El Teorema de Pitágoras y tú

Eugenio *ugesaurio* Flores

Editorial Dinosaurio es un proyecto de CARMA,
Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas.

Encuentra todo el material de Editorial Dinosaurio en editorialdinosaurio.blogspot.mx

El Teorema de Pitágoras y tú
Fue creado para CARMA/KaanBal y
la Red de Talleres de Olimpiada de CARMA/KaanBal

No olvides darle *like* a nuestra página de facebook.com/EditorialDinosaurio

Puedes apoyar la causa de Editorial Dinosaurio haciendo un donativo desde la página o haciendo un depósito desde cualquier tienda Oxxo.

Puedes hacer tu donativo en cualquier tienda Oxxo

(recuerda que te cobran comisión de 7 pesos)

4152 3130 3600 1399

BBVA Bancomer

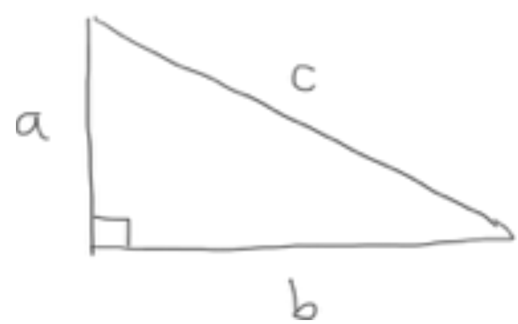
El Teorema de Pitágoras y tú

Eugenio *ugesaurio* Flores para Editorial Dinosaurio

octubre, 2014

El Teorema de Pitágoras es un resultado padrísimo de las matemáticas por varias razones. Primero, podría parecer el primer resultado que no es exactamente evidente: la semejanza de triángulos, por ejemplo, es una idea intuitiva que surge de la proporción, casi todos los resultados de ángulos en triángulos o entre paralelas se siguen de ecuaciones bastante sencillas. El Teorema de Pitágoras no es así, es una relación que podría sorprender a muchos porque no es evidente a la vista y no es en absoluto intuitivo: requiere ingenio y habilidades de cortar y pegar muy desarrolladas.

Casi todos pueden recitar el teorema como "*a* cuadrada más *b* cuadrada igual a *c* cuadrada". Otros lo pueden recitar como "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Esa es, más o menos, la manera en que lo planteo Euclides en sus *Elementos*. Antes de adentrarnos en la historia y algunas demostraciones, queremos estar seguros que nos entenderemos con la notación. El Teorema de Pitágoras es un resultado de geometría sobre triángulos rectángulos, en específico, sobre las longitudes de sus lados.



Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo que mide exactamente 90º. Todos los triángulos rectángulos tienen un lado más grande que los otros dos, a ese lado lo llamamos *hipotenusa*; a los otros dos lados los llamamos *catetos*[1]. En el imaginario colectivo, a los lados les ponemos valores de *a, b, c,* pero debe quedarte claro que podríamos poner cualquier otra letra que queramos y el resultado seguiría cumpliendo.

---

[1] En inglés, los catetos se llaman *legs*, es decir, piernas.

Breve Historia

La propiedad que actualmente conocemos como Teorema de Pitágoras era conocida en la antigüedad muchos años antes del nacimiento de Pitágoras (569 a.C. - 475 a.C.). No solo los griegos ya conocían el resultado, egipcios y chinos lo conocían también. Así lo demuestran algunos documentos históricos como códices y pergaminos.

La evidencia más antigua que poseemos viene de aproximadamente 1,000 años antes de nuestra era, en una tableta de arcilla de los antiguos babilonios. Además de una serie de casos específicos, viene una demostración para el caso cuando ambos catetos son iguales.

En las imágenes no solo encontramos ya evidencia de su uso para resolver problemas sino, incluso, intentos por generalizar esta propiedad para cualquier triángulo rectángulo. Es necesario que tengas en mente que la notación algebraica como la conocemos hoy es bastante reciente, hasta hace un par de siglos, las matemáticas se hacían casi todas "habladas": se describían los procesos, se usaban expresiones como "un número", "otro número" en lugar de nuestros modernos *x, y*.

¿Por qué, entonces, se llama Teorema de Pitágoras si Pitágoras no lo "inventó"[2]? Porque Pitágoras fue el primero en construir una demostración que podríamos aceptar hoy en día, o al menos eso creemos todos. En realidad no sabemos mucho sobre Pitágoras o sobre su demostración; no sabemos, siquiera, si él demostró el teorema o fue alguno de sus alumnos pues entonces —y quizás todavía hoy— era frecuente que se considerara a los maestros como autores de las obras de sus alumnos; no tenemos una prueba que identifiquemos como *la prueba de Pitágoras*. Así, casi todo lo que sabemos viene de sus discípulos, de otros griegos que citan su trabajo, o sencillamente de leyenda.

[2] ¿Las matemáticas se inventan o se descubren? La discusión no es una sencilla y tiene detrás serios argumentos epistemológicos y filosóficos sobre nuestra manera de ver la realidad. Queremos decir que Pitágoras no fue ni el primero en reconocer esta relación matemática, ni el primero en enunciarla.

Sin embargo, tiene perfecto sentido que, aunque la relación se haya conocido años atrás, la primera prueba llegue hasta los griegos: Euclides (325 a.C. - 265 a.C.), un griego, es el primero que hace un esfuerzo en sistematizar y axiomatizar la matemática.

En los elementos, Euclides planteó y demostró dos proposiciones relativas al Teorema de Pitágoras: la proposición I.47 y la proposición I.48. La segunda es el recíproco del Teorema, es decir, que si un triángulo tiene tres lados que cumplen la relación pitagórica, entonces el triángulo debe ser rectángulo. A mucha gente se le olvida —o no sabe— que el teorema tiene dos partes.

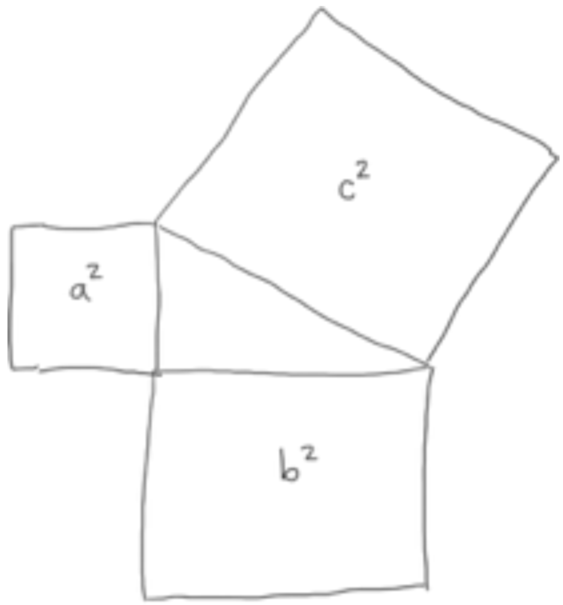
Euclides lo planteó así:

> Proposición I. 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Es decir, el teorema desde sus orígenes ha estado en términos de áreas, aunque hay muchas demostraciones que no usan la idea de área. La demostración de Euclides aparece en nuestra recopilación de demostraciones pero no será la primera que veamos pues no pensamos que sea la más sencilla o intuitiva pero es una realmente hermosa.

16 maneras distintas de probar el Teorema de Pitágoras

Una de las imágenes más comunes para enseñar el Teorema de Pitágoras es esta:



que sirve bastante bien para esquematizar pero por sí sola no deja ver que dicha relación sea cierta: si queremos comprobar que la suma del área de los dos cuadrados más pequeños es igual al área del cuadrado más grande tendríamos que, en principio, pensar en casos particulares[3], darle medidas a los lados y hacer los cálculos.

Esto es, creemos, lo que sucede en la mayoría de los salones de clase: la maestra o el maestro hacen este dibujo en el pizarrón para mostrar y a la vez para demostrar el teorema. Lo que sigue es una serie de ejercicios donde verificamos que el teorema cumple, por ejemplo, contando cuadritos de una cuadrícula.

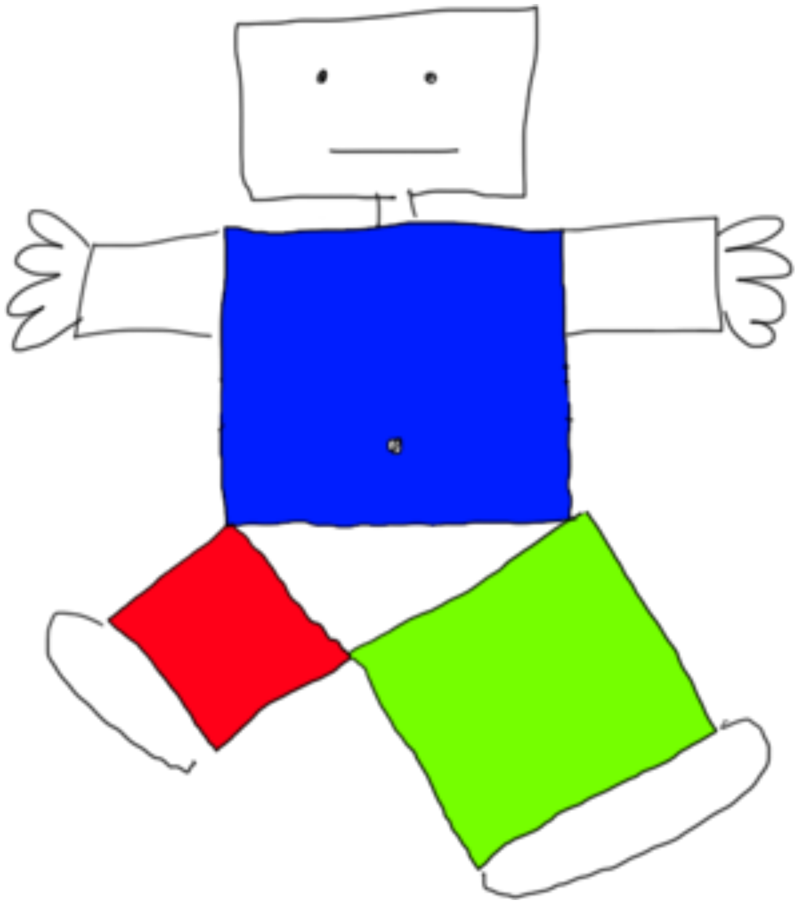
Claro que la relación se va a cumplir porque, si el teorema es cierto para *cualquier* triángulo, debe ser cierto para *un* triángulo en específico, sobre todo si el triángulo que te dan tiene lados 3, 4, 5. ¿Eso demuestra que va a cumplir para cualquier triángulo?

