conocemos cuánto mide la base ni la altura de cada uno de los triángulos. Sin embargo, si dividimos la figura de la siguiente manera podemos darnos cuenta que se forman 6 parejas de triángulos con el mismo tamaño; cada una con un triángulo verde y uno azul. Como puedes notar, no es necesario conocer la medida de las bases y las alturas de los triángulos para saber que el área azul es la mitad del área del paralelogramo. Así obtenemos que el área azul es 10 cm^2.

Está idea funciona también con otros tipos de figuras, por ejemplo, círculos. La siguiente figura es una flor que está formada por varios arcos de círculo de radio 1 cm. ¿Cuánto mide el área negra?

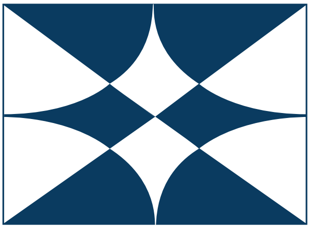


Si recortamos los pétalos negros exteriores y los ponemos en los espacios en blanco dentro de la flor, obtenemos un círculo negro de radio 1 cm. Usando la fórmula del área del círculo, tenemos que el área negra mide $\pi \times 1^2 = 3.1416$ cm^2.



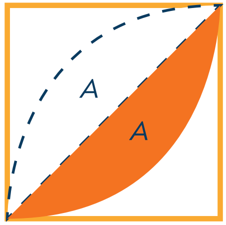
Ejercicio.
La siguiente figura está formada por un cuadrado de lado 4 cm y algunos cuartos de círculo (la cuarta parte de un círculo), ¿cuánto mide el área negra?

Inclusión y exclusión

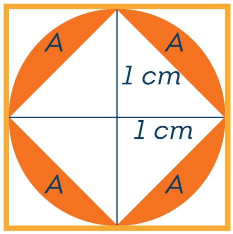


Ahora veremos un procedimiento para calcular el área de figuras un poco más avanzadas. Este método es tan fácil como sumar y restar, no utiliza fórmulas y consiste en una simple idea; **calcular el área de lo que sobra.**
Por ejemplo, en la siguiente figura tenemos un cuadrado de lado 1 cm y queremos calcular cuánto mide el área sombreada. Primero observamos que la figura sombreada tiene forma de pétalo y está construida por dos que círculos de radio 1 cm con sus centros en la esquina superior izquierda e inferior derecha del cuadrado.
Para calcular el área del pétalo, dividimos la figura en dos partes iguales.

Repitiendo una de estas mitades cuatro veces obtenemos un cuadrado y un

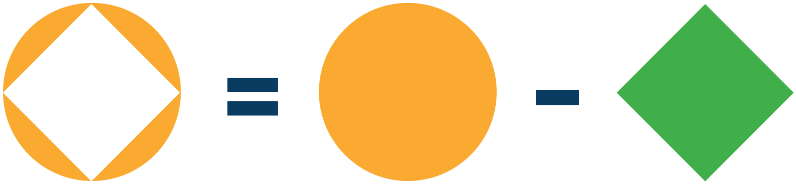


círculo que pasa por los vértices del cuadrado.
Como podemos ver, todas las figuras con la letra A tienen la misma área,

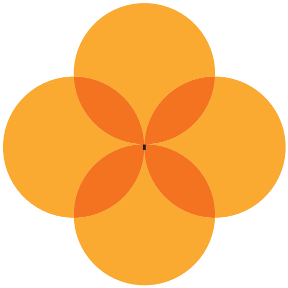


se puede calcular cuánto mide el área sombreada de esta última figura si calculamos el área del círculo y le restamos el área del cuadrado. En otras palabras, **para calcular el área que queremos obtener, calculamos el área total y le restamos el área que no nos interesa**, el área del círculo es $\pi \times 1^2 = 3.1416$ cm^2. Por otro lado, el cuadrado dentro del círculo está formado por cuatro triángulos de área 0.5 cm^2; así que el área de este cuadrado es 2 cm^2, entonces el área del sombreada de la última figura mide 1.1416 cm^2 y cada figura con la letra A tiene área $1.1416 \div 4 = 0.2854$ cm^2 como el pétalo original está formado por dos figuras con la letra A, entonces tiene área $0.2854 \times 2 = 0.5708$ cm^2.
La principal idea que usamos en el ejemplo anterior se llama principio de

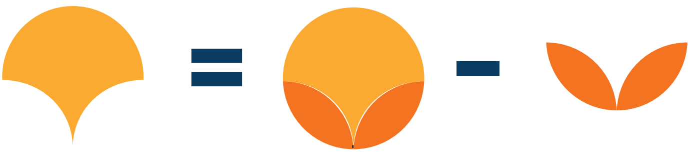
inclusión y exclusión debido a que, para calcular el área sombreada, incluimos (agregamos) el área del círculo y excluimos (quitamos) el área del cuadrado, o bien 3.1416-2=1.1416.



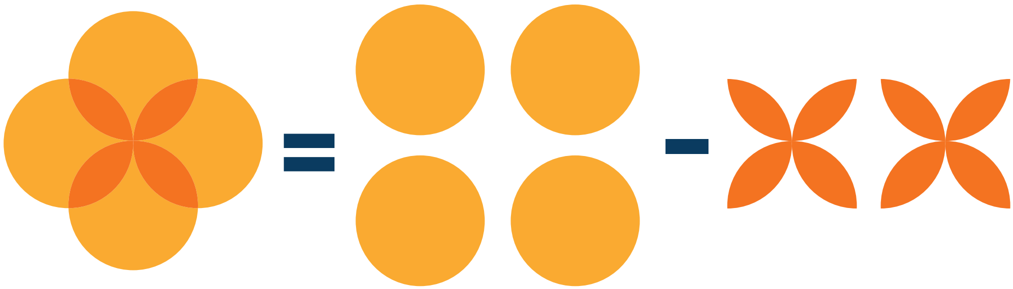
Con esta misma idea podemos encontrar el área de figuras más complicadas. Los cuatro círculos de la siguiente figura forman una flor de cuatro pétalos. Los círculos tienen radio 1 cm y los pétalos tienen la misma forma que en el ejemplo anterior. Veamos cómo podemos aplicar el principio de inclusión y exclusión para calcular el área azul de la figura.



La figura azul se forma con cuatro círculos quitando dos veces el área gris. Aquí nos podemos preguntar ¿por qué dos veces y no sólo una? Esta es una duda normal sobre el *principio* de inclusión y exclusión, pero con un poco de práctica, la idea que hay detrás de este principio será muy fácil de entender y usar. Para formar cada pieza azul de la figura, incluimos un círculo completo y excluimos dos pétalos grises.



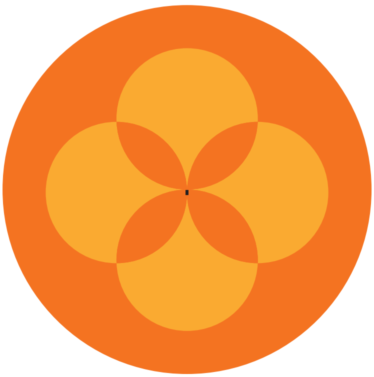
Como en total son cuatro piezas azules, entonces en total incluimos cuatro círculos completos y excluimos ocho pétalos grises, o bien, dos veces el área gris.



Ya que cada pétalo tiene área 0.5708 cm^2, y cada círculo azul tiene área $\pi \times 1^2 = 3.1416$ cm^2, entonces el área azul de la figura original es $4\times(3.1416) - 8\times(0.5708) = 8$ cm^2.

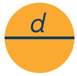
Ejercicio. En el ejemplo anterior, divide los pétalos a la mitad y acomódalos de diferente manera dentro de los círculos para formar un cuadrado azul cuyas diagonales miden 4 cm, y comprueba que el área de este nuevo cuadrado es igual al área azul de la figura original.

Ejercicio. Si encerramos a la figura del ejemplo anterior por un círculo de radio 3 cm obtenemos la siguiente figura. Calcula el área verde.



¿Cuánto mide? (Perímetros)

Además del área, otra de las principales características de las figuras es su perímetro. El perímetro es lo que mide el contorno de una figura y casi siempre nos referimos a él con la letra P. Recuerdo que en algún momento vi la siguiente tabla.

Nombre	Figura	Perímetro
Triángulo equilátero		**P = 3 × L**
Cuadrado		**P = 4 × L**
Pentágono regular		**P = 5 × L**
Cuadrado		**P = r × d**

Un polígono regular es una figura en la que todos sus lados son rectos y miden lo mismo, además, sus ángulos deben ser iguales. Las primeras tres figuras son *polígonos regulares*. Como cada lado de un polígono regular mide lo mismo, para calcular su perímetro basta con multiplicar el número de lados que tiene por lo que mide cada uno.
Como el triángulo tiene 3 lados, si llamamos L a lo que mide uno de ellos entonces el perímetro es el resultado de multiplicar 3 por L. En el caso del cuadrado hay que multiplicar por 4 y en el del pentágono por 5. En general, para un polígono regular con n lados tenemos que su perímetro es $P=n\times L$.

Para un círculo la fórmula cambia. Recuerda que un diámetro es cualquier segmento que atraviesa todo el círculo y pasa por su centro. A su longitud usualmente la llamamos d. Su perímetro se obtiene multiplicando d por el número π, el cual es aproximadamente 3.1416. Por ejemplo, si el diámetro de un círculo mide 2 cm, entonces su perímetro mide 2×π, que es aproximadamente 6.2832 cm.

Recuerda que al dividir el perímetro de un círculo entre lo que mide su diámetro se obtiene siempre el mismo resultado, sin importar el tamaño del círculo. A este resultado se le llama y es aproximadamente 3.1416

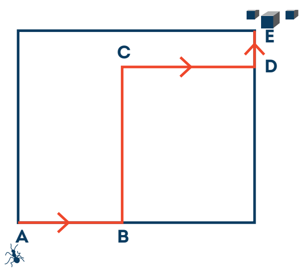
Pero ¿qué pasa si tengo figuras más complicadas que las de la tabla? ¿Cómo encuentro su longitud o su perímetro? Del perímetro sé que se obtiene sumando las longitudes de los lados que forman a la figura, aunque no sean todos iguales. Quiero ver si con esto que sé y resolviendo antes algunos problemas más sencillos, es posible calcular el perímetro o la longitud de figuras más complicadas. No sabía por dónde empezar, así que decidí preguntarle a mi abuelo. Él me dijo que había visto algunos acertijos de matemáticas en las últimas hojas del periódico que compra cada día.

