Polinomios

Entrenamiento #3 - Rumbo al Nacional
22-25 de septiembre de 2016
Por: Lulú

Resumen

En esta sesión de entrenamientos se verá un tema semi-nuevo, pues sólo lo hemos atacado por intuición. La idea de trabajar con este nuevo tema es porque la Lechona suele ser un presagio de cosas que vendrán en el examen; fue el caso con ecuaciones funcionales y el problema 3 del nacional de Guadalajara. Entonces, para que no nos agarre desprevenidos, aprendamos un nuevo tema chido de álgebra: Polinomios.

1. Preámbulo: ¿Qué es un polinomio?

Un polinomio es una función que tiene la siguiente forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Con la consideración de que $a_n \neq 0$. Esas a_i que preceden a la variable se llaman **coeficientes**. Y me gustaría decirles que los polinomios son funciones de una sola variable, pero no necesariamente. Me gustaría decirles que los coeficientes son enteros, pero no necesariamente. Pero no os preocupéis. Por el momento veremos polinomios en una sola variable.

1.1. Algunas nomenclaturas

A continuación una lista de conceptos que se utilizan mucho cuando se habla de polinomios.

- El **grado** de un polinomio es el valor del exponente máximo. De esa forma se dice que $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n. Si se trata de un polinomio de varias variables el grado del polinomio es la suma máxima de exponentes de algún término.
- Si $P(x)$ es un polinomio, puedes expresar su grado como $deg(P(x))$ ó $degP(x)$.
- Si un polinomio es de grado 0, se dice que es constante.
- Si un polinomio es de grado 1, se dice que es lineal.
- Si un polinomio es de grado 2, se dice que es cuadrático.
- Si un polinomio es de grado 3, se dice que es cúbico.
- Si un polinomio es de grado 4 o mayor, ya no tiene nombre. Se le puede decir "de grado n" y ya.
- Cuando el primer coeficiente del polinomio es 1, se dice que el polinomio es **mónico** (no Mónica; no confundir). Ojo: digo "primero" considerando que escriben el polinomio de izquierda a derecha como en la definición, pero en realidad se trata del coeficiente que acompaña al término que define el grado del polinomio.
- Para denotar un polinomio que depende de un conjunto de variables, se utilizan generalmente las letras P, Q, R, a manera de función. Por ejemplo: un polinomio en x se escribe como $P(x)$; mientras que un polinomio distinto en tres variables puede escribirse como $Q(x, y, z)$.
- Para algún conjunto de números A, se denota como $A[x]$ al conjunto de TODOS los polinomios en x que se pueden formar con elementos de A como coeficientes. De esa forma $\mathbb{Z}[x]$ es el conjunto de TOOOOOODOS los polinomios de coeficientes enteros.

- $P^n(x)$ denota una composición de funciones. Es decir, es lo mismo que $P(P(P\dots(P(P(x)))\dots))$, donde hay una cantidad n de P's.
- ¡Auxilio! ¡No sé cómo denotar un polinomio elevado a una potencia! Sencillo, compañero. Esto es $P(x)^n$.
- Se le llaman polinomios recíprocos a aquellos que cumplen que $a_i = a_{n-i}$.

2. Vieta y las raíces del polinomio

Consideremos que trabajaremos en una sola variable. Se llaman **raíces** del polinomio a los valores que puede tener la variable para que suceda que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Otra forma de decirlo es que r es raíz de $P(x)$ si $P(r) = 0$. Por ejemplo: las raíces del polinomio $x^2 + 5x + 6$ son $x = -2$ y $x = -3$. ¿Sí lo ves? Pero si fuera el polinomio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, verás que sólo tiene como raíz a $x = 1$; aunque, se diga que la raíz está repetida. ¿Por qué se dice eso? Pues todo polinomio de grado n tiene n raíces (algunas complejas, otras reales). Cuando te salen "raíces repetidas", en realidad es la misma raíz con **multiplicidad** mayor a 1. Veamos de qué se está hablando.

Supongamos que $S = \{r_1, r_2, \dots r_{n-1}, r_n\}$ es el conjunto de las n raíces (incluyendo las complejas) de P. Siendo así, el polinomio puede reescribirse como $P(x) = a_n(x - r_n)(x - r_{n-1})\dots(x - r_2)(x - r_1)$. De aquí es claro que si x toma el valor de cualquiera de las raíces, el polinomio vale 0. Aunque, claro, aquí estamos haciendo uso directo del Teorema de Bezout, lo veremos más adelante.