Como técnica de memoria, el dibujo puede ser muy útil: está puesto en términos de áreas de cuadrados, es decir, de números elevados al cuadrado. Además, debe ser claro que ninguno de los pequeños puede ser igual a la suma de los otros dos. Para ayudar todavía más a la memoria, este famoso esquema lo conocemos como “los boxers de Pitágoras”[4]:

---

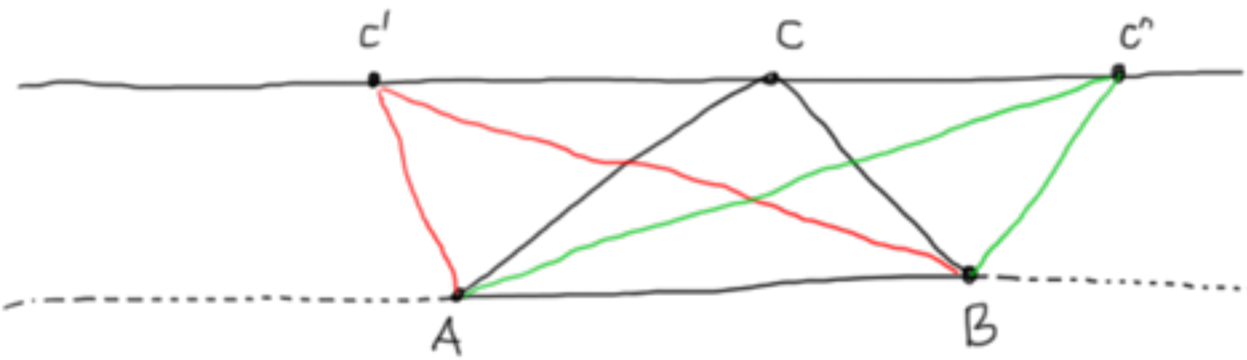
[3] ¿Existe tal cosa como un “triángulo general”? ¿Son todos los triángulos ejemplos particulares?

[4] En inglés, al dibujo se le conoce como “la silla de la novia” o “la cola de pavo real”. Podemos imaginarnos al pavo pero la novia y su silla debe ser algo cultural.



Por supuesto, hay muchísimas pruebas que parten de este dibujo pero el dibujo por sí solo no constituye una prueba; es más, la demostración de Euclides utiliza el dibujo. Si tú, como nosotros, nunca quedaste satisfecho con los boxers de Pitágoras para entender por qué el Teorema cumple, aquí hemos recopilado 27 demostraciones distintas, algunas muy gráficas y otras más algebraicas.

En las pruebas de manipulación de áreas utilizamos dos estrategias en general: (1) rotar o reflejar triángulos, (2) mover un vértice sobre una paralela. Estas dos operaciones dejan el área del triángulo igual. Creemos que el caso de girar la figura no requiere mayor explicación pero vamos a ejemplificar la segunda técnica:



Como puedes ver, la base nunca se altera. Además, como la distancia entre las paralelas es siempre la misma, la altura no cambia tampoco. Como base y altura son siempre iguales, el área tampoco cambia. Es decir, en el dibujo, el área de los triángulos *ABC*, *ABC*' y *ABC*'' es la misma. Todos tienen *AB* como base y la altura es la misma pues la distancia entre las paralelas es siempre la misma.

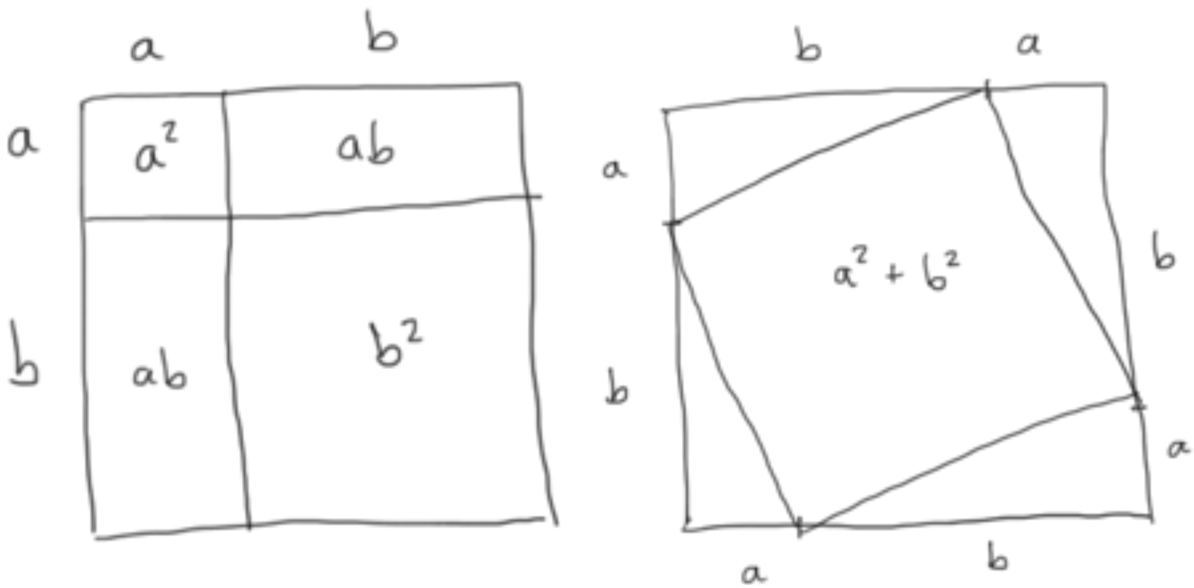
Existen cientos si no es que miles de maneras de demostrar el teorema; encontrar nuevas maneras de demostrar el Teorema de Pitágoras es prácticamente un pasatiempo matemático por lo que podrías encontrar muchas otras maneras si buscas en libros o en internet. No pretendemos asumir autoría de ninguna de las pruebas que aquí presentamos, aunque algunas de ellas hemos debido encontrarlas nosotros mismos como ejercicio, sabemos que son pruebas que ya eran conocidas; haremos un esfuerzo por reconocer a los autores de cada prueba.

Muchas de las pruebas que aquí aparecen las leímos por primera vez en la hermosa página Cut The Knot de Alex Bogomly que recomendamos ampliamente.

Al terminar las 16 pruebas, presentamos dos ejemplos de dónde se aplica el Teorema de Pitágoras, uno de la vida real, otro de las matemáticas.

Prueba 1: Usando el binomio al cuadrado perfecto

Esta demostración es muy gráfica y muy agradable a la vista. En esta y casi todas las demostraciones por áreas, usamos que, en un triángulo rectángulo, el área se puede calcular usando como base y altura a los dos catetos. Primero, debemos considerar un cuadrado cuyo lado mide $a + b$, imagen muy usada para mostrar el binomio al cuadrado perfecto cuando empezamos a aprender álgebra.



La imagen encuentra el área del cuadrado grande, que es $(a + b)^2$, como suma de áreas de cuadrados y rectángulos más pequeños, trazando dos líneas paralelas, es decir

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

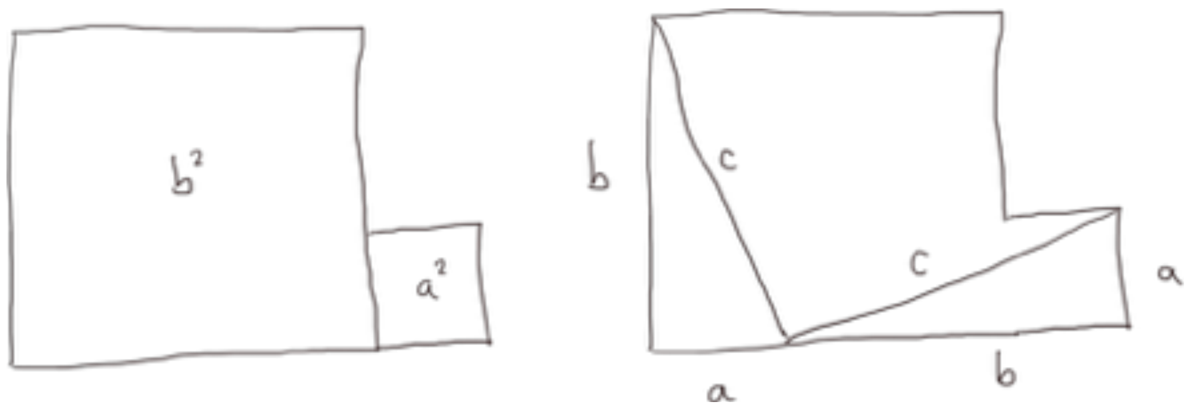
Esa área tiene que ser igual sin importar cómo hagamos la división. En lugar de hacer líneas paralelas a los lados, unimos los segmentos de los lados como en la figura de la derecha. El área total debe ser la misma, pues sigue siendo un cuadrado de lado $a + b$. Si juntamos dos triángulos de la figura de la derecha, obtenemos un rectángulo de la figura de la izquierda. Por lo tanto, el cuadrado del centro debe ser igual a la suma de los otros dos cuadrados; solo hace falta que te fijes que el lado del cuadrado grande mide lo mismo que la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Tampoco es complicado demostrar que lo que queda en el centro es, de hecho, un cuadrado. Primero, tiene sus cuatro lados iguales, pues los cuatro triángulos son iguales también. Además, en sus vértices coinciden los dos ángulos que no son el recto, así que cada ángulo debe medir 90º.