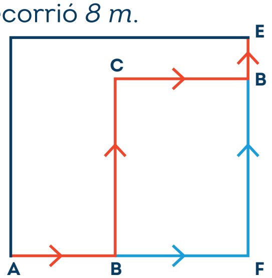
Se lo pedí y les eché un vistazo, uno de los acertijos era un poco curioso decía: “Una hormiga entra en una habitación cuadrada por una de sus esquinas, en la esquina contraria hay terrones de azúcar, si la hormiga realizó el recorrido en rojo para llegar a ellos y el cuarto mide 4 m por lado, ¿qué distancia recorrió la hormiga? *Envíanos tu solución y podrás ganar un vale para una semana gratis de nuestro periódico.”*

Pensé que ganar ese vale sería un lindo detalle para mi abuelo, así que decidí intentar el problema. No se me ocurría nada al inicio. En la figura están marcados varios puntos. Sabía que para calcular la longitud total había que sumar las medidas de todos los segmentos, es decir, sumar lo que mide el segmento *AB*, con lo que miden *BC, CD* y *DE*. Pero el problema no me dice cuánto miden estos segmentos.

Después pensé que quizás sería bueno dibujar la figura en una hoja, con un cuadrado de *4 cm*. Así cada *cm* en mi dibujo sería un *metro* del problema. Pero mis trazos quedaban un poco disparejos, por lo que no estaba seguro si estaba midiendo bien o si iba a fallar por unos cuantos *milímetros.*

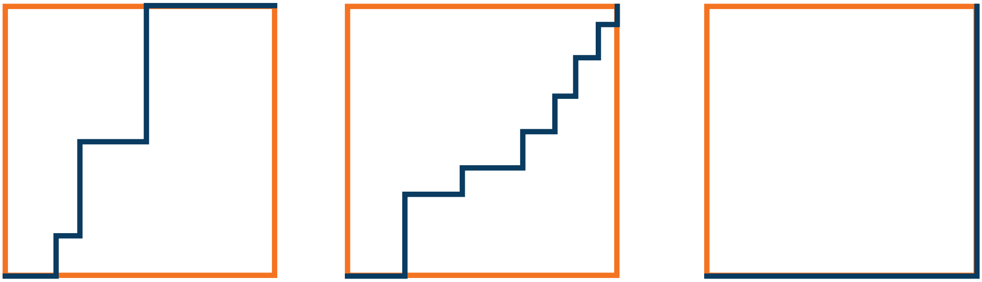
Después pensé, vamos a llamar *F* a la esquina de abajo a la derecha. Me di cuenta que el segmento *BC* mide lo mismo que el segmento *DF* (en azul). Es como mover el segmento *BC* hasta la orilla derecha del cuarto. Y con ese mismo razonamiento, los segmentos *BF* y *CD* miden lo mismo, pues es como mover el segmento *CD* a la orilla de abajo del cuarto. Entonces, lo que recorrió la hormiga es lo mismo que si hubiera ido desde *A* hasta *F* y luego de *F* a *E*. El segmento *AF* mide *4 m* y el segmento *FE* también, así que la hormiga recorrió *8 m*.





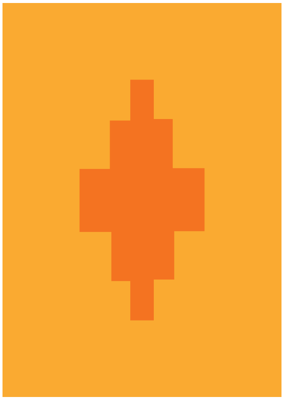
Le platiqué esto a mi abuelo y quedó convencido con mi solución; me dijo que le había impresionado que no fuera necesario saber lo que medía cada segmento de manera individual. Decidimos enviar la solución y tres días después llegó un sobre con el vale y una carta de las oficinas del periódico, la carta decía que les había gustado mi solución y que me habían elegido como ganador porque la mayoría de los otros participantes habían usado una de mis primeras ideas: habían dibujado el cuadrado a escala y medido con regla cada segmento a pesar de que algunos tenían la respuesta correcta, les había parecido mejor mi razonamiento.

Esto me motivó y aumentó mi curiosidad para buscar más formas de medir cosas. Algo de lo que me di cuenta poco después de resolver mi problema es que la hormiga recorre la misma distancia con los siguientes caminos:

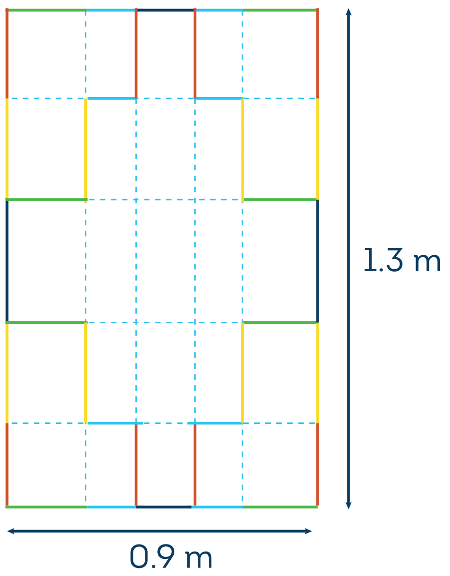


La idea es la misma. Cada segmento horizontal lo movemos o trasladamos hacia abajo y cada segmento vertical hacia la derecha, para completar dos de los lados del cuadrado.

En casa de mi abuelo encontré algunos objetos interesantes. Creo que su casa tiene algo especial. La alfombra que tiene en la sala tiene un grabado en el centro como el dibujo:

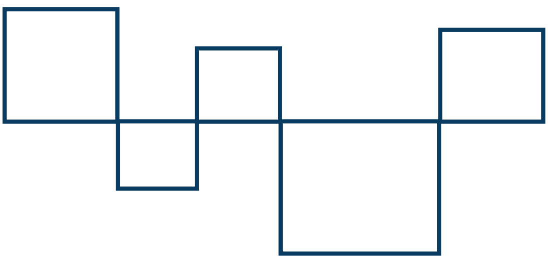


Si únicamente se sabe que la figura del centro mide 0.9 m de acho y 1.3 m de largo, ¿cómo saber cuánto es el perímetro? ¡Exacto! Podemos usar algo parecido al problema de la hormiga. Podemos encerrar la figura en un rectángulo de base 0.9 m y de altura 1.3 m y trasladar los segmentos a las orillas del rectángulo. En mi dibujo puedes ver que trasladé los segmentos usando colores. Entonces, la figura del centro tiene el mismo perímetro que el rectángulo, que es 1.3 + 0.9 + 1.3 + 0.9 = 4.4. Nuevamente, no necesitamos saber lo que mide cada segmento para calcular el perímetro.

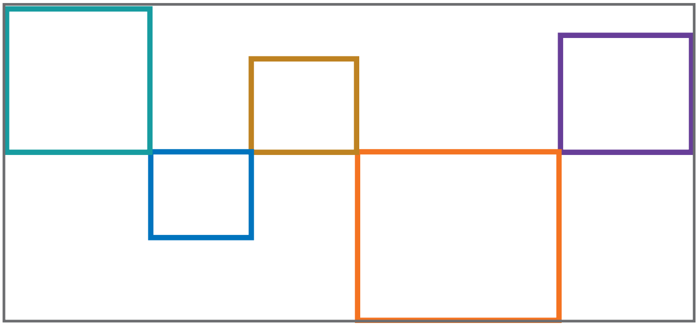


Recuerda que, en un rectángulo, sus lados opuestos miden lo mismo.

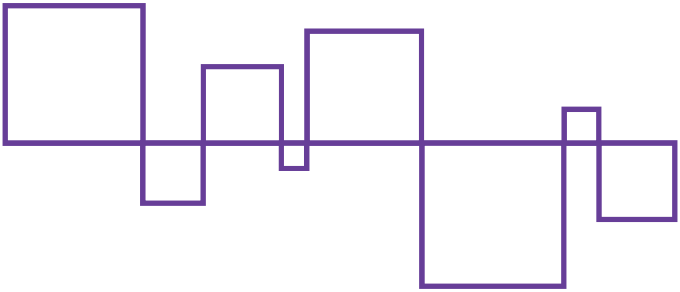
Además de la alfombra, me encontré un cuadro colgado en la pared, con una figura así:



Está formada por 5 cuadrados, si de largo la figura mide 85 cm, ¿puedes decirme cuánto vale el perímetro de toda la figura? No te voy a decir cuánto mide el lado de cada cuadrado, porque ni yo lo sé, pero no es necesario, piénsalo antes de seguir leyendo.

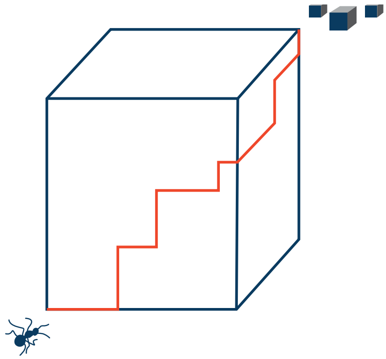


Vamos a colorear los cuadrados con colores diferentes. Como la figura mide *85 cm* de largo, si hacemos un grupo con un segmento verde, un azul, un amarillo, un naranja y un morado en total miden 85 cm. Como podemos hacer tres más de estos grupos, en total tenemos cuatro, por lo que el perímetro total de la figura es $85 \times 4 = 340$ *cm*. ¿Verdad que es interesante? Ahora imagina que en lugar de ser 5 cuadrados hay 8, pero la figura sigue midiendo 85 cm de largo. ¿Qué pasa con el perímetro? Si tu respuesta es que sigue siendo 340 cm, vas por buen camino. La idea y el resultado son los mismos, sin importar el número de cuadrados.



Ejercicios.

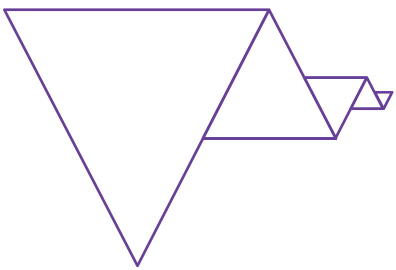
GeoPer1. Una hormiga camina por las caras de un cubo y hace el recorrido como el de la figura, para alcanzar el azúcar. Si cada arista del cubo mide 30 cm, ¿cuánto mide su recorrido?