Veamos un ejemplo pequeño: $x^2 - 3x - 4$ es un polinomio cuadrático con raíces $x = 4$ y $x = -1$. Por lo que dijimos anteriormente, este polinomio puede escribirse como $1 \cdot (x - 4)(x - (-1))$. ¿Qué observan? ¿Recuerdan cuando aprendieron a hacer esas factorizaciones y les decían "dos números que multiplicados den el último y sumados den el central"? Ojalá sí. Según Vieta, esto tiene una razón de ser.

2.1. Las fórmulas de Vieta

Pensemos ahora en un caso arbitrario de un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ con raíces $x = r_1$ y $x = r_2$. Entonces P puede reescribirse como $a(x - r_1)(x - r_2)$. Si hacemos las cuentitas y desarrollamos ambos factores, podemos ver que $P(x) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a(r_1 r_2)$. De aquí son evidentes dos cosas (y si no, se deja como ejercicio al lector):

- $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$
- $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

Si pensáramos en un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con raíces $x = r_1,\ x = r_2$ y $x = r_3$, podríamos reescribirlo como $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. De aquí, si desarrollamos esta expresión podemos ver que $P(x) = ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)x - a(r_1 r_2 r_3)$. De nuevo, como ejercicio al lector, es claro que:

- $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$
- $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{c}{a}$
- $r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$

¿Observan un patrón? ¿Podemos generalizar algo?

2.2. Algoritmo de la división y el Teorema de Bezout

¿Sabías tú que existe un algoritmo de la división para polinomios y que algunos polinomios son divisibles entre otros? En teoría de números vimos que $x-1|x^n-1$ y ese cociente es $\sum_{i=1}^{n_1} x_i$. Claro, si es x es entero, estamos manejando cosas entre enteros y por eso aplica. Del mismo modo, ¿nunca se han topado con cosas como $\frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y$? Esa es la divisibilidad de polinomios. ¿Alguna vez les enseñaron a dividir polinomios en la secundaria o en la preparatoria? Si no es el caso, deténganse aquí y pregunten al entrenador que tengan al frente. Es muy importante que lo sepan hacer.

El algoritmo de la división en un polinomio nos dice que, dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, existe una pareja única de polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

Es importante notar que $degR(x) < degB(x)$, ¿pueden ver por qué?. Bajo este principio debería ser más o menos claro que también existe una versión para polinomios del algoritmo de Euclides, pero eso es harina de otro costal.

Regresando a lo que nos compete, se dice que el polinomio $A(x)$ es divisible entre el polinomio $B(x)$ si $R(x) = 0$; es decir, si existe un polinomio $Q(x)$ tal que $A(x) = B(x)Q(x)$. ¿Y que tal si $B(x)$ es un polinomio lineal mónico? Por ahí va el **Teorema de Bezout**. Éste nos dice que un polinomio $P(x)$ es divisible entre $x-a$ si y sólo si $P(a) = 0$ (¿notaron que ahí está la definición de raíz?). ¿Cómo demostramos esto?

Por el algoritmo de la división podemos asegurar que $P(x) = (x-a)Q(x) + c$, donde es claro que c es una constante. Supongamos que $P(a) = 0$, de donde $P(a) = (a-a)Q(a) + c = 0 + c$. Pero como supusimos que $P(a) = 0$, entonces el residuo c es 0, y el polinomio es divisible entre $x-a$. Ahora, supongamos que el polinomio es divisible y que, por ello, $c = 0$; podemos reescribirlo como $P(x) = (x-a)Q(x)$, de donde es claro que si evaluamos en a, todo se hace 0. Hemos concluido la demostración. Y es por este teorema que pudimos hacer la factorización de las raíces anteriormente.