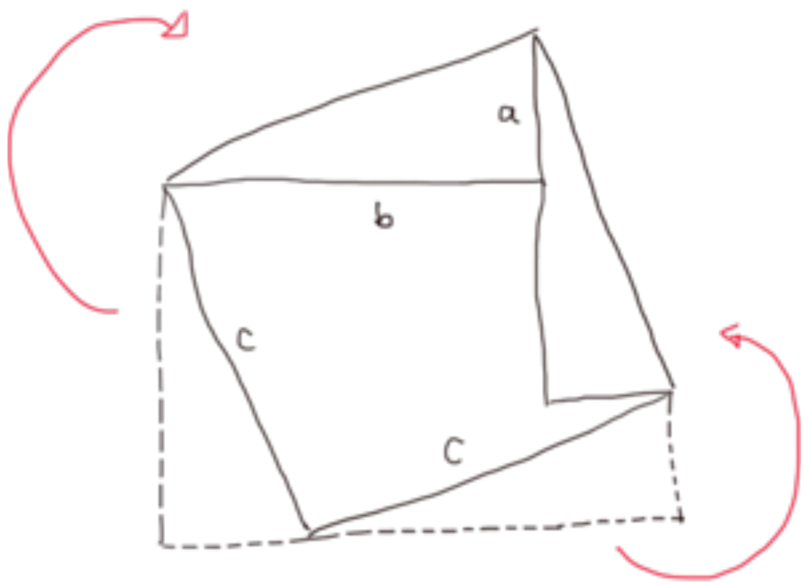
Prueba 2:
Reacomodando triángulos

Esta demostración parte de dos cuadrados, uno junto al otro, y la idea es recortarlos de modo que, al reacomodarlos, obtengamos otro cuadrado más grande. Por supuesto que eso es lo que uno pensaría que hacen todas las demostraciones del Teorema de Pitágoras.

Tenemos dos cuadrados de lado *a, b,* y vamos a recortar un par de triángulos como se muestra aquí:



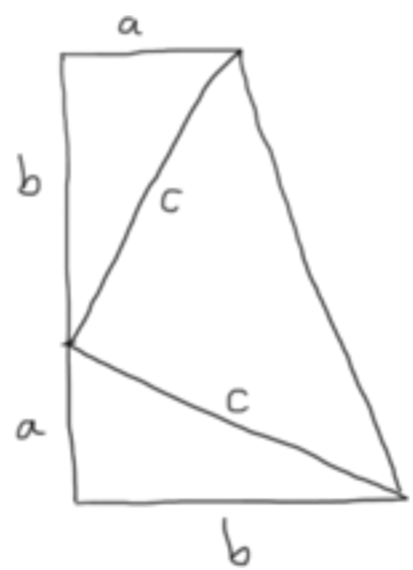
El siguiente paso consiste en girar los dos triángulos para completar el cuadrado de lado *c* que ya alcanza a medio asomarse en la figura:



No es complicado demostrar que la figura que queda es un cuadrado: tiene todos sus lados iguales a *c* y cada uno de sus ángulos mide 90º.

Prueba 3:
Área de un trapecio

Esta prueba es invención de J. A. Garfield, el vigésimo presidente de los Estados Unidos. Como en muchas de estas demostraciones de áreas, lo que vamos a hacer es calcular el área de dos maneras distintas: la primera, como suma de área de triángulos, la segunda, usando la fórmula del área de un trapecio.



Formamos un trapecio con dos triángulos rectángulos iguales. Obtenemos un tercer triángulo rectángulo. Usando la fórmula del área de un trapecio, el área es un medio de la suma de las bases por la altura:

$$1/2\ (a + b)(a + b) = 1/2\ a^2 + ab + 1/2\ b^2$$

Si calculamos las áreas de cada triángulo individual, lo que tenemos es:

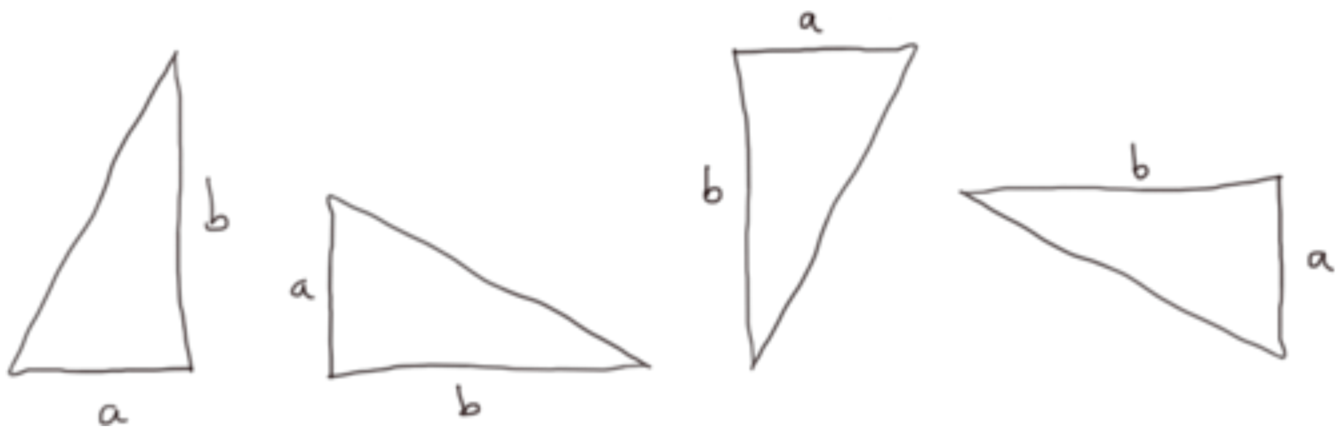
$$1/2\ ab + 1/2\ ab + 1/2\ c^2$$

Igualando las áreas, multiplicando por 2 y simplificando, obtenemos el Teorema de Pitágoras.

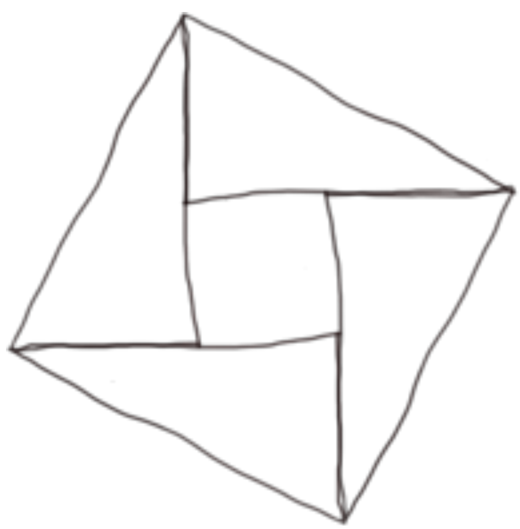
Esta demostración es bastante parecida a la #1, de hecho, esta figura es “la mitad” del cuadrado de la primera prueba.

Prueba 4:
Pegando cuatro triángulos iguales

Partimos nuevamente de nuestro triángulo básico con lados *a, b, c*, y hacemos tres copias: una rotada 90º, otra rotada 180º, la última rotada 270º.



Vamos a pegar estos cuatro triángulos para formar un cuadrado más grande, de lado *c*, con un hueco en medio.



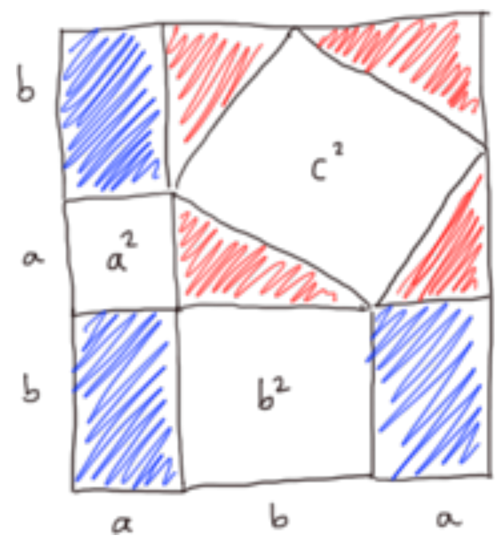
El hueco de en medio es un cuadrado de lado de lado (a - b). Luego, si sumamos las áreas tenemos:

$$c^2 = 2ab + (a + b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

que es lo que estamos buscando.

Prueba 5:
Encerrar los calzones de Pitágoras

Esta prueba utiliza el dibujo de "los bóxers de Pitágoras" pero lo encerramos en un rectángulo. La prueba no es tan distinta de la #1 —incluso el dibujo es parecido.