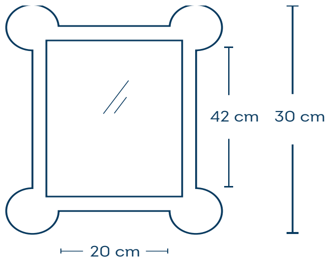
GeoPer2. La siguiente figura está formada por 5 triángulos equiláteros. El lado de cada triángulo mide la mitad del que está justo a su izquierda.

a) Si el lado del triángulo más grande mide 144 cm, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?

b) Si el perímetro de la figura es 186 cm, ¿cuánto mide cada lado del triángulo más pequeño?



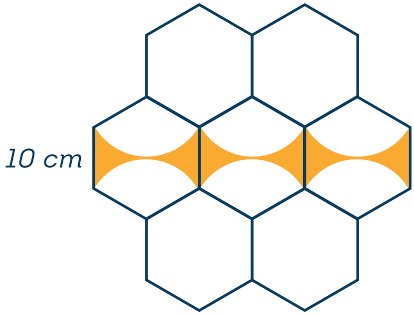
Otro de los objetos que encontré en casa de mi abuelo fue un espejo con un marco alrededor, a diferencia de las figuras de antes, éste tenía algunas partes curvas.
¿Cómo calculamos el perímetro del marco? Como el espejo es rectangular, el segmento recto de arriba también mide 20 cm y el segmento de la izquierda 30 cm. Las partes rectas del contorno del espejo miden entonces 20 cm+30 cm+20 cm+30 cm=100 cm.
¿Qué hacemos con las partes curvas?



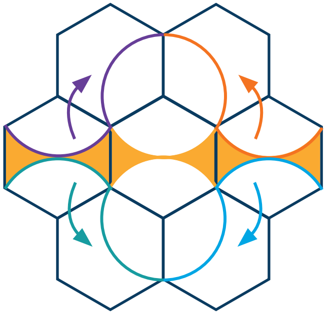
Notemos lo siguiente: cada esquina corresponde a 3/4 de un círculo y tenemos cuatro esquinas, por lo que en total es como si tuviéramos 12/4 partes de un círculo, es decir, 3 círculos completos. Entonces, basta calcular el perímetro de un círculo completo y multiplicarlo por 3, para luego sumarlo a los 100 cm que ya tenemos; si revisamos la tabla al inicio de esta sección, nos damos cuenta que lo único que hace falta calcular es el diámetro de un círculo, como la altura total del espejo es 42 cm, la longitud correspondiente a dos círculos es 12 cm. Por lo tanto, el diámetro de cada uno es 6cm y el perímetro de un círculo completo es $6\times\pi$, que es aproximadamente

6×3.1416=18.8496 cm. Multiplicando esto por 3 obtenemos 18×π, que es aproximadamente 56.5488 cm. En conclusión, el perímetro total del espejo es 100+18×π=156.5488 cm centímetros.

Tiempo después, me encontré con el siguiente problema. Consiste en 7 hexágonos regulares y 6 segmentos circulares. Cada lado de los hexágonos mide 10 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada? Este problema tardé más en encontrar la solución, pero me encantó. La estructura que forman los hexágonos se parece mucho a la que hay en un panal de abejas y es muy interesante cómo los hexágonos regulares pueden juntarse en ese patrón sin traslaparse. Precisamente este patrón me ayudó a encontrar la respuesta.

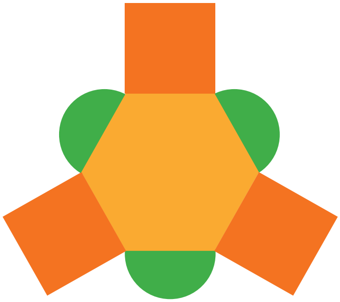


Observa que puedes trasladar 4 de las 6 partes circulares para completar dos círculos, como en la siguiente figura. Como cada segmento recto mide 10 cm, el radio de ambos círculos mide 10 cm. Por lo tanto, el diámetro mide 20 cm. Usando la fórmula para el círculo, encontramos que cada uno tiene perímetro 20×π, que es 20×3.1416=62.832 cm. Entre ambos tienen perímetro 40×π, o bien, 125.664 cm. Añadiendo 20 cm más por los segmentos rectos de la figura sombreada, concluimos que su perímetro es 40×π+20, es decir, 145.664 cm.



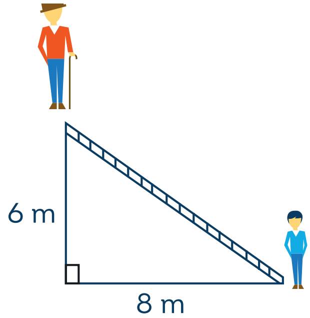
GeoPer3. La siguiente figura está compuesta por un círculo grande y dos mitades de un círculo pequeño. Si el diámetro del círculo grande es 36 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura sombreada?

GeoPer4. La siguiente figura está compuesta por triángulos equiláteros, cuadrados y mitades de círculo. Si el perímetro de cada uno de los triángulos es 12 cm, calcula el perímetro de toda la figura.

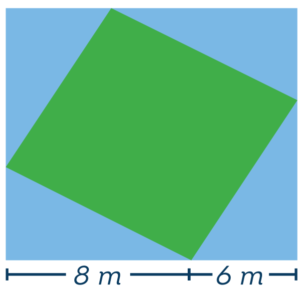


Después de todos estos problemas con los que me había encontrado, mi abuelo decidió proponerme el siguiente experimento: tomó una cuerda y me llevó a la sala, la sala es rectangular y tiene de ancho 6 m y de largo 8 m. Él se fue a una esquina y me dijo que me fuera a la esquina opuesta, sosteniendo cada quien un extremo de la cuerda, estiramos la cuerda y me preguntó, "¿cuánto crees que mide la cuerda desde donde estoy hasta dónde estás?" No supe contestar otra cosa más que "pues podemos medir la cuerda".

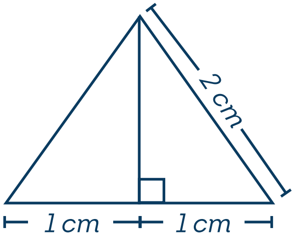
Mi abuelo me dijo que no era necesario, gracias a una idea que se le había ocurrido a un matemático griego de hace muchos años, llamado Pitágoras. Primero me hizo la siguiente pregunta: si un cuadrado tiene área 36 cm^2, ¿cuánto mide cada uno de sus lados? Como el área de un cuadrado se obtiene multiplicando lado por lado, busqué un número que multiplicado por sí mismo diera 36. Me di cuenta que 6×6=36, por lo que cada lado del cuadrado mide 6 cm. Luego me dijo que la figura que se formaba entre la cuerda y las paredes de la sala era un triángulo rectángulo, es decir, un triángulo con un ángulo recto o de 90°, como en este dibujo.



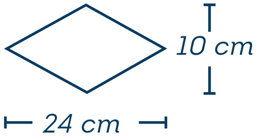
Con 4 triángulos iguales, formamos un cuadrado más grande, con otro cuadrado en el centro, de la siguiente manera, obtenemos un cuadrado de lado 14 m, por lo que su área es 14×14=196 m^2. Cada triángulo azul tiene base 8 y altura 6, por lo que su área es (8×6)/2=48/2=24. Entonces, el área azul es 24×4=96 m^2 y por lo tanto el cuadrado verde tiene área 196-96=100 m^2. ¿Qué número multiplicado por sí mismo me da 100? Exacto, el 10. Entonces cada lado del cuadrado verde mide 10 m.

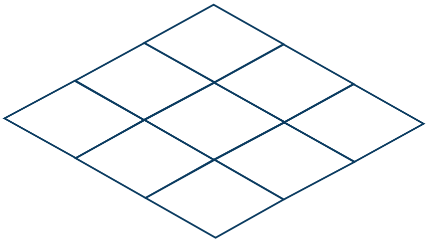


GeoPer5. En un triángulo equilátero en el que cada uno de sus lados mide 2cm, usa el Teorema de Pitágoras para encontrar cuánto mide su altura.



GeoPer6. La siguiente figura está compuesta por 9 rombos como el que se muestra a lado. ¿Cuál es el perímetro de la figura con 9 rombos? (Puede serte útil que las diagonales de un rombo se cruzan formando ángulos de 90°)



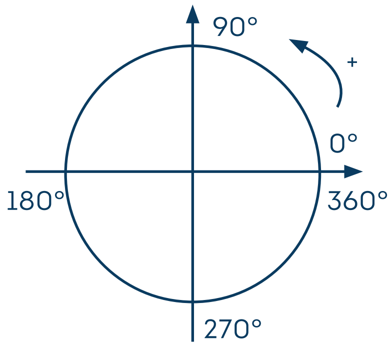


Ángulos

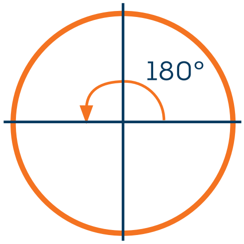
Recuerdo que cuando entré a la secundaria, mis maestros organizaron un viaje escolar y nos llevaron a conocer un observatorio astronómico. Ahí tenían un telescopio gigante, que tiene de largo lo que mide la altura de una casa. Con él, pudimos observar la luna, los planetas del sistema solar, nebulosas y galaxias. Le pregunté a uno de mis maestros como hacían para poder encontrar tan rápido a los planetas, ya que como es muy grande el cielo, podrían perderlos de vista. Él me dijo que usaban *coordenadas celestes*, o dicho de otra manera, ángulos. En ese momento fue cuando me di cuenta porqué los ángulos que me habían enseñado en la primaria eran tan importantes.

Con el tiempo aprendí que los ángulos no sólo eran útiles en astronomía, sino que también eran fundamentales para las coordenadas de un mapa, las brújulas en un campamento, la navegación de un avión, la construcción de edificios, la fabricación de máquinas y muchas otras cosas. Ahora voy a contarte algunas ideas geniales que esconden los ángulos. Estas ideas son muy fáciles de usar, pero tienen aplicaciones tan poderosas que harán que la geometría sea tu materia favorita.

