Olimpiada de Matemáticas de Guanajuato.	CIMAT, Guanajuato, México

Polinomios.

Entrenamiento por: Pablo Meré Hidalgo septiembre 2019

1. Polinomios, Raíces y Vieta

Definición 1.1. *Un **polinomio** es una expresión de la forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

*Las constantes $a_0, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio P. El conjunto de polinomios con coeficientes en el conjunto A se denota $A[x]$. Por ejemplo $\mathbb{R}[x]$ son los polinomios con coeficientes reales y $\mathbb{Z}[x]$ son los polinomios con coeficientes enteros.*

*Podemos suponer que $a_n \neq 0$ (en caso contrario podríamos borrarlo sin alterar la expresión). Entonces n se llama **grado** del polinomio y se denota $n = \deg P$. Polinomios de grado 1, 2 y 3 se llaman lineales, cuadráticos y cúbicos respectivamente. Los polinomios constantes no cero tienen grado 0; mientras que el polinomio cero $P(x) \equiv 0$ le asignamos el grado $-\infty$ (las razones serán claras próximamente).*

Teorema 1.2. *Si P y Q son polinomios entonces*

a) $\deg P \pm B = \max(\deg P, \deg Q)$ *la igualdad es cierta siempre que no se anule el coeficiente principal, en particular cuando los grados son distintos.*

b) $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Teorema 1.3. *Dados polinomios A y $B \neq 0$ existen unicos polinomios Q (cociente) y R (residuo) tales que*

$$A = BQ + R \quad y \quad \deg R < \deg B$$

Teorema 1.4. *El **teorema del residuo** indica que cuando un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, de grado n, se divide por $(x - k)$, el resduo es $P(k)$. El **teorema del factor** indica que $P(k) = 0$ si y sólo si $(x - k)$ es un factor de $p(x)$. Un polinomio de grado n tiene máximo n raices.*

Teorema 1.5. *Si un polinomio P es divisible por un polinomio Q, entonces toda raíz de Q es también raíz de P.*

Teorema 1.6. *Un polinomio $P(x)$ (Con coeficientes complejos) de grado $n > 0$ tiene una única representación de la forma*

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

salvo el orden de los factores. $c \neq 0$ es el coeficiente principal. $r_1 \ldots, r_n$ son números complejos, no necesariamente distintos.

Nótese que $P(x)$ tiene máximo $\deg P = n$ raíces distintas. Y exactamente n contando multiplicidades.

Corolario 1.7. *Si dos polinomios de grado menor o igual a n tienen $n+1$ puntos en común, entonces son igules.*

Teorema 1.8. *En polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ las raíces complejas vienen por pres conjugados, y P puede escribirse de forma única como*

$$P(x) = c(x - r_1)\cdots(x - r_k)(x^2 + b_1 x + c_1)\ldots(x^2 + b_l x + c_l)$$

7

Teorema 1.9. *El **teorema de Vieta** indica una relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces, mediante polinomios simétricos elementales.*

Si $P(x) = x^n + \dots a_1 x + a_o$ es un polinomio con raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$ entonces

$$a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k (r_1 \dots, r_n) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Donde

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

sumando sobre todos los subonjuntos $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.

En casos pequeños es más conveneinte desarrollar el producto e igualar coeficientes.

1. ¿Para cuales n el polinomio $x^n + x - 1$ es divisible por $x^2 - x + 1$? ¿ y por $x^3 - x + 1$?

2. Polinomios Cuadráticos

Teorema 2.1. *Un polinomio cuadrático de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) tiene dos raices dadas por la fórmila*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(también conocida como la Chicharronera, porque truena a todos los polinomios)

*La cantidad $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** del polinomio y nos indica cosas sobre el polinomio y la geometría de la parabola que dibuja.*

- *Si $\Delta = 0$ las dos raíces son iguales. La parabola es tangente al eje x.*
- *Si $\Delta > 0$ las dos raíces son reales y distintas. La parábola corta dos veces al eje x.*
- *Si $\Delta < 0$ las dos raíces son complejas, el polinomio es irreducible en los reales. La parábola no toca el eje x.*

3. Poliniomios con Coeficientes enteros

Teorema 3.1. *Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $p(x) - p(y)$ es divisible por $(x - y)$, para cualesquiera x, y enteros.*

Corolario 3.2. *Toda raíz entera de un polinomio P con coeficientes enteros divide a $P(0) = a_0$.*

Teorema 3.3. *El **teorema de la raiz racional** indica que si $\frac{p}{q}$ es una fracción reducida que resulta ser raíz de un polinomio $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros, entonces p divide a a_0 (coeficiente principal) y q divide a a_n.*

1. Si un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ toma valores ± 1 en tres enteros distintos, demuestra que no tiene raíces enteras.
2. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Prueba que si x es un entero tal que $P(P(\dots P(x) \dots)) = x$ (n iteraciones), entonces $P(P(x)) = x$.
3. Da un ejemplo de un polinomio que no tenga coeficientes enteros, pero que al evaluarlo en enteros tome valores enteros

 pablo.mere@cimat.mx, NUA +5214421054948.

4. Problemas Variados

1. Si $x^2 - x - 2 = 0$, determina todos lo posibles valores de $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$.

2. Encuentra todos los valores de x tales que $x + \frac{36}{x} \geq 13$.

3. Un polinomio deja un residuo de 5 cuando se divide por $(x-3)$, y un residuo de -7 cuando se divide por $(x-1)$. Encuentra el residuo al dividir por $x^2 - 2x - 3$.

4. Si x y y son números reales, determina todas las soluciones (x, y) para el sistema
$$\begin{aligned} x^2 - xy + 8 &= 0 \\ x^2 - 8x + y &= 0 \end{aligned}$$

5. a) La ecuación $y = x^2 + 2ax + a$ representa una parabola. Variando a entre los reales obtenemos una familia de parabolas. Demuestra que todas tienen un punto en común y determina sus coordenadas. b) Los vértives de las parábolas forman una curva. Demuestra que ésta es también una parabola.

6. Determina todos los valores reales para de p y r tales que se cumplen las siguientes ecuaciones
$$\begin{aligned} p + pr + pr^2 &= 26 \\ p^2r + pr^2 + pr^3 &= 156 \end{aligned}$$

7. Una escuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con coeficientes no-cero, tiene raices reaes. Prueba que $a.b.c$ no pueden estar en una progrsión geométrica.

8. Una escuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ tiene soluciones enteras. Si a, c, b son términos consecutivos de una secuencia aritmética, resuelve para las raíces de la ecuación.

9. Dado que -2 es solución de $x^3 - 7x - 6 = 0$, encunetra las otras soluciones.

10. Encuentra el valor de a tal que la ecuación siguiente tiene la mínima suma de cuadrados de sus raíces.
$$4x^2 + 4(a-2)x - 8a^2 + 14a + 31 = 0.$$

11. El punto máximo de la gráfica $y = -2x^2 - 2ax + k$ es $(-2, 7)$. Calcula a y k.

12. Las raíces de $x^2 + cx + d = 0$ son a, b; y las raíces de $x^2 + ax + b = 0$ son cyd. Si a, b, c, d son no cero, calcula $a + b + c + d$.