Primero, podemos ver que el rectángulo que encierra la figura tiene dimensiones 2b + a y 2a + b. Eso nos permite calcular su área directamente:

$$(2b + a)(2a + b) = 2a^2 + 2b^2 + 5ab$$

Sin embargo, también podemos calcular el área sumando las áreas interiores. Tenemos los cuadrados de área a^2, b^2 y c^2. Además, tenemos tres rectángulos de área ab, y cuatro triángulos de área 1/2 ab. En total,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 5ab$$

Si igualamos estas dos expresiones y simplificamos, obtenemos

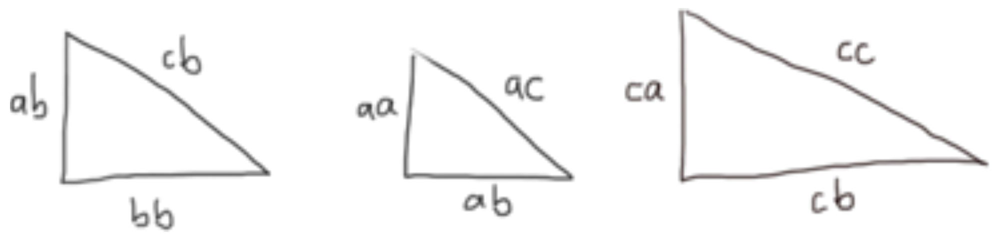
$$2a^2 + 2b^2 + 5ab = a^2 + b^2 + c^2 + 5ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

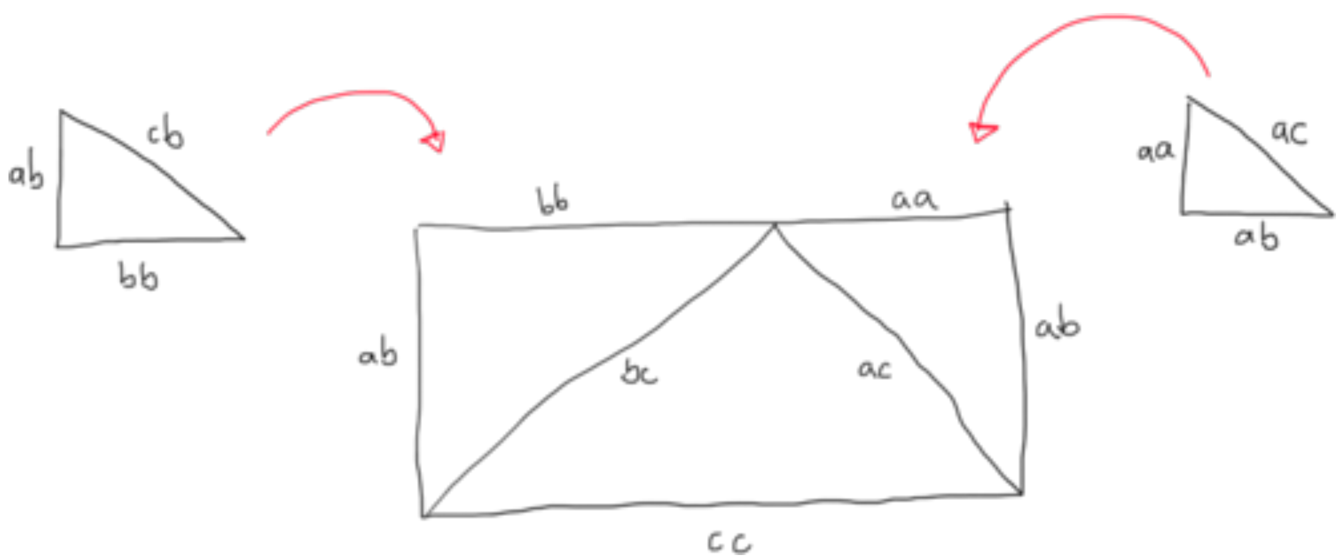
que es nuestro teorema.

Prueba 6:
Usando tres triángulos semejantes

A partir de nuestro tradicional triángulo con lados *a, b, c*, vamos a crear otros tres triángulos semejantes multiplicando sus lados por *a,* por *b*, y por *c*, respectivamente. Luego, los vamos a acomodar de una manera que sea útil para nuestros fines.



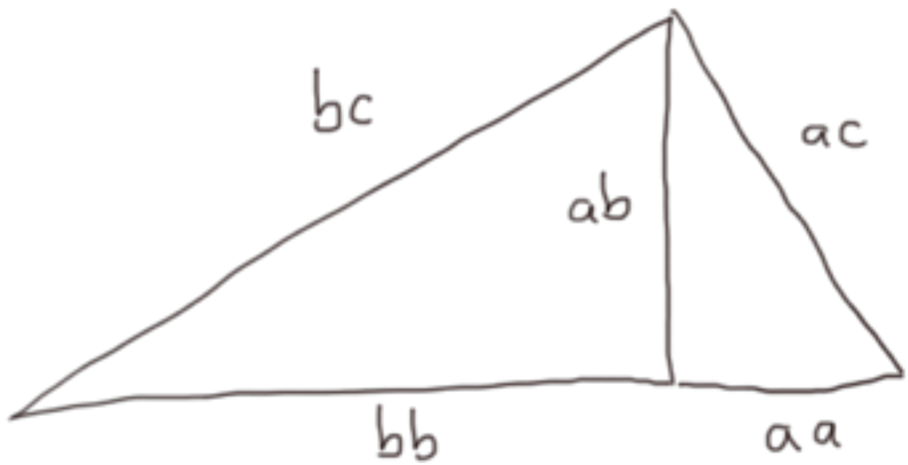
Como los triángulos tienen algunos lados iguales, vamos a poder "pegar" uno sobre el otro. Lo hacemos así:



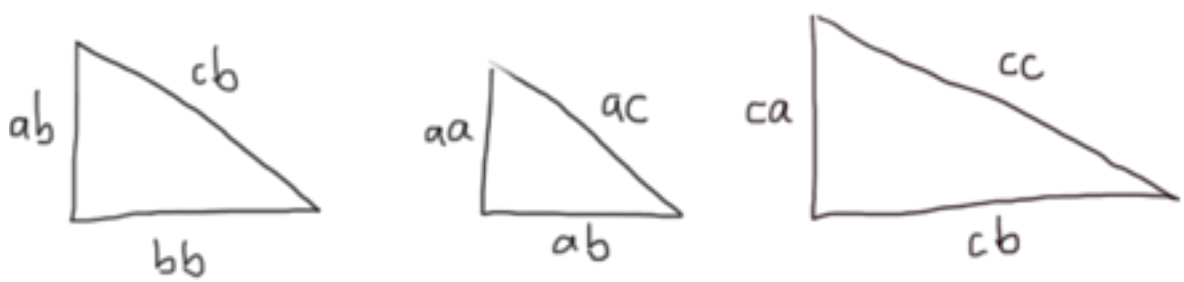
Lo que nos queda es un rectángulo —demostrar que es un rectángulo no debe ser complicado— por lo que los lados opuestos deben ser iguales. Como vemos en la figura, el lado de arriba mide *bb* + *aa* y el lado de abajo mide *cc*.

Prueba 7:
Usando dos triángulos semejantes

Teniendo en mente los tres triángulos de la demostración anterior, esta vez solo vamos a necesitar dos de ellos:



Cuando pegamos de esta manera nuestros dos triángulos, obtenemos de nuevo un triángulo rectángulo, semejante al triángulo original, pues tiene dos lados proporcionales. Por lo tanto, el tercer lado también debe ser proporcional y medir, exactamente, *cc*.



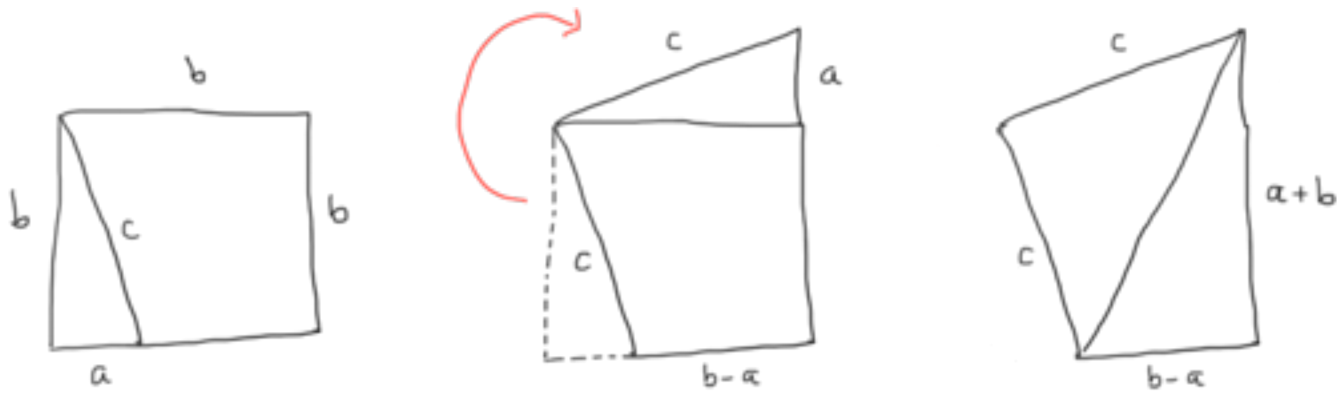
Luego, el lado más grande lo podemos expresar de dos maneras iguales:

$$aa + bb = cc.$$

Esta demostración es, aunque de manera mucho muy resumida y construida de manera que sea más sencillo, la misma idea que usamos cuando trazamos la altura y usamos semejanza, que será una demostración más adelante.

