Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Entrenamientos Especiales 2018 – 2019
Sesión de Álgebra: Polinomios.

1. Definiciones

Un *monomio* en una variable x es una expresión de la forma cx^k, donde c es una constante y k es un entero no negativo.
Un *polinomio* es una suma finita de monomios en x. Es decir, es una expersión como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman $coeficientesdelpolinomio$. El conjunto de polinomios con coeficientes en el conjunto A se denota $A[x]$, por ejemplo $\mathbb{R}[X]$ es el conjunto de polinomios con coeficientes en los reales.
Suponemos sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$. El exponente n se llama **grado** del polinomio P y de denota $deg(P)$ o $grad(P)$. El coeficiente a_n se llama **coeficiente principal** del polinomio. Cuando $a_n = 1$ decimos que el polinomio es **mónico**. Un polinomio constante $P(x) = c$, con $c \neq 0$ tiene grado 0 mientras que al **polinomio cero** ($P(x) \equiv 0$, identicamente cero) se le asigna grado $-\infty$ por razones que discutiremos más adelante.
Los polinomios se suman término a término y se multiplican de la forma usual que aprendimos en la secundaria.

Ejemplo 1 *Si* $P(x) = x^2 + 2x + 2$ *y* $Q(x) = -3x + 1$ *tenemos que* P *es un polinómio cuadrático, es decir,* $\deg P = 2$*; además es mónico. Por otro lado,* Q *es un polinomio lineal, es decir,* $\deg Q = 1$*. La suma y el producto son los siguientes:*

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = (x^2 + 2x + 2) + (-3x + 1) = x^2 - x + 3$$
$$(PQ)(x) = P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 2x + 2)(-3x + 1) = -3x^3 - 5x^2 - 4x + 2$$

Teorema 1 *Si* A *y* B *son dos polinomios entonces*

i) $\deg(A \pm B) \leq \max\{\deg A, \deg B\}$.

ii) $\deg(A \cdot B) = \deg A + \deg B$.

El punto 11) es la razón que $\deg 0 = -\infty$. La igualdad de i) se dá cuando $\deg A \neq \deg B$.

Dem. La demostración se deja al lector, basta hacer algunos casos para convencerse.

2. Algoritmo de la División

Los polinomios se pueden sumar y multiplicar ed forma adecuada, pero no siempre se pueden dividir. En cierto sentido se comportan como los enteros $\mathbb{Z}$. Podemos definir conceptos de divisibilidad con el siguiente teorema.

Teorema 2 ***(Algoritmo de la división)*** *Si F y G son polinomios en una variable con coeficientes en un campo $\mathbb{K}$ (pueden ser $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ etc.) entonces existen polinomios Q y R únicos con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que*

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x), \quad \deg R < \deg F$$

Al igual que en el algoritmo de la división usual, Q se llama cociente y R residuo. Cuando el polinomio G es mónico, podemos pedirle menos propiedades al conjunto K y sigue funcionando el teorema. Por ejemplo, podemos tomar $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2 *Tomando $F(x) = 3x^5 + 2x^2 - 5$ y $G(x) = 2x^3 + 6x + 1$, obtenemos $Q(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{9}{2}$ y $R(x) = \frac{1}{2}x^2 + 27x - \frac{1}{2}$ ya que*

$$3x^5 + 2x^2 - 5 = (2x^3 + 6x + 1)(\tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{9}{2}) + \tfrac{1}{2}x^2 + 27x - \tfrac{1}{2}$$

Decimos que un polinomio F es **divisible** por un polinomio G si el residuo cuando F dividimos por G, el residuo es 0. Un caso particular muy útil es el siguiente.

El dados dos polinomios P y Q, el **máximo común divisor** de P y Q, es el máximo de sus divisores comunes. El máximo común divisor es único salvo multiplicación por constantes, y al igual que en $\mathbb{Z}$, es mínima combinación lineal (en grado).

Teorema 3 *El polinomio P es divisible por el binomio $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.*

Dem. Por el algoritmo de la división $P(x) = (x - a)Q(x) + c$, donde Q es un polinomio y c es constante (polinomio de grado menor a 1). Luego es claro que $P(a) = 0$ si y sólo si $c = 0$, y eso es si y sólo si $(x - a)$ divide a $P(x)$

En este caso a de dice una **raiz** del polinomio P.

Teorema 4 *Si un polinomio P es divisible por un polinomio Q entonces toda raiz de Q es raíz de P.*

La implicación en sentido inverso no funciona. Por ejemplo, toda raíz de x^2 es raíz de x, pero x^2 no divide a x.

Ejercicio 1 *Encuentra todos los n para los cuales $x^n + x - 1$es divisible por a) $x^2 - x + 1$ b)$x^3 + x - 1$.*

Sugerencia a) Encuentra las dos raíces. b) Considera la norma de las raíces de $x^n - x^3$.

