Principio Fundamental del Conteo

La forma más sencilla y tradicional de contar cosas suele ser con los diagramas de árbol; al final, todo se reduce a sumas y multiplicaciones. Esto lo podemos simplificar con dos reglas:

Regla de la suma. Si una cierta tarea puede realizarse de m maneras de una forma o de n maneras para una segunda, en total la tarea se puede hacer de $m + n$ formas.

Ejemplo 1. Si Luci tiene 5 conjuntos deportivos y tiene 6 vestidos, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir Luci?

Solución. Luci se puede poner un conjunto deportivo **o** un vestido. En total hay $5 + 6 = 11$ formas de vestirse.

Regla del producto. Si una cierta tarea puede realizarse de m maneras diferentes, y para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas diferentes.

Ejemplo 2. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si se dispone de un alfabeto de dos letras: *a* y *b*? (Nota: Son permisibles palabras como *bba*.)

Solución. Consideremos tres casillas: __ __ __, en cada casilla puede ir alguna de las dos letras. Así tendremos que para cada casilla habrá 2 posibilidades y por la regla del producto, habrá pues, 2 x 2 x 2 = 8 palabras distintas.

Ejercicios

1. Hay cinco distintos tipos de tazas y tres de platos en una tienda. ¿De cuántas maneras se puede comprar una taza y un plato?

2. En la tienda del problema anterior hay además 4 diferentes tipos de cucharas. ¿Cuántas maneras hay de comprar una taza, un plato y una cuchara?

3. En el país de las maravillas hay tres pueblos *A, B*, y *C*. Existen seis caminos de *A* a *B*, y cuatro de *B* a *C*. ¿De cuántas formas se puede ir desde *A* hasta *C*?

4. En el país de las maravillas se construyó un nuevo Pueblo, llamado *D*, y se construyeron también 3 caminos de *A* a *D* y 2 de *D* a *C*. ¿cuántas formas hay ahora para ir de *A* a *C*?

5. Volvemos a la tienda que tiene cinco distintos tipos de tazas, tres de platos y cuatro de cucharas. ¿De cuántas maneras se pueden comprar dos cosas de distintos tipos (por ejemplo, una cuchara y un plato)?
6. Durante una campaña local, ocho candidatos republicanos y cinco demócratas se nominan para presidentes del consejo electoral.
   a) Si el presidente va a ser alguno de los candidatos, ¿Cuántos posibles presidentes hay?
   b) ¿Cuántas posibilidades hay para que una pareja de candidatos (uno de cada partido) se oponga entre sí en la elección final?

7. ¿Cuántas maneras diferentes hay de llenar una planilla de pronósticos deportivos? (En la planilla uno debe predecir los resultados de 13 juegos de fútbol, indicando ya sea la victoria para alguno de los equipos o un empate).

8. ¿Cuántos partidos hay en un torneo de eliminación simple en el que participan *n* equipos (para cada partido uno sale y el otro pasa a la siguiente etapa)?

9. ¿Cuántas maneras hay de fabricar una bandera tricolor con tres tiras horizontales del mismo tamaño, si tenemos seis de esas tiras de colores distintos?

10. ¿Cuántas placas de automóvil distintas se pueden hacer si una placa de auto consta de 3 letras y 4 dígitos?

11. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintos impares hay? ¿Cuántos son pares?

12. Cinco estudiantes se escogen al azar de un grupo de 10 para formar una fila. ¿Cuántas filas diferentes se pueden formar?

13. En una carrera compiten cinco corredores *A; B; C; D; E*. Si nunca hay empates, ¿En cuántos resultados *A* le gana a *B*?

14. Seis personas *A; B; C; D; E; F* se sientan en torno a una mesa redonda.
    ¿Cuántas posiciones circulares diferentes hay? (Dos posiciones se consideran iguales si una se puede obtener de otra por rotaciones, Por ejemplo: ABCDEF es igual a FABCDE).