Prueba 8:
Con un cuadrado de lado b

Esta es otra demostración recortando triángulos y calculando el área de dos maneras distintas. Empezamos con un cuadrado de lado *b* al que le vamos a recortar uno de nuestros triángulos de lados *a, b, c*. Como *b* es el cateto más grande, podemos hacer esto sin problema. El triángulo lo vamos a pegar "arriba", siempre cuidando que las longitudes de los lados coincidan.



La figura que resulta está formada por dos triángulos rectángulos unidos por la hipotenusa. Uno de ellos tiene catetos iguales de longitud *c*, el otro tiene catetos $a + b$ y $b - a$.

Como la figura era originalmente un cuadrado de lado *b*, su área debe ser b^2. Por otro lado, si calculamos el área de los dos triángulos y la sumamos, obtenemos

$$b^2 = 1/2\ c^2 + 1/2\ (a + b)(b - a)$$

$$b^2 = 1/2\ c^2 + 1/2\ b^2 - 1/2\ a^2$$

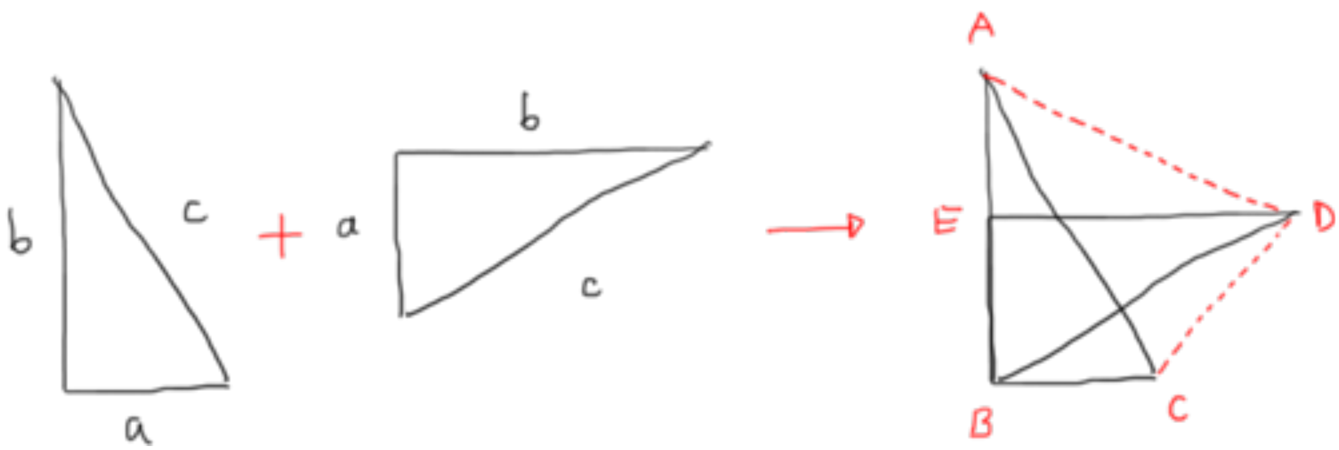
Simplificando y multiplicando ambos lados por 2, tenemos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

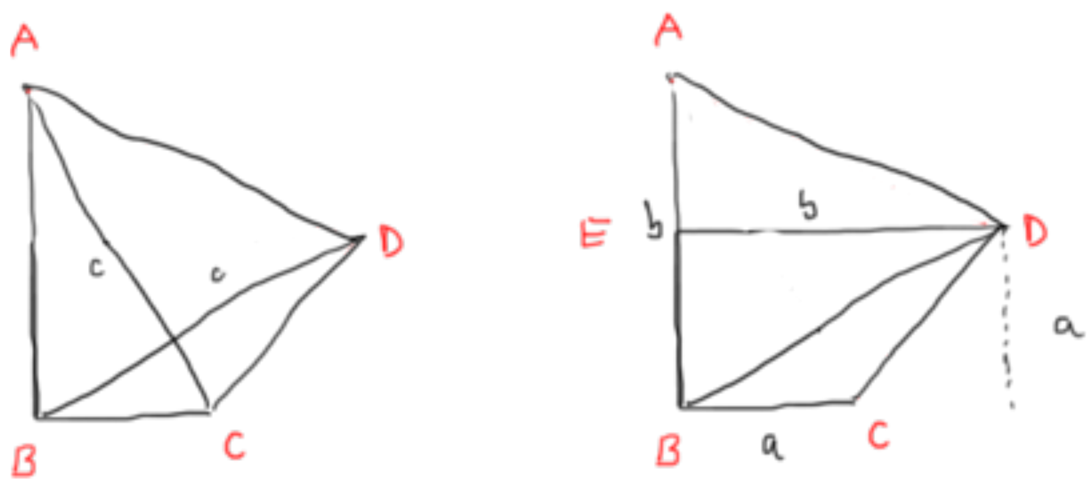
que es nuestro amigo teorema.

Prueba 9:
Un cuadrilátero con diagonales perpendiculares

Para esta prueba, empezamos con dos copias de nuestro triángulo, uno girado 90º. Los pegamos de una manera que podamos calcular el área de dos maneras distintas:



El cuadrilátero *ABCD* tiene dos diagonales perpendiculares y cada una de ellas mide *c*. Entonces, su área es 1/2 c^2.



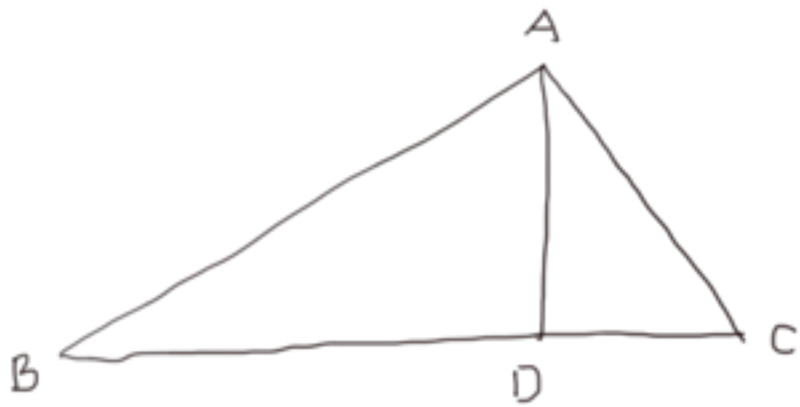
Por otro lado, está formado por dos triángulos: el triángulo *BCD* y el triángulo *ABD*. En el triángulo *ABD* podemos usar *AB* como base y *ED* como altura, ambas líneas miden *b*; en el triángulo *BCD* usamos *BC* como base y la altura desde *D*, ambas líneas miden *a*. Tenemos:

$$1/2\ c^2 = 1/2\ a^2 + 1/2\ b^2$$

que es la relación que buscamos.

Prueba 10:
Trazando la altura y usando semejanza

Esta es probablemente una de las demostraciones más tradicionales que permite dejar tranquilos a los que desean más formalidad en la prueba y menos dibujos. La idea es trazar la tercer altura —pues dos de los lados ya son alturas— y usar las razones de semejanza de manera útil.



Llamamos *A, B, C* a los vértices del triángulo y *AD* es la tercera altura. Los triángulos *ABD* y *CAD* son semejantes entre sí y semejantes al triángulo *CAD*, pues tienen los tres ángulos iguales. Obtenemos las siguientes razones:

$$AC / BC = DC / AC \qquad AB / BC = DB / AB$$

que podemos reescribir como

$$AC \cdot AC = DC \cdot BC \qquad AB \cdot AB = BC \cdot DB$$

si sumamos estas dos expresiones, obtenemos

$$AC \cdot AC + AB \cdot AB = DC \cdot BC + BC \cdot DB = BC\,(DC + DB) = BC \cdot BC$$

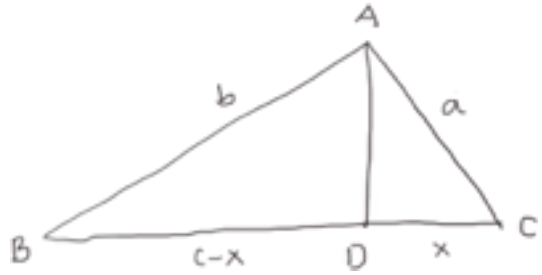
que es la relación que buscamos.

Cuando se trabaja con semejanzas, nunca hay que perder de vista la relación que se busca. De esta manera, elegir las razones se vuelve más un paso intuitivo y menos un paso mágico. Fíjate, por ejemplo, que nunca incluimos el segmento *AD* dentro de las razones, pues eso simplemente añade una nueva incógnita que no ayuda a la solución.

Prueba 11:
Altura, semejanzas y áreas

Esta demostración inicia igual que la anterior trazando la altura y señalando las razones de semejanza. Incluso utiliza las mismas razones de semejanza pero las manipula de maneras distintas y concluye con un argumento de áreas.

Por comodidad, vamos a nombrar las longitudes de los lados de la manera tradicional *a, b, c*. Además, llamamos *x* al segmento *DC*.