2.3. Jugando con raíces y multiplicidades

Ya anteriormente se mencionó el concepto de multiplicidad pero no se explicó en qué consiste. Quedamos que si a es una raíz del polinomio, entonces éste puede expresarse como $P(x) = (x-a)Q(x)$, ¿no? Esto significa que $x-a$ divide a P, ¿cierto? Siendo así, a tiene multiplicidad m si podemos escribir $P(x)$ de la forma $(x-a)^m Q(x)$, que equivale a decir que $(x-a)^m$ divide a P. Si m es el máximo natural que cumple esto, entonces esa raíz tiene multiplicidad m. Por ejemplo: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$ tiene 2 como raíz, y ésta tiene multiplicidad 3.

Más adelante se tendrá que demostrar que las raíces de un polinomio que divide a otro también son raíces de este último. Mientras tanto, creamos que es cierto y veamos algunos ejemplos de su aplicación.

2.4. El Teorema de la raíz racional

Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes enteros. Supongamos que alguna de sus raíces es $r = \pm\frac{p}{q}$, un racional irreducible. El Teorema nos dice que $p|a_0$ y $q|a_n$. Veamos por qué esto es cierto a continuación.

Como $r = \frac{p}{q}$ es raíz, significa que $P(\frac{p}{q}) = 0$. Para deshacernos de todos los denominadores que van a aparecer, multipliquemos la expresión por q^n, de modo que $q^n P(\frac{p}{q}) = 0$. Al evaluar módulo p, observamos que todos, menos uno de los términos, tienen al menos un factor p; de aquí que $a_0 q^n \equiv 0$. Pero como habíamos dicho que r era un racional irreducible, p y q son primos relativos y, por lo tanto, $p|a_0$. La otra parte de la demostración es análoga.

Este teorema nos puede ser útil, como ejemplo, si sabemos que un polinomio tiene alguna raíz racional. Con esto, se acota fuertemente la variedad de factorizaciones que podría tener un polinomio. Y, si se logra, se encontró otra tanda de raíces en el proceso.

2.5. La ley de Descartes de los signos

Es una regla bastante sencilla de seguir, de hecho. Esta ley nos dice que la cantidad de raíces positivas de un polinomio $P(x)$ tiene la misma paridad (pero es menor o igual) que la cantidad de cambios de signo en los coeficientes de $P(x)$. Y al mismo tiempo, nos dice que la cantidad de raíces negativas tiene la misma paridad (pero es menor o igual) que el número de cambios de signo en los coeficientes de $P(-x)$. ¿No te queda muy claro? ¡Veamos un ejemplo!

Pensemos que $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Podemos observar que del término cuadrático al lineal, el signo cambia. Y nada más. Por lo tanto tiene una raíz positiva. Ahora, $P(-x) = -x^3 + x^2 + x - 1$. Como aquí hay dos cambios de signo, significa que la cantidad de raíces negativas es 2 ó 0. ¿Quieres comprobar si es verdad? La factorización de P es $P(x) = (x+1)^2(x-1)$. ¿Ya lo viste?

Ojo: es muy importante recordar que esta ley aplica para polinomios de una sola variable y de coeficientes reales, considerando siempre que los términos están ordenados de forma descendente respecto a los exponentes (izquierda el mayor y a la derecha el menor). Otra cosa que hay que considerar es que la regla aplica para cualesquiera coeficientes consecutivos distintos de 0.

¿Y cómo tomamos en cuenta las raíces no reales? Pues el polinomio debe cumplir que 0 no es una raíz, lo cual es bastante sencillo de ver, pues el término constante debería ser 0. Digamos que p es la cantidad máxima de raíces positivas y q es la cantidad máxima de raíces negativas. Entonces, para un polinomio de grado n, el mínimo número de raíces no-reales se puede calcular mediante $n - (p + q)$.

Veamos un ejemplo que incluye coeficientes 0 y raíces no reales. Pensemos en $P(x) = x^5 - 1$. Ignorando los coeficientes 0, notamos que sólo hay un cambio de signo, por lo que hay sólo una raíz positiva ($x = 1$). Ahora, $P(-x) = -x^5 - 1$, por lo que no hay raíces negativas. Además, las raíces no-reales son $5 - (1 + 0) = 4$. ¿Ya más claro?

3. ¿Entonces tengo que pelear con más de un polinomio?

Quizá. Todo polinomio lo puedes separar en varios. Pero también puedes hacer operaciones entre ellos. Los polinomios cumplen algunas cosas muy chidas. Son sencillas de demostrar, pero ahí te van:

1. La suma de dos o más polinomios, es otro polinomio.
2. El producto de dos o más polinomios, es otro polinomio. Aunque muy probablemente de grado mayor.