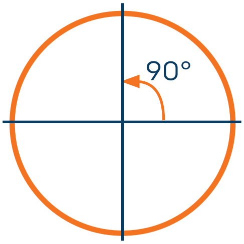
Así como los metros se usan para medir distancias, los ángulos sirven para medir giros o rotaciones y su unidad de medida son los grados. Por ejemplo, un piloto de avión confundiría al copiloto si le dijera "gira poquito el avión", pero podría indicar de manera precisa la dirección que debe tomar el avión si dijera "giremos 30 grados hacia la derecha". La pregunta ahora es ¿cuántos grados tiene una vuelta? Una vuelta tiene un total de 360°. Entonces, media vuelta tiene 180°, un cuarto de vuelta tiene 90°, un sexto de vuelta tiene 60° y así sucesivamente.



Antes de ver las propiedades principales de los ángulos vamos a conocer cómo se comportan. Existen dos ángulos que tienen nombres especiales debido a que son muy comunes, el ángulo de 180° se llama ángulo llano y el ángulo de 90° se llama ángulo recto.

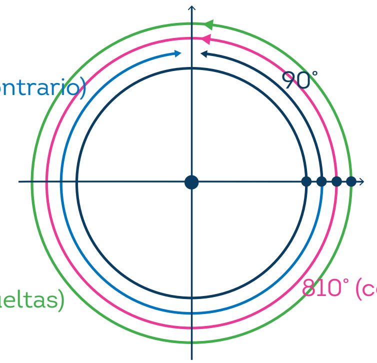


180°= Ángulo llano



90°= Ángulo recto

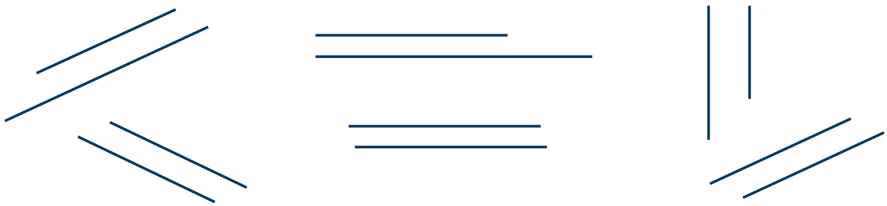
Los ángulos no se limitan a estar entre 0° y 360°, sino que también pueden ser más grandes. Por ejemplo, 720° es lo mismo que dos vueltas completas, o -180° es lo mismo que media vuelta en el sentido contrario. Por simplicidad, la mayoría de las veces se consideran sólo ángulos entre 0° y 180°. Por ejemplo, si giramos 810°, -270° o 2250°, la dirección a la vemos es la misma que si giramos solamente 90°.



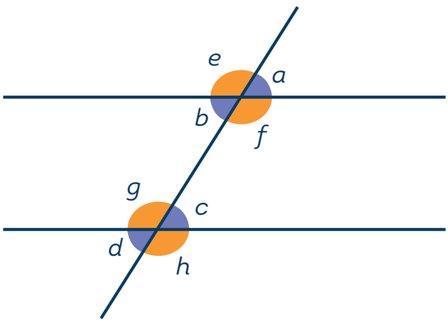
Ahora que ya conocemos qué son exactamente los ángulos, vamos a ver su propiedad principal, que es de donde se obtienen todos los resultados de ángulos. Recuerda que debes enfocarte en las ideas que hay detrás, y no en las fórmulas. Si te concentras en las ideas, podrás inventar tus propias fórmulas en cualquier momento y no necesitarás memorizarlas porque los has comprendido muy bien.

Paralelas

Cuando vas en una carretera recta, ¿has notado que las líneas pintadas de amarillo o blanco siempre van en la misma dirección y nunca chocan? En geometría, cuando dos líneas rectas van en la misma dirección y siempre se mantienen a la misma distancia sin chocar entre ellas mismas se llaman líneas paralelas. Estos son ejemplos de líneas paralelas.



Lo importante de las líneas paralelas es que cuando otra línea las corta, se forman muchos ángulos que se relacionan de alguna manera.



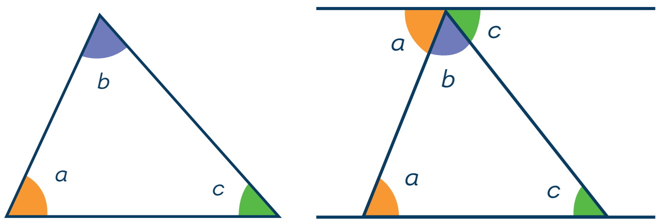
Cuando una línea atraviesa a dos líneas paralelas se forman ángulos como en la figura anterior. En este caso las líneas horizontales son las paralelas y la diagonal es la línea que las atraviesa. Sin importar que tan inclinada esté la línea que las intersecta (atraviesa) **siempre se cumple** que los ángulos marcados de color azul valen lo mismo entre ellos. Igualmente, también se cumple que todos los ángulos marcados de color naranja valen lo mismo entre ellos. Para referirnos al ángulo de color azul que tiene la letra a escribiremos $\angle a$. Podemos representar matemáticamente la idea anterior con las siguientes igualdades

$$\angle a = \angle b = \angle c = \angle d, \qquad \angle e = \angle f = \angle g = \angle h.$$

El primer uso de esta propiedad es que nos sirve para trasladar ángulos mediante paralelas, antes de ver un ejemplo de esto, tengo tres preguntas rápidas para ti. ¿Cómo se llaman entre sí los pares de ángulos $\angle a$& $\angle b$, $\angle a$& $\angle c$, $\angle a$& $\angle d$ y $\angle f$& $\angle g$?, ¿es cierto si se suma cualquier ángulo azul con cualquier ángulo naranja el resultado es 180°?

A la pareja de ángulos $\angle a$ y $\angle b$ se les dice opuestos por el vértice. Por otro lado, a la pareja $\angle a$ y $\angle c$ se les llama correspondientes. A los ángulos a y d se les dice alternos externos mientras que a los ángulos $\angle f$ y $\angle g$ se les dice alternos internos.

Ahora vamos con un ejemplo de esto que puede parecer complicado. En el siguiente triángulo, ¿cuánto vale la suma de los ángulos $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$?



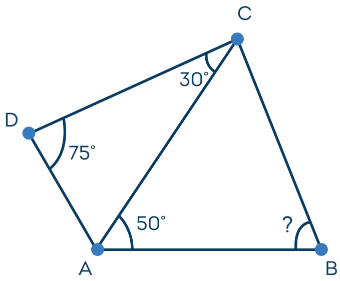
Este ejemplo muy fundamental para los problemas más avanzados y conoce como ***la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°.*** Puede parecer difícil ver que esta propiedad es cierta ya que no conocemos la medida de ninguno de los ángulos de triángulo, pero la idea que usaremos es tan genial que no necesitaremos ni sumar. Si trazamos una paralela a la base del triángulo que pase por el vértice superior, podemos trasladar con ángulos alternos internos los ángulos $\angle a$ y $\angle c$ como se muestra en la figura.

Es claro entonces que los ángulos $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$ juntos forman un ángulo llano, es decir

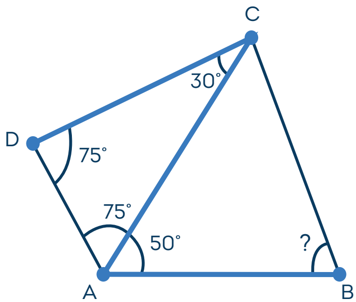
$$\angle a + \angle b + \angle c = 180°.$$

Aunque te parezca sorprendente, este resultado es todo lo que necesitamos para poder enfrentar problemas de ángulos más interesantes. Por ejemplo, en la siguiente figura el segmento AB mide lo mismo que el segmento CD. ¿Cuánto mide el ángulo del vértice B?

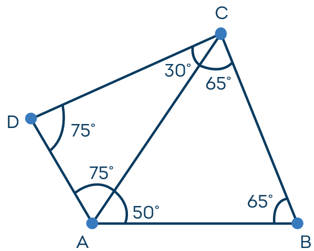
Podemos notar que el problema no nos dice cuánto miden los segmentos. Lo único que nos dice es que AB mide lo mismo que CD. Lo primero que podemos hacer es completar los ángulos en el triángulo ACD. Como los ángulos internos en un triángulo suman 180°, y en el triángulo ACD tenemos un ángulo de 30° y otro de 75°, entonces el ángulo que falta mide 75° también, ya que 30+75+75=180. Esto nos dice que el triángulo ACD es isósceles con los lados AC y CD iguales.

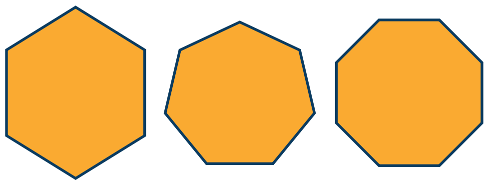


Usando los ángulos hemos obtenido que el segmento AC mide lo mismo que el segmento CD. Pero ya sabíamos que AB también medía lo mismo que CD. Así obtenemos que los tres segmentos marcados de azul en la figura anterior miden lo mismo y por lo tanto el triángulo ABC es isósceles. Los ángulos iguales del triángulo isósceles ABC son los dos ángulos desconocidos. Además, estos dos ángulos juntos deben de sumar 130°, ya que 130+50=180 esa sería la suma de los ángulos internos del triángulo ABC. Así podemos deducir que los dos ángulos faltantes deben ser 65°, ya que 65+65=130. Por lo tanto, el ángulo en el vértice B mide 65°.



También podemos usar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° para saber cuánto vale la suma de los ángulos internos de cualquier polígono, lo único que tenemos que hacer es triangular el polígono usando los vértices de este y las diagonales. Por ejemplo, para un hexágono se forman 4 triángulos, para un heptágono se forman 5 triángulos y para un octágono se forman 6 triángulos. En general, para un polígono, se pueden formar dos triángulos menos que el total de lados del polígono.



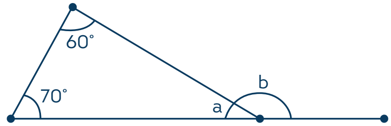


Hexágono Heptágono Octágono

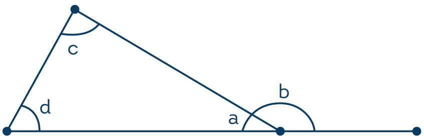
Ejercicio.

Usando el resultado para polígonos de cualquier número de lados, y que un polígono regular tiene todos sus ángulos iguales, calcula la medida de un ángulo interno para los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7 y 8 lados.

Otra herramienta muy útil es la siguiente, en la siguiente figura, ¿cuánto mide el ángulo b?