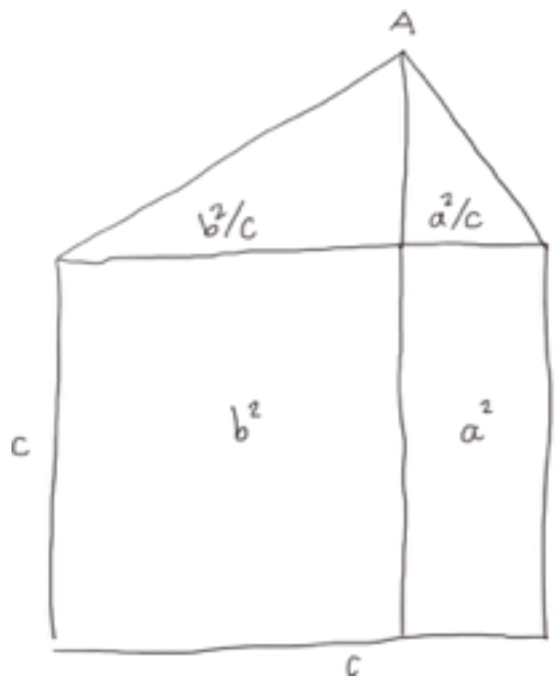
Nuestras relaciones de semejanza se transforman en las siguientes:

$$a / c = x / a \qquad b / c = (c - x) / b$$

que convertimos en

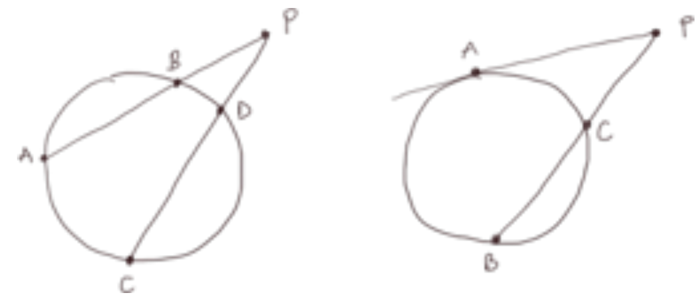
$$x = a^2 / c \qquad c - x = b^2 / c$$

Para concluir, trazamos un cuadrado de lado c como se muestra en la figura. El área total debe ser c^2. Sin embargo, podemos ver que tenemos dos rectángulos: uno de área b^2 y otro de área a^2, que concluye la demostración.



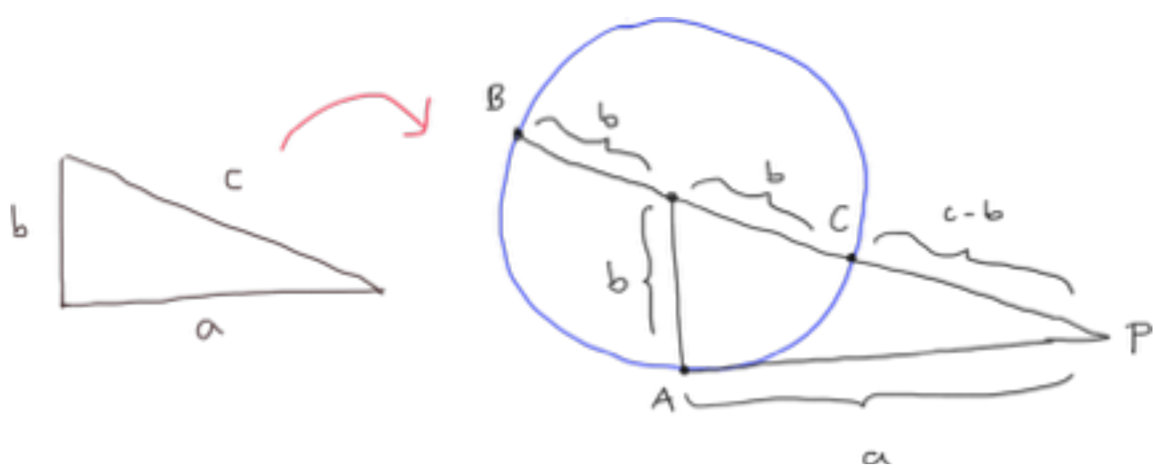
Prueba 12:
Usando potencia de un punto

Esta demostración es increíblemente sencilla si conoces la potencia de un punto exterior a una circunferencia. El resultado pone en relación el producto de dos segmentos desde un punto exterior hacia una circunferencia y se demuestra de manera no tan complicada usando semejanza.



En la figura de la izquierda, la potencia de *P* es *PB* · *PA* = *PD* · *PC*. Podemos imaginar un caso particular donde una de las rectas es tangente a la circunferencia, como en la figura de la derecha. En ese caso, la potencia de *P* es *PA* · *PA* = *PC* · *PB*.

Podemos pensar en meter nuestro amigo triángulo de lados *a, b, c* dentro de un círculo de radio *b*, de modo que el lado que mide *a* sea tangente al círculo. Así, uno de los vértices es tangente a la circunferencia, uno queda fuera y el tercero coincide con el centro.



Si llamamos *P* al vértice que queda fuera de la circunferencia, *C* al punto donde la hipotenusa corta a la circunferencia y *A* al vértice tangente, la potencia de *P* es *PA* · *PA* = *PC* · *PB*. Sustituyendo por los valores que conocemos, tenemos

$$a \cdot a = (c - b)(c + b)$$

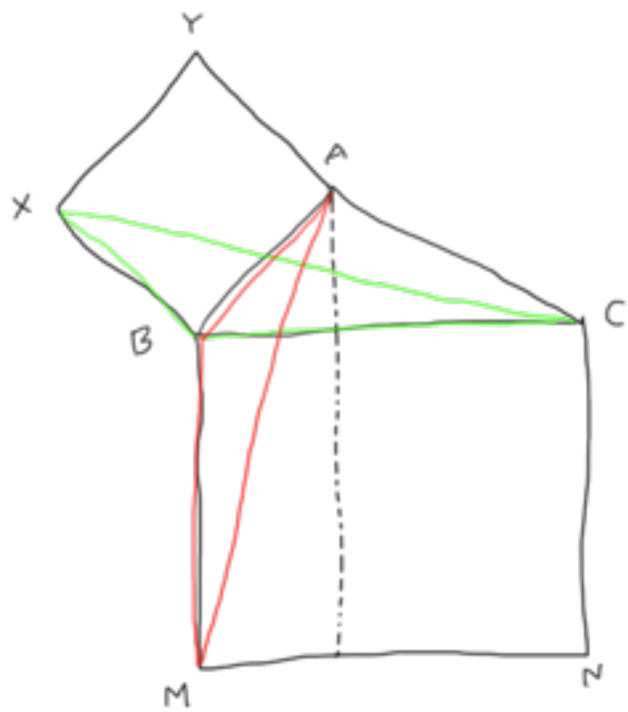
$$a^2 = c^2 - b^2$$

que implica nuestro resultado.

Prueba 13:
La prueba de Euclides

Esta es la prueba que ofreció Euclides en sus Elementos. Vamos a empezar del dibujo de “los bóxers de Pitágoras”, encontrar dos triángulos congruentes y luego mover uno de sus vértices sobre líneas paralelas, de modo que su área sea igual.

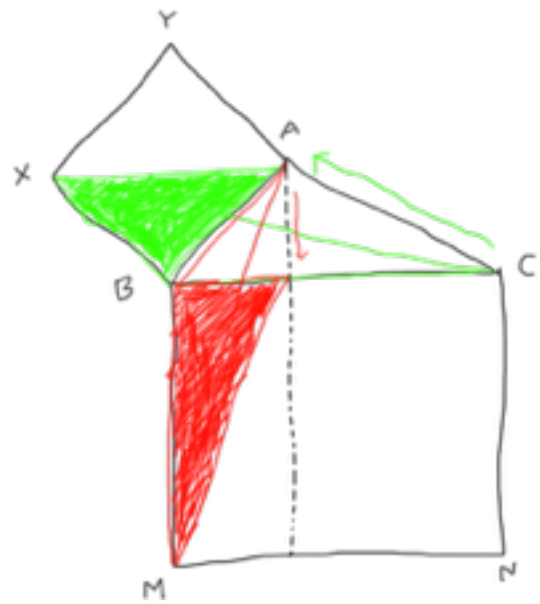
Vamos a mostrar aquí el procedimiento con uno de los cuadrados pequeños, ya que el otro cuadrado es idéntico.



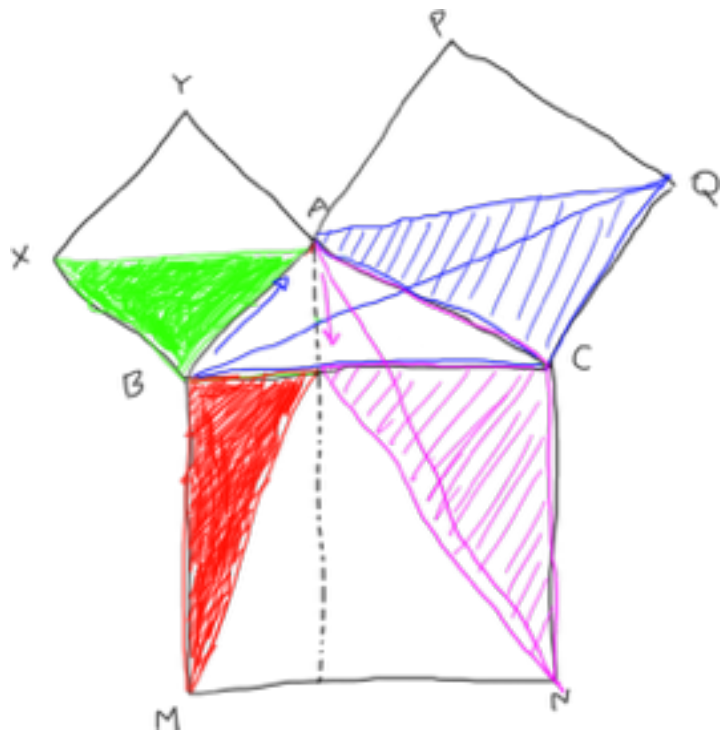
Como primer paso, queremos mostrar que los triángulos *ABM* y *XBC* son iguales. Veamos que *BC* = *BM* porque son lados del mismo cuadrado; también, *XB* = *AB*, por la misma razón. Además, el ángulo *ABM* es igual al ángulo *XBC*, pues ambos son el ángulo *ABC* más un ángulo recto. Por lo tanto, los dos triángulos son congruentes —es decir, iguales— y tienen la misma área.