Permutación y Combinación

El número P_n de distintas formas en que se pueden ordenar *n* objetos es n!. Cada una de las listas ordenadas que se forman con los *n* objetos se llama permutación (de los objetos). Tenemos entonces que el número de permutaciones de n objetos es $P_n = n!$.

Ejemplo 3. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas numeradas del 1 al 5?

Solución. En la primera silla, se pude sentar cualquiera de las 5 personas. En la segunda se sentará alguna de las 4 que quedan. En la tercera habrá 3 personas que tengan posibilidades de sentarse. En la cuarta solo hay dos posibles personas para sentarse y en la última silla se sentará la persona que faltaba por sentarse. Así, habrá: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5! = 120 posibles formas de sentar a las 5 personas.

El número de colecciones (en las que el orden no importa) con *r* elementos que se pueden seleccionar dentro de un conjunto de *n* elementos es:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-(r-1))}{r!}$$

y este número se le llama combinación de *r* en *n*.

Ejemplo 4. De un grupo de 5 estudiantes, quiere elegir a una comisión de 3, para que juntos visiten un museo. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

Solución. Primero veamos cuantos grupos distintos de tres personas podemos hacer. La primera persona del grupo puede ser cualquiera de los 5 estudiantes. La segunda persona del grupo puede ser cualquiera de los 4 restantes y la última persona del grupo, puede ser cualquiera de las tres personas que quedan. Entonces, habrá 5 x 4 x 3 = 60 grupos de 3 personas. Pero notemos que si Pedro-Ana-Juan, es una comisión, es la misma que Ana-Juan-Pedro, Pedro-Juan-Ana, etc. Entonces, hemos contado en total P_3 = 3! = 6 veces cada comisión, por lo que habrán 10 comisiones distintas en total.

La diferencia básica entre permutación y combinación es que para la permutación el orden sí importa, es decir, que cuenta todos los órdenes distintos de una misma lista; para la combinación, por el otro lado, el orden no importa, es decir, únicamente importa la lista y no sus órdenes distintos.

Ejercicios

15. ¿Cuántos paralelepípedos rectangulares distintos se pueden construir, para los cuales la longitud de cada arista es un entero del 1 al 10?

16. Hay 4 parejas casadas en un club. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas de tal manera que no haya un matrimonio incluido en el comité?

17. Se tienen 8 piezas de ajedrez: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 2 peones, uno de cada color. ¿De cuántas formas pueden acomodarse las 8 piezas en una columna de manera que no queden dos piezas del mismo color juntas?

18. Una persona tiene 6 amigos. Cada noche, durante 5 días, invita a cenar a un grupo de 3 de ellos de modo que el mismo grupo no es invitado dos veces. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

19. En un libro de 2018 páginas se tuvieron que reescribir todos los números de las páginas. ¿Cuántos ochos se escribieron?

20. De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

21. En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. Se quiere formar una fila con todas ellas. ¿De cuántas formas distintas puede quedar la fila?

22. ¿Cuántas manos de póker tienen tercia exactamente (es decir que no sea full ni póker)? (Un mazo de póker tiene 52 cartas y cuatro palos distintos)

23. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados? (Considere a los lados del polígono como diagonales)

24. En una ciudad hay dos ríos paralelos R y S unidos por 10 calles y separados por otras cinco calles, tal que forman una cuadrícula. ¿Cuántas rutas de autobús se pueden diseñar del río R al río S si durante el recorrido total el autobús debe dar menos de cinco vueltas y no debe pasar dos veces por un mismo tramo?

25. Supongamos que queremos formar 5 pilas de cajas con las siguientes condiciones: cada pila debe tener entre una y cinco cajas. Además, cada pila no debe tener más cajas que la pila de su izquierda. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

26. (a) ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?
    (b) ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de n x n?

27. ¿Cuántos números de hasta 9 cifras que cumplen que la suma de sus cifras es 9 hay?