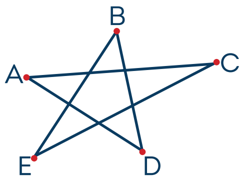


Como $\angle a$ y $\angle b$ forman un ángulo llano, entonces $\angle a + \angle b = 180°$, también se tiene que los ángulos internos del triángulo suman 180° y así $\angle a + 130° = 180°$. De lo anterior podemos ver que $\angle b = 130°$, en realidad no necesitamos conocer las medidas de los ángulos de 60° y 70° para tener un resultado similar. Para aclarar esto consideremos el siguiente triángulo, en el cual no conocemos ningún ángulo.

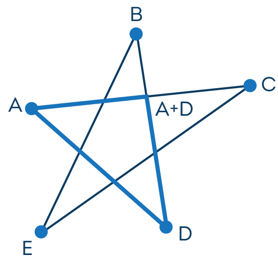


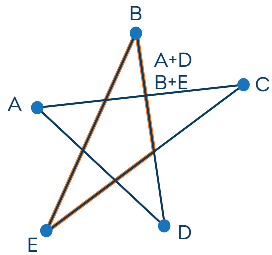
Sabemos que $\angle a + \angle b = 180°$ y que $\angle a + \angle c + \angle d = 180°$, entonces $\angle b$ tiene que medir lo mismo que la suma $\angle c + \angle d$, es decir $\angle b = \angle c + \angle d$, ese es el resultado al que queríamos llegar: *el ángulo exterior **b** de un triángulo mide lo mismo que la suma de los dos ángulos internos opuestos **c+d.***

Podemos aplicar este principio para calcular la suma de ángulos de una figura muy compleja sin conocer la medida de sus ángulos. En la siguiente figura, cuanto mide la suma de los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ y $\angle E$?



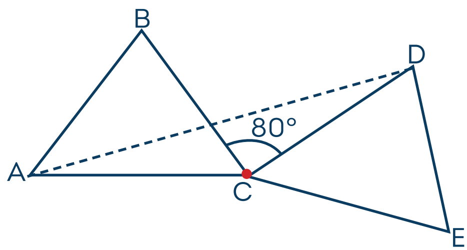
Si observamos el triángulo azul notamos que podemos aplicar la misma idea que en el ejemplo anterior para trasladar los ángulos $\angle A$ y $\angle D$. Lo mismo sucede con el triángulo naranja para trasladar los ángulos $\angle B$ y $\angle E$. Con esto hemos juntado los cinco ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ y $\angle E$ dentro del triángulo de la derecha, y por lo tanto





$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°.$$

Ejercicio.
Si los lados de los triángulos equiláteros de la siguiente figura miden lo mismo, ¿cuánto mide el ángulo en el vértice D del triángulo ACD?



Sección de problemas

Problema 1

En un pizarrón Ana y Rubén escriben 9 signos + y 9 signos -, luego juegan siguiendo las siguientes reglas:

- En un turno cada uno elige dos signos y los borra.
- Si los dos signos borrados eran iguales, se escribe un signo +
- Si los dos signos borrados eran diferentes entre sí, se escribe un signo -

Si al final del juego el único signo en el pizarrón es +, Ana gana, de lo contrario gana Rubén. ¿Quién ganará?

Problema 2

Un viejo pirata tiene en sus manos 9 monedas de plata idénticas entre sí; sin embargo, sabe que una de esas monedas es falsa y además sabe que una moneda falsa pesa menos que una de plata. Su amigo; un vendedor del puerto, le presta una balanza y le pide que sea rápido puesto que la balanza le sirve para el trabajo. ¿Encuentra una manera de identificar la moneda falsa con la menor cantidad de pasos posible?

Nota: La balanza cuenta con dos platillos en donde se puede colocar objetos y se inclina hacia el platillo con mayor peso.

Problema 3

Daniel es un niño muy curioso. Un día caminando por el jardín de su casa encuentra una vara de madera sobre la que caminan 11 hormigas. Daniel nota que las hormigas caminan a una velocidad de 1 metro por minuto y cuando dos hormigas se encuentran de frente, cada una da la media vuelta y sigue caminando hacia el lado contrario. Si una hormiga llega al extremo de la vara, se cae de ella. La vara mide un metro y cuando Daniel la encuentra, cada hormiga se encuentra separada de sus vecinas por 10 cm, con una hormiga en cada extremo. Si las 6 hormigas a la izquierda de la vara caminan hacia la derecha y las 5 hormigas a la derecha de la vara caminan hacia la izquierda, ¿cuánto tiempo pasará para que la vara se quede sin hormigas?

Problema 4

Mi amigo Rafa el astronauta ha visitado todo tipo de lugares extraños. Me contó una vez de un planeta en el que cada alien tiene una antena en la cabeza, y aunque todos son capaces de ver las antenas de los demás, no pueden ver ni sentir la suya. En el planeta existe una ley que dice que si pierdes tu antena debes irte, sin embargo, como los aliens son muy amigos entre sí, cuando uno pierde la antena, ninguno de sus amigos le dice y esperan a que se dé cuenta sólo. Una mañana el rey del planeta hace un anuncio público en el que dice que varios habitantes han perdido sus antenas y que les da un día para retirarse. A partir de ese anuncio todos los días los aliens se reúnen en una plaza y se ven los unos a los otros, para ver si ya se fueron los que no tienen antena. En los primeros 29 días nadie se va del planeta y en el día número 30 todos los aliens que habían perdido su antena se van. ¿Cuántos aliens habían perdido la antena?

Problema 5

La rana Patricia da algunos saltos chicos, medianos y grandes, de longitud entera. Con los 64 saltos grandes que dio saltó 49 de su recorrido total. Del resto de su recorrido, 710 corresponde a 98 saltos chicos que dio. Si en total saltó 2016 cm, ¿cuál es la longitud de los saltos medianos?

Problema 6

En la secundaria de Adriana un tercio de los alumnos son de segundo grado. Del resto 60% corresponde a los 90 alumnos de primer grado. ¿Cuántos alumnos de tercer grado hay en su escuela?

Problema 7

Luis ahorra 20 pesos los lunes, miércoles y viernes y 30 los martes jueves y sábados. Luego, de sus ahorros gasta 110 pesos en invitar a Montse al cine los domingos. Si comienza a ahorrar en un martes, ¿cuánto dinero tendrá al cabo de 500 días?

Problema 8

David escribe varios números en el pizarrón, de tal manera que todo número es mayor al anterior por la misma cantidad de unidades. Los primeros tres números que escribe se pueden expresar como $5x+1$, $8x-3$ y $4x+7$, para un número x que no conocemos. ¿Cuál es el centésimo número que escribe?

Problema 9

En el salón de Diana y Elisa todos tienen la misma edad, excepto ellas que son dos años mayores que el resto. Además, la suma de todas las edades es 485. Si en el salón hay más de 20 personas, pero menos de 50, ¿cuántos años tienen Diana y Elisa?

Problema 10

Chema tiene entre 50 y 100 naranjas que quiere agrupar en montones para vender. Si hace seis montones le sobran 5 naranjas, pero si hace 11 montones no le sobra ninguna. ¿Cuántas naranjas tiene Chema?

Problema 11

El producto de tres números distintos y mayores que 1 es 441, ¿cuánto vale la suma de estos tres números?

Problema 12

Luis y Ale tienen cuadrados de papel idénticos. Luis le aumenta 5 cm a lo largo y le quita 5 cm a lo ancho y obtiene un rectángulo. Alee le quita 1 cm a lo largo y también le quita 1 cm a lo ancho y obtiene un nuevo cuadrado. Las figuras que obtuvieron Luis y Ale tienen la misma área. ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados originales?

Problema 13
Fer y Chus, en sus calculadoras, multiplican los números 222, 444, 666 y 888. Luego, Chus comienza a dividir el resultado entre 2 hasta que aparece el primer número con punto decimal y Fer comienza a dividir el resultado entre 3 hasta que aparece el primer número con punto decimal. ¿Quién de los dos hizo más divisiones?

Problema 14
Ceci escribe números en su libreta de la siguiente manera: si el último número que escribió es par, entonces escribe la mitad de ese número; si el último número que escribió es impar, entonces le suma 3 y escribe el resultado. Por ejemplo, si comenzara con el número 18 los primeros números que escribiría son 18, 9, 12, 6 etc. El primer número que escribió Ceci es el 7. ¿Qué número escribió en la posición 2017?

Problema 15
Lulú se inscribe a una competencia de matemáticas donde le hacen 20 preguntas. Por cada pregunta que conteste correctamente se le otorgan 8 puntos, por cada pregunta que responda de manera incorrecta se le quitan 6 puntos y si deja una respuesta en blanco no se le otorgan ni se le quitan puntos. Si sabemos que el resultado final de Lulú fue 0 ¿cuál es la mayor cantidad de respuestas que pudo haber contestado correctamente?

Problema 16
Cinco atletas mexicanos regresan a su país después de una gran victoria en los juegos olímpicos, en los que obtuvieron los primeros cinco lugares. En una entrevista exclusiva hacen las siguientes declaraciones:

- Alan: Bueno, al menos no fui el último de nosotros cinco.
- Beto: Carlos obtuvo el tercer lugar.
- Carlos: Me sorprendió bastante que Alan quedará después de Ernesto.
- Daniel: Pues Ernesto quedó en el segundo lugar.
- Ernesto: Y Daniel no quedó en el primero.

Luego nos enteramos que los primeros dos lugares mintieron durante la entrevista por modestia, mientras que los demás dijeron la verdad. ¿Puedes decirnos en qué orden quedaron los atletas en la competencia?

Problema 17
Si multiplicamos todos los números impares desde 1 hasta 2017 ¿Cuál es el dígito de las unidades de este producto?

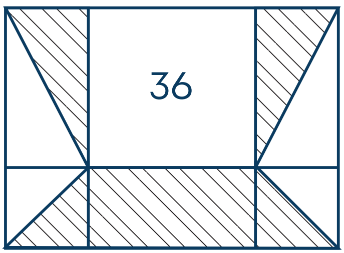
Problema 18
En la cafetería favorita de Ceci se venden 4 tipos de café diferentes. Se ofrecen tres tamaños distintos de vaso (pequeño, mediano o grande). Además, Ceci le puede agregar a su café leche, azúcar o pana (puede agregar más de una de estas opciones si quiere). Un día Ceci decide que pedirá café de todas las maneras posibles en la cafetería. ¿Cuántos cafés pidió Ceci ese día?