Antes del siguiente paso, veamos que la linea *YC* es paralela a la línea *XB*; fíjate que las dos cortan a la recta *AB* de manera perpendicular. Además, si trazamos la altura desde *A* y la prolongamos hasta que cruce *MN*, esa recta es paralela a *BM*.

Lo que vamos a hacer es mover el vértice *C* sobre *YC* y mover el vértice *A* sobre la altura desde *A*; como son rectas paralelas a sus bases, el área debe ser la misma.



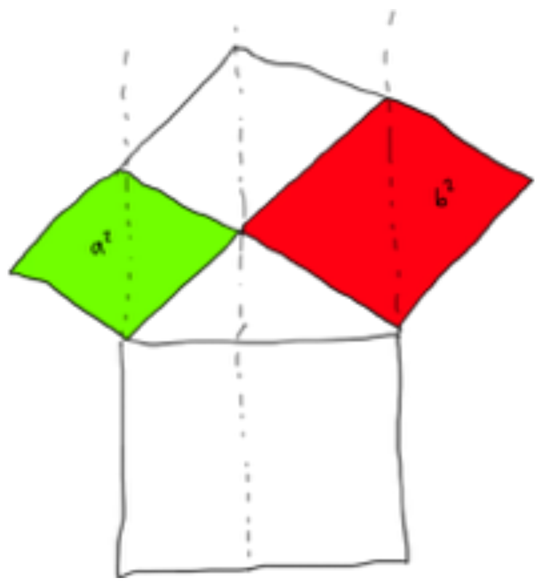
El resultado es que la mitad del cuadrado sobre el lado *AB* es igual a la mitad de uno de los rectángulos que forman el cuadrado sobre *BC*. Lo que falta es repetir este mismo procedimiento pero ahora para el cuadrado sobre *AC*:



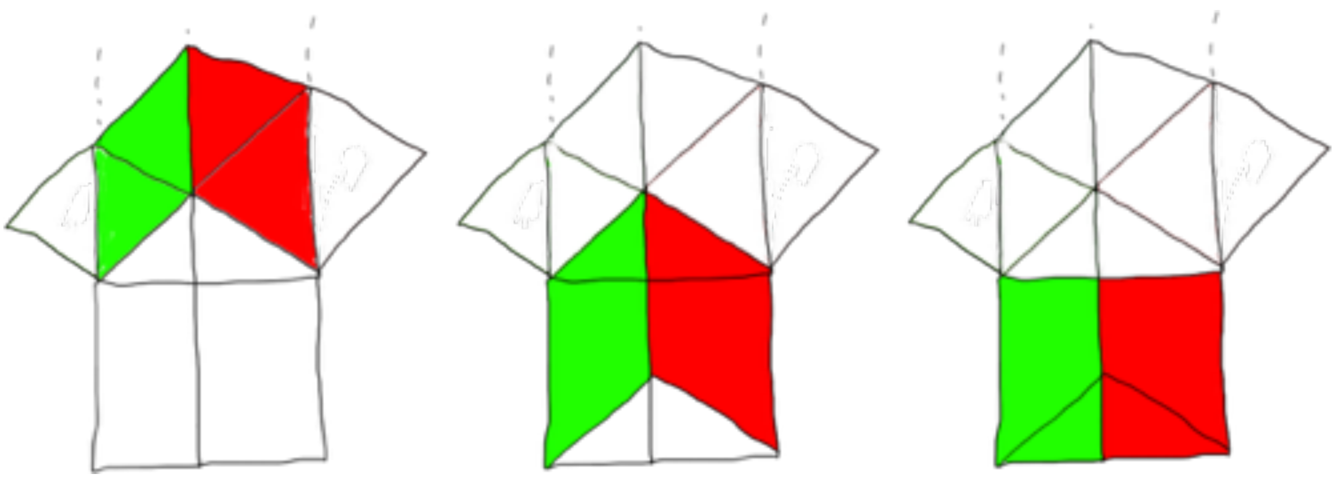
El triángulo *BCQ* y el triángulo *ACN* son congruentes por las mismas razones que antes. Si movemos uno de sus vértices sobre paralelas, llegamos a la conclusión de que la mitad de las áreas de los cuadrados más pequeños es igual a la mitad del área del cuadrado más grande, que implica el Teorema de Pitágoras inmediatamente.

Prueba 12:
Moviendo paralelogramos sobre paralelas

Esta prueba es similar a la prueba de Euclides pero en lugar de mover un vértice del triángulo sobre una paralela, vamos a mover los dos vértices de un paralelogramo, conservando la distancia entre éstos.



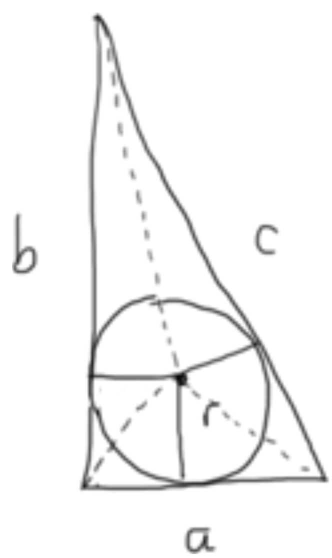
Prolongamos los lados exteriores de los cuadrados más pequeños hasta que se cruzan. Dejamos punteadas tres líneas paralelas que pasan por los vértices de los cuadrados, o por el ángulo recto del triángulo y el punto donde se interceptan las prolongaciones. Vamos a mover los vértices sobre una paralela, hasta encajarlos dentro de las paralelas que tenemos punteadas.

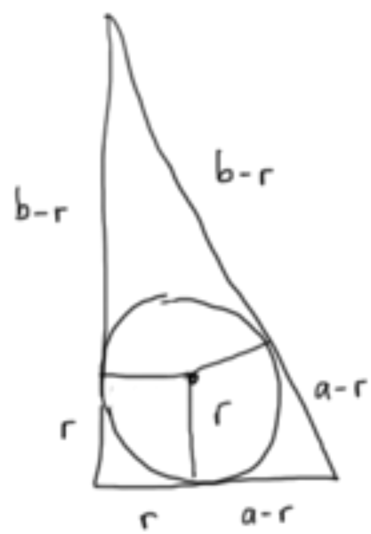


El área que resulta es c^2, como queríamos. Es importantísimo notar que todas las transformaciones que hicimos conservan el área y por eso podemos asegurar que son iguales.

Prueba 15: Usando el inradio

En todo triángulo podemos inscribir un círculo que es tangente a los tres lados. El radio de este círculo se llama inradio. Como podemos ver en la figura de la izquierda, podemos encontrar el área usando el inradio, sumando el área de seis triángulos más pequeños, todos de altura *r*. El resultado es $r \cdot s$, donde *r* es el irradio y *s* es el semiperímetro.





También, el área del triángulo sigue siendo 1/2 *ab*, como siempre.

Lo que podemos hacer, a partir de la figura de la derecha, es sustituir *c*, pues podemos ver que $c = (b - r) + (a - r)$. Despejando para *r*, obtenemos $r = 1/2\ (a + b - c)$.

Entonces, tenemos

$$1/2\ ab = r \cdot s = 1/2\ (a + b - c) \cdot 1/2\ (a + b + c)$$

$$2ab = (a + b - c)\ (a + b + c)$$

$$2ab = (a + b)^2 - c^2$$

$$2ab = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que es, como siempre, nuestra relación.

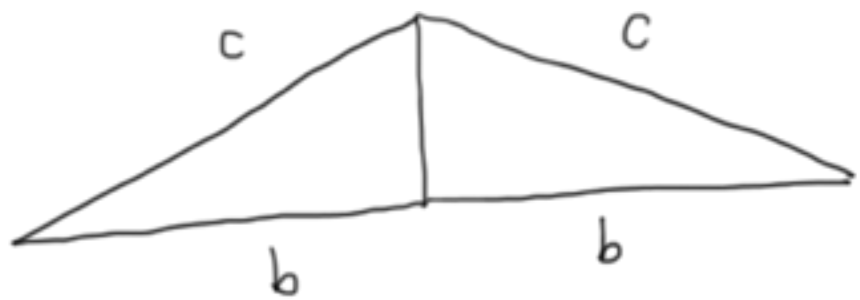
Prueba 16:
Usando fórmula de Herón

Esta prueba utiliza la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo, además de que duplica el triángulo original. La fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo necesita conocer únicamente los lados; si decimos que los lados miden *a, b, c,* entonces la fórmula dice que:

$$A^2 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$$

donde s es el semiperímetro, es decir, la mitad del perímetro, y A es el área del triángulo.

Para esta prueba, hacemos una construcción que duplica nuestro triángulo para crear un triángulo isósceles:



Primero, podemos ver que su área es ab, usando $2b$ como base y a como altura.