Al menos para fines de esta lista (excepto para los simétricos), todos los polinomios están en una misma variable, así que puedes hacer las operaciones sin preocuparte mucho. Probablemente te topes con polinomios distintos que tienen factores comunes, lo que te permite factorizarlo en un solo polinomio. Busca las opciones. Guiño, guiño.

4. PolinomiosoimoniloP simétricos

El chiste aplica más para los recíprocos. La definición de simétricos ni siquiera va por ahí. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables y sea $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una permutación de X. Dado esto, un polinomio es simétrico si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para toda permutación Y. Para dos variables, el polinomio es simétrico si $P(x, y) = P(y, x)$. Para dos variables es fácil ver que son simétricos:

1. $\sigma_1 = x + y$
2. $\sigma_2 = xy$
3. $s_n = x^n + y^n$, para $n \in \mathbb{N}$

A las primeras dos se les llama **polinomios simétricos elementales** (de dos variables) porque todos los demás se pueden escribir en función de éstos. Dicen. Por ejemplo $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$. Y a su vez se puede hacer un poco de recursión, ¿sí lo ven? Si no, se deja como ejercicio al lector.

Para sistemas no lineales de ecuaciones simétricas, es muy útil simplificar con σ_1 y σ_2, puesto que ayuda mucho a reducir el grado. Por ejemplo, si se tuviera una ecuación de la forma $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$, sabríamos gracias a Vieta que las raíces son x, y. Veamos un ejemplo. Resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x^5 + y^5 &= 33 \end{aligned}$$

Primero, créanme (o demuéstrenlo) cuando digo que $x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$. Al sustituir que $\sigma_1 = 3$, nos queda una cuadrática de σ_2. cuyas soluciones son $\sigma_2 = 2$ y $\sigma_2 = 7$. Ahora basta resolver las ecuaciones $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2$ y $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 7$.

Va otro ejemplo de su utilidad. Resolvamos la ecuación $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$ en los reales. Hagamos un cambio de variable y digamos que $u = \sqrt[4]{97 - x}$ y que $v = \sqrt[4]{x}$. Sabemos que $u + v = \sigma_1 = 5$; y además, se sabe que $u^4 + v^4 = 97 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$. De nuevo, al sustituir el valor que ya conocemos, nos queda una cuadrática en función de σ_2, cuyas soluciones son $\sigma_2 = 6$ y $\sigma_2 = 44$. El resto se deja como ejercicio al lector.

¿Cuáles crees que sean los polinomios simétricos elementales para tres, cuatro, cinco o n variables? ¿Te das una idea? Para este tipo de problema, como son simétricos, basta encontrar una solución; las otras son permutaciones de ésta.

5. Ejercicios

1. $deg(P(x) \pm Q(x)) \leq max(degP(x), degQ(x))$
2. En el ejercicio anterior, ¿cuándo se da la igualdad y cuándo no?
3. $deg(P(x) \cdot Q(x)) = degP(x) + degQ(x)$
4. Determina las fórmulas de Vieta para un polinomio lineal
5. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $Q(x)|P(x)$. Demuestra que una raíz de $Q(x)$ también es raíz de $P(x)$.
6. Sean $r_1,\ r_2,\ r_3$ las raíces del polinomio $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. Encuentra el valor de $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$.
7. Muesta que, si un polinomio es mónico, todas sus raíces racionales deben ser enteros.
8. Utiliza el teorema de la raíz racional para factorizar el polinomio $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
9. Encuentra el valor de la suma y el producto de las raíces de $x^n = 1$.
10. Demuestra que $a - b|P(a) - P(b)$
11. Supongamos que $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$, $x^3 + y^3 = c$. ¿Cuál es la relación que hay entre a, b y c?

6. Agregados culturales

1. Al Binomio de Newton también se le conoce como Teorema del Binomio. Lo menciono porque puede resultar tremendamente útil en algunos problemas de polinomios.
2. El Teorema de Binomio es útil para factoriza y/o desarrollar polinomios.

3. Los números reales son un subconjunto de los números complejos.
4. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que cualquier polinomio de grado mayor a 0 con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.
5. Acapulco, siendo el resort turístico más grande del país, contiene al 3 % de la población del estado de Guerrero.