Problema 19

Un amigo me contó una vez la historia de 3 marineros que alguna vez naufragaron en una isla donde vivía un mono. El primer día los marineros reunieron todos los cocos en el centro de la isla, para repartirlos al día siguiente. Durante la noche uno de ellos, desconfiando de sus compañeros, se levantó y dividió los cocos en 3 montones. Los cocos que sobraron se los dio al mono. Luego escondió uno de los 3 montones en otro lugar de la isla y se volvió a dormir. Los otros dos marineros, uno por uno, se levantaron en algún momento de la noche e hicieron lo mismo con los cocos que había en el centro de la isla en ese momento. Al día siguiente repartieron los cocos que quedaban, 4 para cada uno, y no sobró ninguno para el mono. ¿Si sabemos que el mono recibió 6 cocos en total, cuántos cocos había al principio en el centro de la isla?

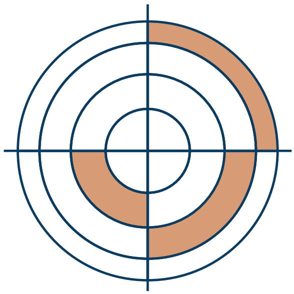
Problema 20

En la siguiente figura, el lado del cuadrado más grande mide el doble que el lado de los dos cuadrados pequeños. Si sabemos que el área del cuadrado más grande es 36. ¿Cuánto mide el área sombreada en la figura?



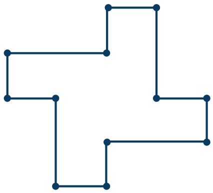
Problema 21

Se dibujan 4 círculos con el mismo centro, de manera que el círculo más pequeño tiene radio igual a 1. Luego se trazan 2 rectas que pasan por el centro de los círculos y los dividen en 4 partes iguales. Si las 4 regiones sombreadas mostradas en la figura tienen la misma área entre sí ¿cuánto mide el radio del círculo más grande?



Problema 22

(Posible problema reto). A mi amigo Pablo le gusta mucho hacer figuras con palillos de madera y plastilina. Un día su mamá le regala varios palillos de madera y Pablo se da cuenta que estos miden el doble de los palillos con los que él suele jugar, con ayuda de bolitas de plastilina, Pablo usa estos palillos largos y los cortos para construir la siguiente figura. Si el área de la figura es 200 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



Sección de soluciones

Problema 1

Fijémonos por un momento en la cantidad de signos - en la pizarra. Al principio del juego hay 9 de estos, que es un número impar. En un turno puede pasar una de estas tres cosas:

- Se borran dos signos + y se escribe un signo +: En este caso la cantidad de signos - no cambia.
- Se borran dos signos - y se escribe un signo +: En este caso la cantidad de signos - disminuye 2 unidades.
- Se borran un signo +, un signo - y se escribe un signo -: En este caso la cantidad de signos - disminuye en 1 y luego incrementa inmediatamente en 1, por lo que al final del turno no ha cambiado.

Cuando a un número impar se le resta 2, el resultado sigue siendo impar. Como la cantidad de signos - empieza siendo impar, permanecerá impar después de cualquier turno. Como 0 es un número par, la cantidad de signos - nunca puede ser 0. Así que cuando en el pizarrón quede un único signo, este tiene que ser -. Rubén será el ganador del juego.

Problema 2

Imagina que tienes enfrente de ti las 9 monedas y la balanza, y sabes que una de las monedas es falsa. Quizás tu primer impulso sea comparar el peso de dos monedas, colocando cada una en un platillo y hacer esto para todas las posibles parejas de monedas. De esta forma seguramente encontrarías la moneda falsa, pero tardarías mucho, ya que la cantidad de parejas distintas que se pueden formar con 9 monedas es 36, por lo que tendrías que utilizar la balanza 36 veces. En lugar de esto consideremos primero casos más pequeños del problema. Imagina que, en lugar de tener 9 monedas, tienes 3, y sabes que una de esas tres monedas es falsa. Puedes encontrar la moneda falsa utilizando la balanza una única vez. Para esto elige dos monedas y compara su peso. Si una de ellas pesa menos que la otra, sabrás que ésta es la moneda falsa. Si las dos monedas pesan lo mismo, entonces las dos son las reales y la moneda que no pusiste en la balanza es la falsa.

Puedes aplicar esta misma idea a tu grupo de 9 monedas. Primero separa las 9 monedas en tres grupos iguales, de tres monedas cada uno. Utilizarás la balanza para comparar dos de estos tres grupos. Si uno de los dos grupos que comparaste pesa menos que el otro, ya sabrás que es porque una de las tres monedas en este grupo es la falsa. Si pesan lo mismo, sabrás que la moneda falsa está en el grupo de 3 monedas que no pusiste en la balanza. Una vez encontrado en qué grupo está la moneda falsa, sólo necesitas utilizar la balanza una vez más para encontrar la moneda falsa. Así hemos encontrado una manera de hallar la moneda falsa en solamente dos pasos.

Problema 3

Imaginemos que todas las hormigas llevan sombreros numerados del 1 al 11, de tal manera que cuando Daniel la encuentra la hormiga de hasta la izquierda lleva el sombrero 1, la siguiente lleva el sombrero 2 y así hasta que la hormiga de hasta la derecha lleva el sombrero 11.

Ahora digamos que cuando dos hormigas se encuentran de frente, antes de dar la media vuelta intercambian sombreros, y que este movimiento no necesita ningún tiempo extra. Por ejemplo, las primeras hormigas que se chocan entre sí son la que lleva el sombrero 6 y la que lleva el sombrero 7 (las dos del centro). Al chocarse intercambian sombreros, de modo que la hormiga que tenía el sombrero 6 ahora tiene el sombrero 7. Por esto, después de este choque, el sombrero número 7 sigue moviéndose hacia la izquierda, aunque la hormiga que lo llevaba ya no. vemos que de esta manera todos los sombreros recorren la distancia desde donde comienzan hasta el extremo de la vara al que se dirigían al principio. Por ejemplo, el sombrero 1 recorre toda la vara, de izquierda a derecha, sobre la cabeza de varias hormigas.

Los sombreros se caen de la vara al mismo tiempo que las hormigas, así que el tiempo en que se tarden en caer todas las hormigas es el mismo en que los sombreros tardan en llegar al extremo de la vara. Los sombreros que más distancia recorren son el 1 y el 11, ya que recorren toda la vara. Como la velocidad de los sombreros es la misma que la de las hormigas, estos sombreros recorren la vara a 1 m/min. Por esto, el sombrero 1 y el 11 tardan un minuto en alcanzar el otro extremo de la vara y caerse. Todos los demás tardan menos, porque recorren menos. Así que un minuto debe pasar para que todas las hormigas se caigan de la vara.

Problema 4

Para resolver este problema conviene empezar por el caso más sencillo de todos. Imagina que sólo un alien ha perdido su antena. Cuando escuche el anuncio del rey, el alien verá que todos los demás en el planeta aún tienen sus antenas en la cabeza y como debe haber alguno sin antena, se dará cuenta que él es el que la ha perdido y se irá del planeta el primer día. Ahora supongamos que dos aliens han perdido su antena. Cada uno de ellos verá que el otro ha perdido la antena y pensarán "Si sólo él ha perdido la antena, tardará un día en irse", por lo que expliqué antes. Al día siguiente cada uno verá que el otro no se ha ido, lo que debe significar que hay otro alien sin antena. Entonces se darán cuenta que ellos mismos han perdido la antena y se irán del planeta el segundo día. Si son tres los aliens que han perdido su antena, cada uno de ellos verá que hay dos aliens sin antena y pensarán "Tardarán dos días en irse". Al tercer día, cuando vean que aún no se han ido, se darán cuenta que hay un alien más sin antena y que al no verlo, deben ser ellos mismos. Así que en este caso los tres aliens se van del planeta al tercer día.

Podemos continuar con este argumento de uno en uno. Por lo cual sabemos que, si los aliens se fueron hasta el día número 30, debían de ser 30 aliens los que habían perdido su antena.

Problema 5

De los 2016 cm que saltó 49 los dio en saltos grandes. Dividimos 2016 entre 9 y eso lo multiplicamos por 4, para saber la distancia que recorrió con 64 saltos grandes. 2016 entre 9 es 224 y esto por 4 es 896, es decir, 64 saltos grandes equivalen a 896 cm. Si dividimos 896 entre 64 obtenemos 14, entonces cada salto grande es de 14 cm de longitud del resto, es decir de los 1120 cm restantes, saltó 710 en saltos pequeños. 1120 entre 10 es 112 y esto por 7 es 784, por lo que recorrió 784 cm con los 98 saltos chicos. Al dividir 784 entre 98 obtenemos 8, así que cada salto chico es de 8 cm de longitud. Así que 336 cm restantes los hizo en saltos medianos. Como los saltos medianos deben ser más grandes que los chicos pero más chicos que los grandes, pueden ser de 9, 10, 11, 12 o 13 cm de longitud. Además, debe ser un divisor de 336 porque con saltos de esa longitud recorrió 336 cm. Si pruebas con todos los números notarás que la única posibilidad es que los saltos sean de 12 cm de longitud y que dio 28 de éstos.

Problema 6

Llamaremos n a la cantidad de alumnos en la escuela. Esta es una variable como aprendiste en el capítulo de pre-álgebra. Sabemos que $(1/3)n$ son alumnos de segundo grado. Del resto, o sea, de $n-(1/3)n = (2/3)n$ el 60 % son los 90 alumnos de primer grado. Para saber cuánto es el 60% de $(2/3)n$, multiplicamos por la fracción a la que equivale 60%, que es 60/100:
$90=(60/100)(2/3)n=(3/5)(2/3)n=(2/5)n$
De aquí podemos encontrar que $n=225$. Ahora bien, como $(1/3)n=(1/3)(225) =75$ son los alumnos segundo grado y 90 los de primer grado, tenemos que los 60 restantes son de tercer grado.

Problema 7

En una semana, de martes a lunes, hace lo siguiente: ahorra 30 pesos el martes, 20 el miércoles, 30 el jueves, 20 el viernes y 30 el sábado con lo que junta 130 pesos. Luego gasta 110 el domingo para invitar a Montse al cine por lo que le quedan 20 pesos. Después ahorra 20 pesos el lunes y en total tiene 40 pesos. Así, en ese tiempo tendrá 40 pesos más de lo que tenía antes. Como $500=771+3$, en 500 días hay 71 semanas y 3 días. Así, en $497=771$ días ahorrará $40\times71=2840$ pesos y después, comenzando una nueva semana ahorrará 30 pesos el martes, 20 el miércoles y 30 el jueves para completar los 500 días. Por lo tanto, ahorra $2840+30+20+30=2920$ pesos en esos 500 días.