3. Teorema fundamental del Álgebra

Teorema 5 *Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales (o complejos) de grado $n > 0$ tiene una representación única de la forma*

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

salvo ordenamiento de los factores, donde $c \neq 0$ y $r_1, \cdots, r_n$ son números complejos no necesariamente distintos. Luego P tiene máximo n raices reales.

Teorema 6 *(Corolario) Si un polinomio P tiene $n+1$ raíces con $\deg P \leq n$, entonces P es el polinomio cero.*

Teorema 7 *Consideremos $\overline{a + ib} = a - ib$ para reales a, b (la conjugación compleja). Si ξ es raís de un polinomio P con coeficientes reales, entonces $\overline{\xi}$ también es raíz.*

Dem. La conjugación compleja es una operación que abre productos y abre sumas, es decir

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Luego,

$$0 = \overline{0} = \overline{P(\xi)} = \overline{a_n \xi^n + \cdots + a_1 \xi + a_0} = a_n \overline{\xi}^n + \cdots + a_1 \overline{\xi} + a_0 = P(\overline{\xi})$$

Teorema 8 *Todo polinomio P mónico coeficientes reales de grado n puede factorizarse en cuadráticos irreducibles y lineales:*

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_l x + q_l)$$

donde r_i, p_i y q_i son números reales con $p_i^2 < 4q_i$ y $k + 2l = n$.

La demostración se basa en el teorema anterior, e ir factorizando un polinomio lineal o cuadrático irreducible, con coeficientes enteros.

4. Formulas de Vieta

Los polinomios **simétricos elementales** en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son los polinomios $\sigma_1, \sigma_2 \cdots, \sigma_n$ donde

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

la suma se hace sobre todos los sobconjuntos con k elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Teorema 9 ***(Formulas de Vieta)*** *Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son los ceros del polinomio $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, entonces $a_k = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.*

Ejercicio 2 *Prueba que las raíces del polinomio $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2 x^{n-2} + \cdots$, no pueden ser todas reales.*

Hint Utiliza la desigualdad MA-MG.

5. Interpolación de Lagrange

Teorema 10 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados n números x_i y n números y_i, existe un único polinomio de grado (menor o igual a) n tal que $P(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Este polinomio está dado por la fórmula*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

6. Fracciones Parciales

Teorema 11 *Si tenemos dos polinomios $Q(x) = (x - r_1)^{n_1} \dots (x - r_k)^{n_k}$ y P con $\deg P < \deg Q$ entonces existe una única forma de expresar P/Q como*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{11}}{x - r_1} + \frac{a_{12}}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1n_1}}{(x - r_1)^{n_1}} + \frac{a_{21}}{x - r_2} + \cdots \quad \cdots + \frac{a_k n_k}{(x - r_k)^{n_k}}$$

La demostración del teorema anterior es elemental utilizando espacios vectoriales, pero queda fuera de nuestro interés en la olimpiada de matemáticas. Sin embargo podemos demostrar la siguiente versión usando lo que ya sabermos:

Ejercicio 3 *Muestra que si P es un polinomio con grado menor que n entonces la fracción $\dfrac{P(x)}{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}$ donde los r_i son números distintos, puede escribirse de la forma*

$$\frac{A_1}{xr_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}$$

donde los números A_k son constantes.

Hint: Usa la fórmula de interpolación de Lagrange.

Ejercicio 4 *La función generatriz de la serie de fibonacci es $A[x] = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$. Factoriza el denominador y utiliza Fracciones parciales para ponerlo en la forma:*

$$A[X] = \frac{c}{1 - \alpha x} + \frac{d}{1 - \beta x}$$

Usando que $1/(1 - tx) = 1 + tx + t^2x^2 \dots$ muestra que el término general de se sucesión es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

7. Problemas

1. Encuentra polinomios P y Q tales que

$$(x^8 - 1)F(x) + (x^5 - 1)G(x) = x - 1$$

2. Encuentra el máximo común divisor de $x^n - 1$ y $x^m - 1$.
3. Prueba que $n^4 - 20n^2 + 4$ es compuesto para cualquier entero n.
4. Sea f un polinomio que deja residuo A cuando se divide entre $x - a$, y residuo B cuando se divide por $x - b$, $(a \neq b)$. Encuentra el residuo de f al dividirse entre $(x - a)(x - b)$. Hint: Chino del residuo.
5. Prueba que $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ es múltiplo de $1 + x + x^2 + x^3$.

6. Encuentra todos los polinomios de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_1 \in \{1, -1\}$ que tienen todas sus raíces reales.

7. Un polinomio P mónico de grado 4 satisface $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$ Determina $P(12) + P(-8)$.

8. Si P y Q son polinomios con $P(P(x)) = Q(Q(x))$ para todo x, demuestra que $P \equiv Q$.

9. Determina todas las tercias de números eneros que satisfacen $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3$.

8. Referencias

- Olympiad Training Materials, www.imomath.com
- Larson. Polinomios.
- Adeel Khan (2006) A Few Elementary Properties of Polynomials.