Nuestro triángulo tiene lados c, c, $2b$. Entonces, el perímetro es igual a $2b + 2c$, el semiperímetro es $b + c$. Usando la fórmula de Herón, tenemos

$$A^2 = (b + c)\,b^2\,(c - b)$$

$$A^2 = b^2\,(c^2 - b^2)$$

Si sustituimos el área que calculamos antes, obtenemos

$$a^2b^2 = b^2\,(c^2 - b^2)$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

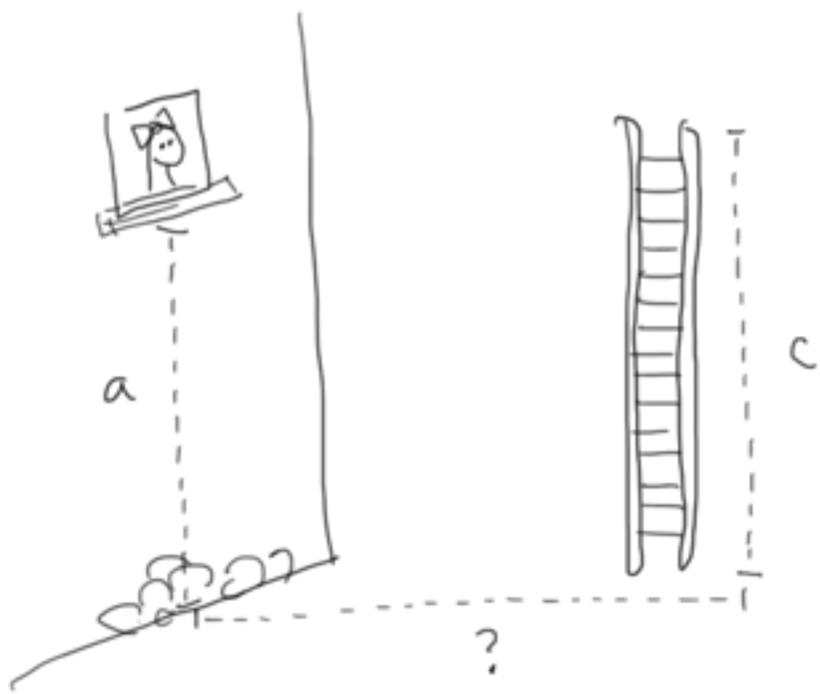
$$a^2 + b^2 = c^2$$

que es nuestra relación buscada.

¿Cómo cuadran los albañiles?

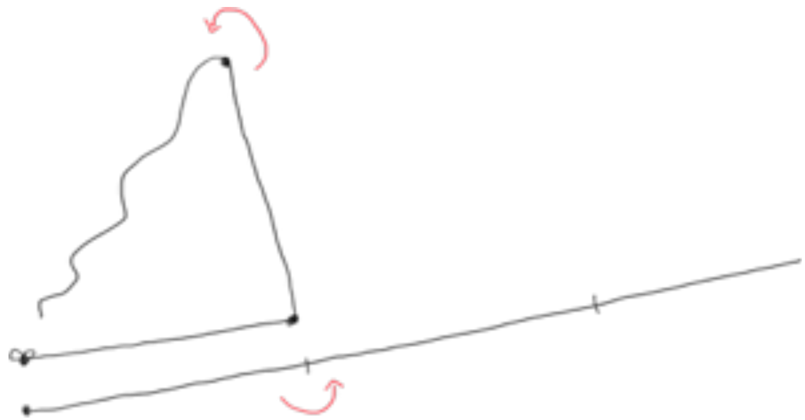
Una de las mentiras favoritas que contamos los maestros de matemáticas es que las matemáticas están en todas partes y que sirven para todo. Entonces, por ejemplo, decimos que el Teorema de Pitágoras está en todos los triángulos rectángulos —lo que es cierto— y que por lo tanto es realmente útil —que ponemos en duda.

No es que el teorema no sirva, es que las situaciones donde lo usamos parecen poco reales. Por ejemplo, no mucha gente calcularía la distancia que debe poner la escalera para que caiga exactamente sobre la ventana y sencillamente lo haría a prueba y error.



Hay, sin embargo, un excelente ejemplo de gente que usa el Teorema de Pitágoras para resolver problemas muy prácticos. ¿Alguna vez te haz preguntado cómo cuadran los albañiles? Es decir, ¿cómo hacen para que las esquinas sean realmente esquinas? Con una cuerda.

Muchos de ellos cargan una cuerda que (a) está dividida en 12 pedazos y juntan 3, 4 y 5 pedazos, o (b) tiene tres marcas en 60, 80 y 100. Lo que hacen es construir un triángulo que tengan esas dimensiones. Como LLL es un criterio de semejanza, todos los triángulos cuyos lados sean múltiplos de 3, 4, 5 deben tener la misma forma, es decir, son rectángulos.



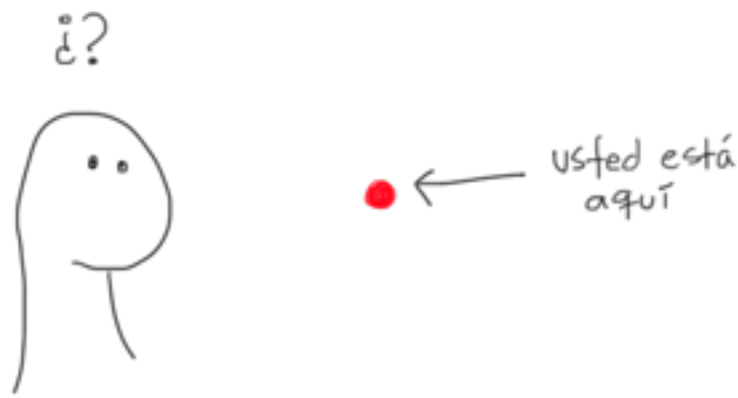
Fijas un extremo de la cuerda con un clavo. Pones otro clavo después de la primera marca —es decir, después de la marca de los 60 o después de 3 pedazos, depende de tu cuerda. La cuerda se dobla cuando pasa por el segundo clavo. Pones el tercer clavo en el único punto —hay un único punto— que permite cerrar el triángulo. El triángulo que resulta es rectángulo y ahí tienes tu esquina.

¡Están usando el recíproco del Teorema de Pitágoras!

La geometría analítica

Una de las aplicaciones más importantes del Teorema de Pitágoras está en las matemáticas mismas y no tanto “en la vida real”. Sucede que la geometría que hacía Euclides se hacía en el plano, que es algo así como una enorme hoja en blanco que se extiende infinitamente en todas direcciones.

Esto está muy bien para hacer trazos y muchas pruebas y demostraciones, pero es un dolor de cabeza poder saber en dónde estás: como la hoja es igual para todos lados, podrías estar en cualquier lugar.

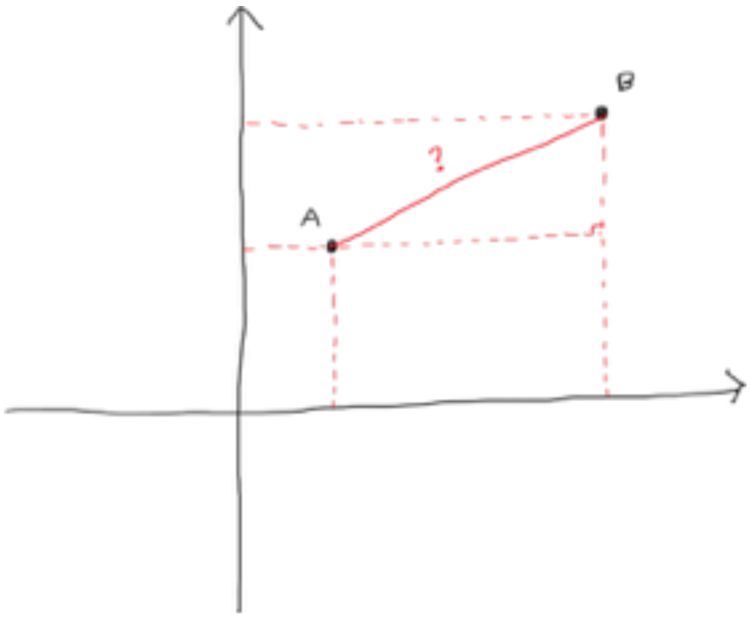


Eso cambió con la idea de Descartes de poner un punto de referencia en nuestro plano. Cuando fijas un punto —que llamamos *origen*—, puedes decir dónde estás en referencia a dicho punto fijo. Esa es la idea detrás del plano cartesiano.

Aunque podríamos marcar ese punto como la intersección de dos rectas cualesquiera —que llamamos *ejes*—, es increíblemente útil tener dos líneas perpendiculares. ¿Por qué? Por el Teorema de Pitágoras.

Nuestros ejes perpendiculares actúan como dos reglas infinitas que podemos mover de manera paralela, como para formar una cuadrícula. De este modo, es muy sencillo calcular la distancia entre dos puntos que estén sobre una paralela a uno de los ejes.

Para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera, lo que hacemos es construir un triángulo rectángulo trazando las perpendiculares a los ejes. Como los ejes son en sí mismos perpendiculares, nuestros trazos son paralelos a uno de los ejes, perpendicular al otro. Esto construye un triángulo rectángulo donde podemos usar el Teorema de Pitágoras y calcular la distancia.



Es decir, el Teorema de Pitágoras es nuestra regla.

Las ecuaciones generales del círculo, la parábola o la elipse se siguen de su definición como lugar geométrico y usar el Teorema de Pitágoras para calcular distancias. Tu curso de geometría analítica puede ser muy relajado si nunca olvidas eso.

Referencias:

A. Bogomolny, Pythagorean Theorem and its many proofs from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#6, Accessed 28 September 2014

Gardner, M. "The Pythagorean Theorem." Ch. 16 in The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American. Chicago, IL: University of Chicago Press, pp. 152-162, 1984.

Weisstein, Eric W. "Pythagorean Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

editorial dinosaurio