Problema 8

Como cada número es mayor al anterior por la misma cantidad de unidades, sabemos que el segundo número menos el primero será lo mismo que el tercer número menos el segundo. Esto quiere decir que $(8x-3)-(5x+1) = (4x+7)-(8x-3)$. Esto es lo mismo que decir $3x-4=-4x+10$, por lo que $7x=14$, y finalmente concluimos que $x=2$. Así que los primeros tres números que escribió David son $11= (5\times2)+1$, $13= (8\times2)-3$ y $15= (4\times2)+7$. Vemos que los números que escribe David van de 2 en 2, comenzando por 11. Esto nos dice que el número en la posición 100 es el que se obtiene de sumar 99 veces 2 a 11. El centésimo número es $11+ (99\times2)=209$.

Problema 9

Si Diana y Elisa tuvieran la misma edad que sus compañeros, la suma de todas las edades del salón debería ser 4 menos, pues habría que quitar los dos años extra que cada una agrega a la suma. Así que, si todos los compañeros tuvieran la misma edad, la suma de las edades del salón sería $485-4=481$. Ahora, recordando lo que aprendiste en el capítulo de Teoría de Números, sabemos que la cantidad de estudiantes en el salón de Diana y Elisa debe dividir a 481, ya que este número multiplicado por la edad de todos en el salón debe dar exactamente 481. Como la factorización de 481 en primos es $481= 13 \times 37$, entonces los divisores de 481 son: 1, 13, 37 y 481. El único divisor entre 20 y 50 es 37, así que este debe ser la cantidad de estudiantes en el salón. Por lo cual las edades de todos, excepto Diana y Elisa, son $481\div37 = 13$. Diana y Elisa tienen dos años más que el resto, así que tienen 15 años.

Problema 10

Cuando Chema reparte sus naranjas en 11 montones iguales, no le sobra ninguna. Esto nos dice que la cantidad de naranjas de Chema es un múltiplo de 11, y además sabemos que está entre 50 y 100. Los múltiplos de 11 entre 50 y 100 son 55, 66, 77, 88 y 99, así que la cantidad de naranjas que tiene Chema debe ser alguno de estos números. Por otro lado, si dividimos la cantidad de naranjas entre 6 obtenemos un resto de 5 naranjas, dividiendo los números anteriores entre 6 observamos que:

$55= (9\times6) + 1$, $66= (11\times6)+0$, $77= (12\times6)+5$, $88= (14\times6)+4$, $99= (16\times6)+3$

Como el único múltiplo de 11 entre 50 y 100 que deja residuo 5 al dividirlo entre 6 es 77, Chema debe tener esa cantidad de naranjas.

Problema 11

La factorización en números primos de 441 es $441= 3\times3\times7\times7$, por lo cual, si queremos que 3 números al multiplicarse den 441, estos tres números deberán ser los de la factorización, o una multiplicación entre ellos. Por ejemplo, si quisiéramos que los primeros dos números sean 1 y 7, entonces el tercero tendría que ser $441\div (1\times7)=63=3\times3\times7$, para que $1\times7\times (63)=441$. Pero entre las condiciones del problema se pide que ningún número sea 1 y que todos sean distintos entre sí. Así que no podemos elegir que los primeros 2 números sean ambos 3 o ambos 7. Decidimos que uno sea 3 y el otro sea 7, de manera que el tercero debe ser $3\times7=21$. Así obtenemos que 3×7× (21)=441, y la suma de estos números es 3+7+21=31.

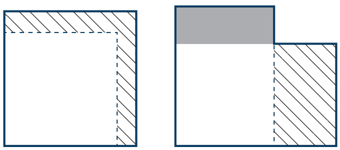
Problema 12

Como los cuadros de Luis y Ale son idénticos entre sí, sabemos que tienen al principio la misma área. En la siguiente imagen se muestran los cambios que hizo cada uno a su cuadro de papel, en el dibujo si un área está rayada, quiere decir que se quitó del papel y si está sombreada, entonces esa parte se agregó.

Como después de estos cambios las áreas siguen siendo iguales, entonces el área quitada en un cuadro debe ser la misma área quitada en el otro, pero considerando que al segundo también se le agregó área (el área sombreada).

Llamemos x a la medida del cuadrado original. Luis le quitó a su cuadrado dos rectángulos y un cuadrado pequeño. Los rectángulos tienen lados x-1 y 1, mientras que el cuadrado pequeño es de lado 1. Así que el área total que le quitó al cuadrado es $(x-1)1 + (x-1)1 + 1 = 2x-1$. En cambio, Ale le quitó a su cuadrado un rectángulo de lados x y 5, pero luego agrega un rectángulo de lados 5 y x-5. Así que en total la cantidad de área que le quitó a su cuadrado es $5x - 5(x-5) = 25$. Por lo que dijimos anteriormente, sabemos que $2x-1=25$. Resolviendo esta ecuación entonces sabemos que $x=13$.

Problema 13



La manera más fácil de hacer este problema es recurrir a la factorización en primos para saber cuántas veces se puede dividir el número en 2 o en 3. La factorización en primos de los números que se están multiplicando son 222=2×3(37) 444=2×2×3×(37) 666=2×3×3×(37) y 888=2×3×4×(37) Así que el resultado de multiplicar 222, 444, 666 y 888 tiene como factorización en primos 222×444×666×888= 2735(37)4. Así que este número se puede dividir entre 2 un total de 7 veces, y se puede dividir entre 3 un total de 5 veces. Concluimos que Chus hizo más divisiones.

Problema 14

Cuando te enfrentas a problemas de este estilo, donde te describen la construcción de listas de números, una buena manera de empezar siempre es escribiendo los primeros números en la lista, para intentar encontrar un patrón que se repita. Si calcular los números en la lista es fácil, puedes llegar a escribir los primeros 15 para estar muy seguro del patrón que encontraste. Observemos que en la lista de este problema los primeros números que aparecen son: 7, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1... Aquí nos damos cuenta que ahora en la lista sólo aparecerán el 4, el 2 y el 1 en ese orden una y otra vez. Así que los primeros 4 números en la lista son 7, 10, 5 y 8, y después los otros 2013 necesarios para llegar al número 2017 son 4, 2 y 1 repetidos muchas veces. Como 2013= (671) ×3, entonces la secuencia 4, 2, 1 se repite 671 veces y el número escrito en la posición 2017 es 1.

Problema 15

Considera que en este problema por cada pregunta que Lulú contesta de manera correcta le suman 8 puntos a su puntaje, mientras que por cada pregunta contestada de manera errónea le restan 6 puntos, como sabemos que obtuvo 0 puntos en total, esto nos dice que la cantidad de puntos que le sumaron fue igual a la cantidad de puntos que le restaron; así que la cantidad de preguntas que contestó correctamente multiplicada por 8 es igual a la cantidad de preguntas contestadas mal multiplicada por 6, llamemos N al total de puntos que obtuvo Lulú contando sólo las preguntas contestadas correctamente.

Por lo dicho anteriormente sabemos que N es un múltiplo de 8 y al mismo tiempo es un múltiplo de 6, por lo cual debe ser un múltiplo del mcm(8,6) (es decir, del mínimo común múltiplo), las factorizaciones en primos de 6 y 8 son 6=2×3 y 8=23, así que mcm(6,8)=(23)3=24, así que los posibles valores de N son los múltiplos de 24, que son: 24, 48, 72, ... Como 72=9×8 y 72=12×6, entonces para que N fuera 72 Lulú tendría que haber contestado 9 preguntas de manera correcta y 12 de manera incorrecta, esto significaría que Lulú contestó al menos 21 preguntas, pero sabemos que la prueba tiene únicamente 20, el mayor valor posible para N es 48, y como 48=6×8, este puntaje querría decir que Lulú contestó 6 preguntas correctas y 8 incorrectas, la mayor cantidad de preguntas correctas que pudo contestar Lulú son 6.

Problema 16

Primero veamos la afirmación de Alan. Si Alan estuviera en el primer o segundo lugar entonces la afirmación “Bueno, al menos no fui el último de nosotros cinco” sería verdadera, pero al estar entre los primeros puestos Alan tendría que haber mentido.
Esto nos dice que Alan no está en primer ni en segundo lugar y como su afirmación debe ser cierta, tampoco está en el último. Alan debe estar en tercer o cuarto lugar, ahora fijémonos en Daniel y Ernesto, si Daniel dijo la verdad entonces Ernesto estaría en el 2do lugar y estaría mintiendo, por lo cual la afirmación “ y Daniel no quedó en el primero” sería falsa; esto querría decir que Daniel quedó en primer lugar, pero entonces tendría que haber mentido, por lo cual la única posibilidad es que Daniel mintió y Ernesto no está en el segundo lugar, como Daniel mintió, entonces está en el primero o el segundo lugar.
Si Ernesto estuviera en el primer lugar, entonces la afirmación “y Daniel no quedó en el primero” sería verdadera y Ernesto habría dicho la verdad, lo que no sería posible de estar en el primer lugar, así que Ernesto no está ni en el primer lugar ni en el segundo, así que debe decir la verdad y Daniel no está en el primer lugar, sino en el segundo lugar.

Por último veamos la afirmación de Beto y supongamos por un momento que es cierta, esto nos dice que Carlos está en el tercer puesto, y como Alan estaba en el tercero o en el cuarto, entonces Alan debería estar en el cuarto; además ya sabíamos que Ernesto tenía que estar en alguno de los últimos tres puestos, por lo cual debería estar en el último puesto sin embargo esto haría que la afirmación de Carlos “Me sorprendió bastante que Alan quedará después de Ernesto” fuera falsa y al estar en tercer puesto Carlos no podría mentir, la afirmación de Beto es falsa y esto hace que Beto esté en el primer puesto (ya que el segundo ya es ocupado por Daniel). Como ya sabemos que Daniel y Beto ocupan los primeros dos lugares, todos los demás deben haber dicho la verdad, por lo cual Carlos dijo la verdad y Ernesto quedó en un mejor lugar que Alan, para que esto se cumpla Alan debe estar en el cuarto puesto y Ernesto en el tercero, los lugares debieron quedar en el siguiente orden: Beto, Daniel, Ernesto, Alan y Carlos.