7. Lista de problemas

1. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n y sean $\{r_1, r_2, \dots r_{n-1}, r_n\}$ sus raíces. Demuestra que:
   - $\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
   - $\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
   - $\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}^{n} r_i r_j r_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$
   - Y así sucesivamente hasta
   - $\prod_{i=1}^{n} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

   Nota: Esta es la versión generalizada de las fórmulas de Vieta, y se colocó al principio para que lo tengan en mente porque es MUY IMPORTANTE.
2. Factoriza $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ con los polinomios simétricos elementales de tres variables.
3. Supóngase que el polinomio $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$ tiene tres raíces reales a, b, c. Encuentra el valor de
$$a(1 + b + c) + b(1 + a + c) + c(1 + a + b)$$
4. Sea $P(x) = px^3 + px^2 + qx + q$ un polinomio cuyas raíces son a, b, c. Demuestra que
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$
5. Sean a y b dos enteros dos enteros tales que el polinomio $x^2 + ax + b + 1$ tiene dos raíces naturales. Demuestra que $a^2 + b^2$ no es primo.
6. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es mínima la suma de los cuadrados de las raíces de $x^2 - (a - 2)x - a - 1$?
7. Prueba que $P(x)$ es un polinomio recíproco si y sólo si $x^n P(\frac{1}{x}) = P(x)$
8. Encuentra todas las raíces racionales del polinomio $x^4 - x^3 - x^2 + x + 57$
9. Sean x_1 y x_2 las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Prueba que para todo entero no negativo n, $x_1^n + x_2^n$ es entero y no divisible entre 5.
10. Resuelve el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \end{aligned}$$
11. Prueba que todo polinomio recíproco de grado impar es divisible entre $x + 1$, y que el cociente es otro polinomio recíproco.

12. ¿Para qué valores naturales de n se cumple que $x^2 + x + 1 | x^{2n} + x^n + 1$

13. Muestra que la suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio es igual al grado de éste.

14. Muestra que si a es raíz de un polinomio recíproco, entonces $\frac{1}{a}$ también lo es.

15. Si $a, \ b, \ c, \ d$ son las raíces del polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$, encuentra el valor de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

16. Sean $a, \ b, \ c$ tres reales que cumplen que $a + b + c > 0$, $ab + ac + bc > 0$ y que $abc > 0$. Demuestra que los tres reales son positivos.

17. Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional, utilizando el Teorema de la Raíz Racional.

18. Demuestra que 1 es una raíz de multiplicidad 2 para el polinomio $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, donde n es natural.

19. Sean $a, \ b, \ c$ tres números reales tales que el polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales distintas (p_1 y p_2). y el polinomio $cx^2 + bx + a$ tiene dos raíces reales distintas (q_1 y q_2). Se sabe que lo números $p_1, \ q_1, \ p_2, \ q_2$ forman, en ese orden, una progresión aritmética. Demuestra que $a + c = 0$.

20. Considera los polinomios

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Encuentra las condiciones a los parámetros $a, \ b, \ c$ para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces en común y, en esos casos, resuelve $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.

21. Prueba que, dados $n + 1$ puntos en el plano, es posible encontrar un polinomio de grado n que pase por ellos.

22. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que $P(P(n) + n)$ es primo para infinitos enteros n.

23. El polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ tiene tres raíces reales diferentes. Encuentre números reales a y b tales que el polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$ permute cíclicamente las raíces de $Q(x)$.

24. $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios tales que $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Prueba que para todo $n \in N$:

$$P(x) - Q(x) | P^n(x) - Q^n(x)$$

25. Encuentra todas las soluciones reales al sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz &= x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{aligned}$$

26. **(Versión "sencilla")** Sea $P(x)$ un polinomio sobre los reales tal que $\forall r \in \mathbb{R}$ sucede que $P(r) > 0$. Prueba que existen dos polinomios S y T tales que

$$P(x) = S(x)^2 + T(x)^2$$

27. **(Versión difícil)** Sea $P(x)$ un polinomio sobre los reales tal que $\forall r \in \mathbb{R}$ sucede que $P(r) \geq 0$. Prueba que existen dos polinomios S y T tales que

$$P(x) = S(x)^2 + T(x)^2$$