Problema 17
Este problema se puede resolver de maneras muy diferentes. Particularmente en este libro te contaremos dos de ellas.

Primera Solución: Cuando multiplicamos dos números, el dígito de las unidades del resultado (es decir, el último dígito) depende únicamente por los últimos dígitos de cada uno de los números que multiplicamos. Por ejemplo, toma un número que termine en 2 y otro que termine en 3 (como 12 y 143), y verás que el resultado de multiplicarlos siempre termina en 6, sin importar los números que vayan antes del 2 y del 3. Esto no es raro si te pones a pensar en cómo multiplicas dos números normalmente paso a paso en un problema donde te piden el último dígito de una multiplicación, suele ser útil fijarse únicamente en los últimos dígitos de los factores que estás multiplicando y olvidar el resto de los números.

En este problema cuando multiplicamos los números impares del 1 al 2017 y vemos el último dígito del resultado es lo mismo que ver el último dígito de multiplicar 1,3,5,7,9, 1, 3, 5, 7, 9, … , 1, 3, 5, 7 tantas veces como aparezcan estos dígitos en el último lugar de los números del 1 al 2017, estaremos multiplicando $1\times3\times5\times7\times9=945$ un total de 201 veces (las veces que aparecen estos números como dígitos de unidades desde el 1 hasta el 2010) y luego multiplicaremos el resultado por $1\times3\times5\times7=105$, otra vez nos fijamos sólo en los últimos dígitos y vemos que todos los números que se multiplican terminan en 5, además como $5\times5=25$, si multiplicamos dos números que terminan en 5 el resultado terminará en 5 otra vez, esto nos dice que el resultado de $945\times201\times105$ termina en 5. Así que el resultado de multiplicar todos los impares desde 1 hasta 2017 termina en 5.

Segunda Solución: Para esta solución sólo debes fijarte en dos cosas importantes, primero: estás multiplicando solamente números impares, el resultado de la multiplicación debe ser impar;

segundo: cómo estás multiplicando por 5 en algún momento, el resultado de la multiplicación es un múltiplo de 5. Recuerda que, según los criterios de división, un número es múltiplo de 5 si termina en 0 o 5, además, si termina en 0 el número es divisible entre 2, es decir, es par, nuestra multiplicación al ser múltiplo de 5 y no ser par, debe terminar en 5.

Problema 18

Imagina que en la cafetería favorita de Ceci le dan a cada cliente que quiere un café una cartilla como la siguiente para que especifique el café que quiere; en cada recuadro Ceci debe marcar con una equis el cuadrito que indique la opción que prefiere, y no puede marcar más de uno, porque por ejemplo no puedes preparar un café que tenga leche y al mismo tiempo no, de manera que cuando Ceci haya llenado la cartilla la pasa al mesero y el chef sabe exactamente cómo preparar el café que le han pedido.

Ahora contemos de cuántas maneras exactamente se puede llenar esta cartilla, el primer recuadro se puede llenar de cuatro maneras distintas, ya que hay 4 cuadritos para seleccionar a cuál se le pone la equis, el segundo recuadro se puede llenar de 3 maneras distintas y los tres recuadros del final se pueden llenar cada uno de dos maneras distintas ya que cada uno tiene dos cuadritos (sí o no). Veamos que para que Ceci elija el café que quiere tomar debe llenar todos los recuadros de esta cartilla, no puede dejar uno sin contestar ya que el chef se confundiría y no sabría qué hacer; por el principio multiplicativo la cantidad de maneras distintas de llenar esta cartilla es 4×3×2×2×2=96. En la cafetería se puede tomar café de 96 maneras distintas, por lo cual Ceci pidió un total de 96 cafés ese día.

Problema 19

En este problema lo que haremos será

Tipo 1 ☐	**Pequeño** ☐	**¿Leche?**	**Sí** ☐ **No** ☐
Tipo 2 ☐	**Mediano** ☐	**¿Azúcar?**	**Sí** ☐ **No** ☐
Tipo 3 ☐	**Grande** ☐	**¿Pana?**	**Sí** ☐ **No** ☐
Tipo 4 ☐			

descubrir cuántos cocos había en el centro de la isla antes de que los marineros se fueran a dormir la primera noche. Empezaremos por descubrir cuántos cocos había en el momento en que se despertó el tercer marinero y los separó en tres montones.

Primero descubriremos cuántos cocos le dio cada marinero al mono. Como los marineros le dan al mono lo que sobra después de separar los cocos en tres partes iguales, entonces la cantidad de cocos que le da cada uno no puede ser más que dos, ya que habiendo 3 cocos que “sobren”, estos tres cocos se podrían dividir uno en cada uno de los tres montones y ya no sobrarían. Así que cada marinero le da a lo más dos cocos al mono. Por otro lado, sabemos que el mono recibe cocos tres veces a lo largo de la noche y recibe en total 6 cocos. Como 6=2×3, no queda más opción que pensar que los tres marineros le dieron cada uno dos cocos al mono, ya que de lo contrario habría recibido menos de 6 cocos.

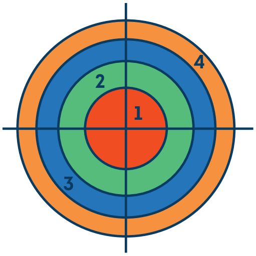
Así que, regresando al tercer marinero, sabemos que cuando se levantó y separó los cocos en tres montones, dio dos cocos al mono y uno de los tres montones lo escondió, dejando dos montones en el centro de la isla. Estos dos montones son los que amanecieron el día siguiente en el centro de la isla, es decir son los 4×3=12 cocos que se reparten al día siguiente.
Así que cada montón que formó el tercer marinero es de 12÷2=6 cocos cada uno. Así que antes que el tercer marinero se despertara, en el centro de la isla habían 3×6+2=20 cocos. Estos 20 cocos son los que dejó el segundo marinero que se levantó por la noche, el segundo marinero al levantarse lo que hizo fue dar al mono dos cocos y separar el resto en tres montones iguales, escondiendo uno y dejando dos en el centro, estos dos montones que dejó en el centro de la isla son los 20 cocos que encontró el tercer marinero al despertarse, así que cada montón tiene 20÷2=10 cocos y esto nos dice que el segundo marinero cuando se despertó encontró 3×10+2=32 cocos.

Estos 32 cocos que encontró el segundo marinero al despertarse fueron los que dejó el primer marinero que se despertó, él también lo que hizo fue regalarle al mono dos cocos y separar el resto en 3 montones iguales, escondiendo uno y dejando dos en el centro, estos dos montones que dejó son un total de 32 cocos, cada montón tiene 32÷2=16 cocos y los cocos que encontró el primer marinero al despertarse fueron 3×16+2=50. Así que el primer día los marineros reunieron 50 cocos.

Problema 20
Como el cuadrado más grande tiene un área de 36, entonces el lado de este cuadrado mide 6, y al medir este lado el doble que el lado de los cuadrados pequeños, entonces el lado de esos cuadrados mide 6÷2=3. Con esto ya tenemos todas las medidas que necesitamos para descubrir el área desconocida. Primero notemos que el rectángulo bajo el cuadrado grande mide 3 de alto y 6 de largo (puesto que estas medidas coinciden con los lados de los cuadrados), así que el área del rectángulo sombreada es 3÷6=18.

Luego, los dos triángulos sombreados dentro de los cuadrados pequeños tienen la mitad del área del cuadrado pequeño. Así que cada triángulo pequeño sombreado tiene un área de (3×3)÷2=9÷2=4.5 Por último los dos rectángulos al lado del cuadrado grande miden 6 de altura y 3 de ancho. Los triángulos sombreados dentro de estos rectángulos miden la mitad del área del rectángulo total. Así que cada uno de estos triángulos sombreados grandes tiene 63÷2=9 de área. Para saber el valor del área total ahora sólo debemos sumar las áreas de cada una de las partes sombreadas que calculamos. Así que el área sombreada es 18+4.5+4.5+9+9=45

Problema 21
El problema nos dice que los círculos



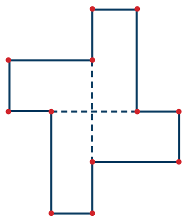
están divididos por las dos rectas en cuatro partes iguales. Esto, por simetría, nos dice que en la siguiente figura las regiones coloreadas del mismo color tienen la misma área. Además, en el problema se nos dice que las regiones señaladas por 1, 2, 3, 4 tienen la misma área, así que concluimos que las cuatro regiones rojas, las cuatro verdes, las cuatro azules y las 4 naranjas tienen todas, la misma área.
Como sabemos que el radio del círculo pequeño es 1, podemos calcular el área de este círculo, que es (1)2(3.1426)=3.1416. Como el círculo pequeño está formado por 4 regiones rojas, entonces el área de una de estas regiones es 4. Ahora veamos que el círculo más grande está formado por un total de 16 regiones, todas ellas con la misma área que una región roja. Así que el área del círculo más grande es 16÷4=4. Si llamamos R al radio del círculo más grande, entonces se debe cumplir que R2=4, lo que quiere decir que R=2.

Problema 22

Para hacer este problema es muy conveniente trazar unas cuantas líneas extra, observa podemos imaginar dos rectas dividiendo a la figura que dibujó Pablito de la siguiente manera; podemos ver que la figura en realidad está formada por cuatro rectángulos que son iguales entre sí, como el área de la figura es 200 cm^2, entonces sabemos que el área de cada rectángulo es un cuarto de esto. Esto quiere decir que el área de un rectángulo de la figura es 200÷4=50 cm^2.

Ahora veamos qué otra cosa sabemos de estos rectángulos, uno de sus lados está formado por uno de los palillos pequeños y otro de sus lados está formado por uno de los palillos largos. Digamos que el palillo más pequeño mide x cm. Como el palillo más largo mide el doble, entonces debe medir ($2x$) cm. Así que el área del rectángulo debe ser $(x)(2x)=2x^2$ y como ya teníamos cuánto vale esta área, entonces sabemos que $2x^2$=50 cm. Resolviendo esta ecuación obtenemos que x=5. Ya tenemos entonces que un palillo corto mide 5 cm y uno largo mide 10 cm. Nos falta únicamente ver que la figura está formada por 8 palillos cortos y 4 largos, por lo cual el perímetro de la figura es (8)(5) cm + (4)(10) cm=80 cm.

Con todos estos problemas he aprendido bastante sobre longitudes y perímetros y espero en un futuro aprender mucho más.



Secretaría de Educación